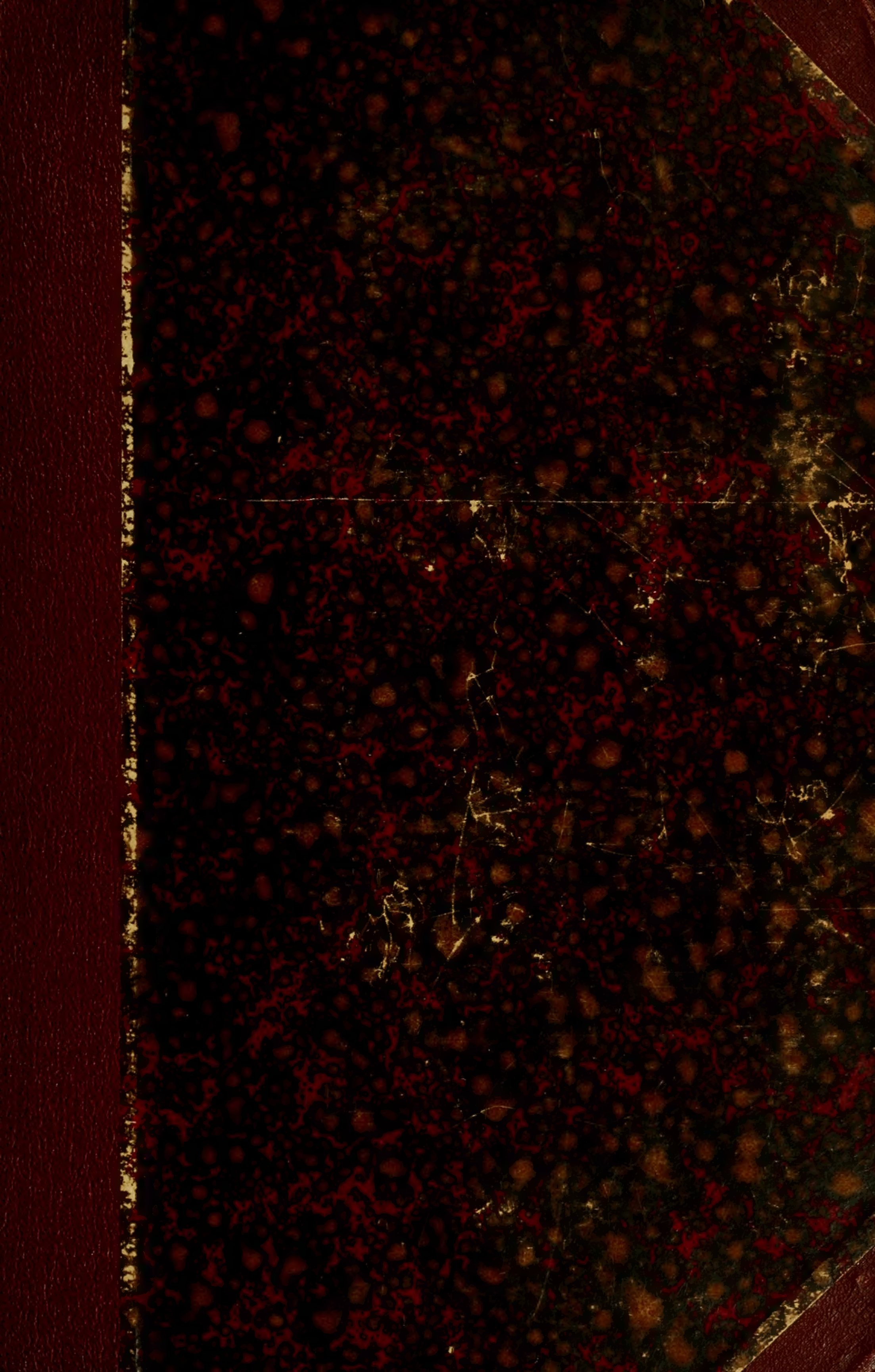






VORLESUNGEN ÜBER GEOMETRIE.

VON

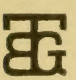
ALFRED CLEBSCH.

BEARBEITET UND HERAUSGEGEBEN

VON

DR. FERDINAND LINDEMANN.

ERSTEN BANDES ZWEITER THEIL.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1876.

Fünfte Abtheilung.

Die Curven dritter Ordnung oder dritter Klasse.

I. Das System der Wendepunkte.

Wenn wir nunmehr dazu übergehen, die gewonnenen allgemeinen Sätze und Anschauungen insbesondere für Curven *dritter* Ordnung zu verwerthen*), so wollen wir dem Vorstehenden entsprechend die folgenden verschiedenen Punkte berücksichtigen:

1) Ihre Beziehung zur Polarentheorie und zu den Plücker'schen Formeln, besonders also die Lage der 9 Wendepunkte. Auf die Theorie der letzteren, welche bei den Curven dritter Ordnung zuerst vorkommen, wird sich unser Hauptinteresse concentriren.
2) Die Darstellung ihrer Eigenschaften mittelst der Theorie der ternären cubischen Formen.
3) Die Geometrie auf einer Curve dritter Ordnung. Für diese werden wir dann durch Anwendungen der Theorie der elliptischen Functionen ganz neue Hülfsmittel kennen lernen.
4) Curven dritter Ordnung mit vielfachen Punkten und Ausartungen dieser Curven.

Endlich könnten wir noch Systeme von Curven 3. Ordnung untersuchen, besonders die Anwendung der Methode der Charakteristiken auf diese Systeme. Darauf soll aber nicht eingegangen werden; es sei nur daran erinnert, dass die Elementarsysteme der Curven

*) Für die Ausbildung der Theorie dieser Curven sind besonders folgende Aufsätze von Wichtigkeit: Newton: Enumeratio linearum tertii ordinis; Maclaurin: De linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus (in's Französische übertragen von de Jonquières: Mélanges de géométrie pure, p. 197, Paris 1856); Plücker: System der analytischen Geometrie; Hesse: Crelle's Journal, Bd. 28, 36 und 38; Cayley: Philosophical Transactions, vol. 147, sowie die mehrfach erwähnten Werke von Salmon, Cremona und Chasles (Géométrie supérieure). Eine Zusammenstellung der geometrischen Theorien gab auch Durège: Die ebenen Curven dritter Ordnung, Leipzig 1871. Auf letztere Werke sei in Betreff weiterer Ausführungen einzelner Punkte der Theorie verwiesen; man findet daselbst auch eingehendere Litteraturnachweise.

dritter Ordnung mit Rückkehrpunkt schon früher betrachtet wurden (p. 417). —

Zuerst werden wir fragen, wie eine Curve 3ter Ordnung überhaupt aussehen kann, ob wir der Gestalt nach mehrere projectivisch verschiedene Typen zu unterscheiden haben, oder ob, wie bei den Kegelschnitten, jede reelle Curve durch reelle Combination (oder auch nur durch continuirliche Verzerrung) in jede andere reelle Curve übergeführt werden kann. Dass wir die Coëfficienten der Curvengleichung für diese gestaltlichen Ueberlegungen reell annehmen müssen, braucht wohl kaum hervorgehoben zu werden. Eine ganz imaginäre Curve kann höchstens 9 reelle Punkte besitzen: die Schnittpunkte der reellen Curven $f = 0$ und $\varphi = 0$, wenn die imaginäre Curve in der Form

$$f + \sqrt{-1}\,\varphi = 0$$

darstellbar ist, vorausgesetzt, dass diese Schnittpunkte reell sind. Für die weiteren algebraischen Untersuchungen ist eine Annahme über die Realität der Coëfficienten jedoch nicht nothwendig.

Eine reelle Curve 3ter Ordnung wird nun von einer Geraden immer in 3 reellen Punkten, oder in 2 conjugirt imaginären und einem reellen getroffen; und zwar gibt es in der Ebene immer gerade Linien *beider* Arten. Geht man nämlich von einer Geraden mit drei reellen Schnittpunkten aus und dreht dieselbe um einen beliebigen ihrer Punkte, so wird sie nach dem Gesetze der Continuität allmählich in eine Lage kommen, wo zwei der Schnittpunkte zusammenfallen. Setzt man die Drehung über diese Grenzlage hinaus noch weiter fort, so müssen die beiden Punkte imaginär werden, denn sonst müsste der Berührungspunkt der Grenzlage ein Doppelpunkt der C_3 sein; die Existenz eines solchen aber schliessen wir vorläufig aus. So wird man in der That zu einer Geraden mit nur einem reellen Schnittpunkte geführt; von dieser ausgehend kann man dasselbe Verfahren rückwärts anwenden. — Insbesondere muss auch die unendlich ferne Gerade in einem reellen Punkte oder in drei solchen schneiden; bezeichnen wir daher die Tangente einer Curve in einem unendlich fernen Punkte als *Asymptote* derselben, so haben wir den Satz:

Jede reelle Curve dritter Ordnung hat mindestens eine reelle Asymptote und kann immer in eine Curve projicirt werden, welche nur eine reelle Asymptote hat.

Ausserdem haben wir für unsern nächsten Zweck noch den folgenden Satz zu beweisen:

Jede reelle Curve dritter Ordnung hat drei reelle Wendepunkte. Dass auch nicht mehr dieser Punkte reell sein können, werden wir erst später zeigen.

Wie eben bewiesen ist, können wir nämlich die Curve immer so annehmen, dass sie nur *einen* Zweig besitzt, welcher sich ins Unendliche erstreckt; und dieser muss zwischen den beiden Punkten A und B in Fig. 61, in denen er sich der Asymptote zu nähern beginnt, in continuirlichem Zuge verlaufen. Nun liegen die Punkte A und B immer auf *verschiedenen* Seiten der Asymptote (ebenso wie bei der Hyperbel), und auf beiden Seiten entfernt sich die Curve zunächst von dieser Linie. Sollen also beide Theile sich einander nähern, um einen zusammenhängenden Zug zu bilden, so müssen sie ihre Krümmung ändern, d. h. etwa in W_1 und W_2 zwei Wendepunkte bilden. Dadurch entstehen aber zwei verschieden gekrümmte Theile des Zweiges, deren Vereinigung nur in einem dritten Wendepunkte, etwa W_3, möglich ist; und damit ist unser Satz bewiesen.

Fig. 61.

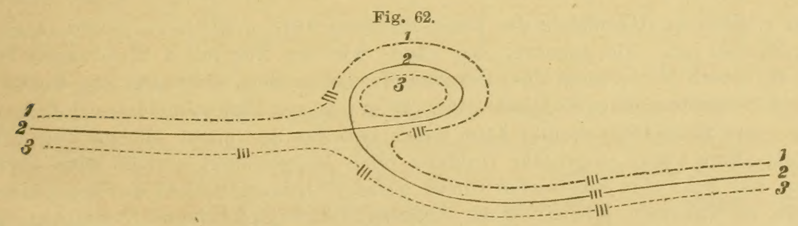
Der hier beschriebene Zweig der Curve wird von *jeder* reellen Geraden der Ebene in einem reellen Punkte geschnitten; die Curve kann also ausserdem nur noch einen Zweig enthalten, der von einer beliebigen Geraden in höchstens zwei reellen Punkten getroffen wird, d. h. ein Oval. Letzteres kann aber auch ganz fehlen. Wir erhalten so die folgenden beiden Typen für die möglichen Gestalten einer Curve dritter Ordnung:

1) *Eintheilige Curve*, bestehend aus einem einzigen Zuge mit 3 Wendepunkten (1 in Fig. 62).

2) *Zweitheilige Curve*, bestehend aus einem solchen Zuge und einem ausserhalb desselben gelegenen Oval (3 in Fig. 62).

Als Uebergangscurve zwischen beiden Arten kann man die Curve mit Doppelpunkt (2 in Fig. 62) auffassen (vgl. p. 343, f.); je nach

Fig. 62.



der Art und Weise, wie man sich diese aus einer allgemeinen Curve 3ter Ordnung entstanden denkt, wird man auf die ein- oder auf die zweitheilige Curve geführt, wie es Fig. 62 wohl hinreichend veranschaulicht. Und durch diesen Uebergangsprocess ist gleichzeitig der im Obigen noch fehlende Existenzbeweis für die beiden angeführten Typen geliefert.*)

*) Aehnliche Ueberlegungen gelten übrigens für Curven beliebiger Ordnung. Eine solche besteht aus verschiedenen, getrennt verlaufenden Zügen, die man

Die Gestalt einer Curve 3ter Ordnung kann jedoch von den in Fig. 62 dargestellten scheinbar sehr verschieden sein, indem das Oval durch die unendlich ferne Gerade in zwei Theile getrennt wird, indem ein Wendepunkt unendlich weit rückt, u. s. f.; und in der Weise erhält man je nach diesen Beziehungen zur unendlich fernen Geraden die mannigfach verschiedenen Arten von Curven dritter Ordnung, wie sie in den Eintheilungen von Newton, Cramer, Plücker, Möbius und Cayley*) angegeben werden. — Durch unsere Fundamentaleintheilung in ein- und zweitheilige Curven soll übrigens keineswegs gesagt sein, dass alle Curven einer Klasse durch Collineation in einander übergeführt werden. Dies ist im Gegentheile nicht möglich; denn eine Curve dritter Ordnung hat, wie wir später sehen werden, eine absolute Invariante; und diese muss für zwei Curven denselben Werth haben, wenn sie linear in einander transformirbar sein sollen.**) —

Wir stellen im Folgenden zunächst eine Reihe von Sätzen kurz zusammen, welche sich aus früheren allgemeineren Erörterungen unmittelbar ergeben, wenn man nur die betreffenden Zahlen specialisirt. Wir werden dadurch sogleich auf wichtige Sätze über die Lage der Wendepunkte geführt.

Die Curve 3ter Ordnung ($f \equiv a_x^3 = 0$) ist im Allgemeinen von der 6ten Klasse (vgl. p. 278 und 353), d. h. man kann von einem beliebigen Punkte y aus an dieselben 6 Tangenten legen. Die 6 Berührungspunkte der letzteren liegen auf dem Kegelschnitte $a_x^2 a_y = 0$, der ersten Polare von y (p. 309). Alle ersten Polaren bilden ein Kegelschnittnetz; unter ihnen gibt es einfach unendlich viele, die einen Doppelpunkt haben, d. h. in ein Linienpaar zerfallen. Der Ort

nach v. Staudt (Geometrie der Lage, Nürnberg 1847, p. 81) in *paare* und *unpaare* einzutheilen hat. Ein unpaarer Zug kann, wie der Zug mit 3 Wendungen bei den C_3, durch Verzerrung einer Geraden erzeugt werden; ein paarer Zug dagegen durch Verzerrung eines Kegelschnittes. Zwei unpaare Züge schneiden sich immer; eine Curve ohne Doppelpunkt kann daher *höchstens* nur einen solchen Zug enthalten. Eine Curve ungerader Ordnung ohne Doppelpunkt enthält auch *immer* einen der Art, eine allgemeine Curve gerader Ordnung besteht nur aus paaren Zügen. — Vgl. auch Klein: Math. Annalen, Bd. VI, p. 577 und Zeuthen: ib. Bd. VII, p. 410.

*) Vgl. darüber Salmon's higher plane curves.

**) Die C_3 hat nämlich zwei Invarianten S und T, derart, dass S^3 dividirt durch T^2 die absolute Invariante ist (vgl. unten). Die Bedingung für einen Doppelpunkt ist dann $S^3 - 6\ T^2 = 0$; der Unterscheidung zweier Typen von C_3 entspricht eine Trennung der Fälle, in denen der Werth von $S^3 - 6\ T^2 > $ oder < 0 ist, wie sich durch Betrachtung der 4 von einem Punkte des unpaaren Zuges ausgehenden Tangenten ergibt, wenn man die Sätze über die Realität der Wurzeln einer biquadratischen Gleichung benutzt (Clebsch: Theorie der binären Formen, p. 160 und 468); vgl. den Schluss des 5. Abschnittes dieser Abtheilung.

der Pole für diese Kegelschnitte ist eine Curve 3ter Ordnung (Determinante der zweiten Differentialquotienten), die Hesse'*sche Curve* (p. 312):

$$(abc)^2\, a_y b_y c_y = 0\,,$$

welche die Grundpunkte in den 9 Wendepunkten schneidet. Ihre Gleichung ergibt sich durch Elimination der x aus den drei Gleichungen:

$$\sum_k f_{ik} y_k = a_i a_x a_y = 0\,,$$

wo $f_{ik} = \frac{1}{6}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$, und wo die x_i die Coordinaten des zu y gehörigen Doppelpunktes sind. Diese Gleichungen ändern sich aber nicht, wenn man die x_i mit den y_i vertauscht; und somit folgt der Satz:

Für eine Curve dritter Ordnung sind Hesse'*sche und* Steiner'*sche Curve identisch.* Hieraus ergibt sich ferner (vgl. p. 365):

Die linearen Polaren eines Punktes y der Hesse'schen Curve berühren diese Curve in dem Doppelpunkte der ersten Polare von y.

Auf das Verhalten der von den Linien $\overline{xy}$ umhüllten Cayley'schen Curve werden wir erst später eingehen. —

Wir können auch leicht die Gleichung des Productes der 6 von y ausgehenden Tangenten angeben. Ist nämlich x ein Punkt einer solchen Tangente, so muss die Gleichung:

$$f(x + \lambda y) \equiv f + 3\lambda Df + 3\lambda^2 D^2 f + \lambda^3 D^3 f = 0\,,$$

wo $f = a_x^3$, $Df = a_x^2 a_y$, $D^2 f = a_x a_y^2$, $D^3 f = a_y^3$, für λ zwei gleiche Wurzeln ergeben; d. h. ihre Discriminante muss verschwinden. *Das Product der 6 von einem Punkte y ausgehenden Tangenten ist also gegeben durch* (vgl. p. 219):

$$(1)\quad 4\,(f \,.\, D^2 f - (Df)^2)\,(Df \,.\, D^3 f - (D^2 f)^2) - (f \,.\, D^3 f - Df \,.\, D^2 f)^2 = 0\,.$$

Rückt der Pol y in einen Punkt der Curve, so fallen zwei der von ihm ausgehenden Tangenten in die Tangente dieses Punktes, und die Grundcurve wird in ihm von seiner Polare berührt. In der That erhält die Gleichung (1) für $D^3 f = 0$ den Factor $(D^2 f)^2$; *von einem Punkte der Curve kann man also noch 4 Tangenten an dieselbe ziehen, gegeben durch:*

$$(2)\qquad 4f \,.\, D^2 f - 3\,(Df)^2 = 0\,.$$

Für diese Lage von y sind die Punkte der ersten Polare ebenso einfach geometrisch zu definiren, wie bei den Kegelschnitten. Es sei z der zweite Schnittpunkt eines von y ausgehenden Strahles mit der Polare, so dass $a_y a_z^2 = 0$. Sucht man dann die Schnittpunkte $y + \lambda z$ des Strahles mit der Grundcurve, so erhält man: $3 a_y^2 a_z + \lambda^2 a_z^3 = 0$, also eine reine quadratische Gleichung für λ, und es folgt:

Sucht man auf den durch einen Punkt y der Curve gelegten Strahlen zu y und den beiden anderen Schnittpunkten den vierten harmonischen Punkt, so beschreibt dieser die erste Polare von y. Es folgt dies auch unmittelbar aus unseren früheren allgemeinen Sätzen über Polarsysteme bei binären Formen (vgl. p. 205).

Ist endlich der Pol y einer der 9 Wendepunkte, so zerfällt die Polare, da y dann gleichzeitig auf der Hesse'schen Curve liegt; und zwar in die Wendetangente (da die Polare berühren muss*)) und in eine andere Linie, die dem Wendepunkte zugehörige „*harmonische Gerade.*" *Von einem Wendepunkte aus kann man daher nur noch 3 Tangenten an die Curve ziehen;* die Berührungspunkte derselben sind die 3 Schnittpunkte der ihm zugehörigen harmonischen Geraden mit der Curve. Nach dem vorigen Satze *ist ferner die harmonische Gerade selbst der Ort der vierten harmonischen Punkte zu dem Wendepunkte und den beiden andern Schnittpunkten der durch diesen gehenden Strahlen mit der Curve.*

Um nun die gegenseitige Lage der Wendepunkte näher zu discutiren, knüpfen wir an unser Fundamentaltheorem über Schnittpunktsysteme an, welches für Curven 3ter Ordnung aussagt, dass alle Curven der Art, welche 8 Punkte gemein haben, auch durch einen bestimmten 9ten Punkt gehen (vgl. p. 428), und welches uns früher einen einfachen Beweis für den Pascal'schen Satz lieferte. Wir machen hier eine andere Anwendung desselben Theorems. Auf der vorliegenden Curve nehmen wir drei Punkte A_1, A_2, A_3 auf der Geraden a, ebenso drei Punkte B_1, B_2, B_3 auf einer anderen Geraden b und ziehen drei andere Linien, welche je einen Punkt A mit einem Punkte B verbinden, also z. B. die Linien $\overline{A_1 B_1}$, $\overline{A_2 B_2}$, $\overline{A_3 B_3}$. Dieselben mögen bez. mit d_1, d_2, d_3 bezeichnet werden und unsere Curve bez. noch in den Punkten C_1, C_2, C_3 schneiden. Wir behaupten, dass diese drei Punkte C ebenfalls auf einer Geraden c liegen. Wir haben nämlich drei Curven dritter Ordnung:

1) die gegebene Curve
2) die Linien d_1, d_2, d_3
3) die Linien a, b, c,

welche jedenfalls 8 Punkte gemein haben, nämlich A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, und folglich auch alle den neunten Punkt C_3 enthalten, q. e. d.

Verbindet man also je einen von den drei Schnittpunkten einer Gera-

*) Diese Berührung kann in der That keine uneigentliche sein, d. h. nicht etwa dadurch entstehen, dass der Doppelpunkt der zerfallenden Polare im Wendepunkte liegt; denn sonst würde man auch von dem Wendepunkte aus noch 4 Tangenten an die C_3 ziehen können, während doch offenbar eine von diesen zu der Wendetangente benachbart liegen muss.

den mit einer Curve dritter Ordnung mit je einem von den Schnittpunkten einer anderen Geraden, so schneiden diese Verbindungslinien die Curve noch in drei Punkten, welche wieder in einer Geraden liegen.

In dieser Weise kann man unendlich viele Gitter von je sechs Geraden construiren, von deren Ecken immer 9 auf der Curve 3ter Ordnung liegen. Durch besondere Wahl derselben werden wir nun wieder auf die Wendepunkte geführt. Lassen wir zunächst die Geraden a und b einander unendlich nahe rücken, so dass ein Punkt A_i zu B_i unendlich benachbart liegt. Alsdann sind die Linien d_1, d_2, d_3 die Tangenten der Curve in den Punkten A_1, A_2, A_3; und wir haben den Satz:

Liegen die Berührungspunkte dreier Tangenten einer Curve dritter Ordnung in gerader Linie, so liegen ihre drei weiteren Schnittpunkte ebenfalls in gerader Linie.

Gehen ferner die beiden benachbarten Geraden a und b durch zwei Wendepunkte, sind also A_1 $(= B_1)$ und A_2 $(= B_2)$ zwei Wendepunkte der Curve, so sind die Linien d_1, d_2 ihre Wendetangenten. Die weiteren Schnittpunkte C_1 und C_2 der letzteren fallen dann aber bez. mit A_1, A_2 zusammen, d. h. die Linie c fällt auch in die Linie a. Da nun die Punkte A_3, B_3, C_3 auch auf einer Geraden liegen müssen, hier aber einander unendlich nahe gerückt sind, so bilden sie auch einen Wendepunkt unserer Curve. Also:

*Eine gerade Linie, welche zwei Wendepunkte verbindet, geht immer noch durch einen dritten Wendepunkt.**)

Die 9 Wendepunkte haben also eine besondere Lage zu einander. Durch jeden gehen 4 „*Wendepunktslinien*“, von denen jede je 2 der anderen Wendepunkte enthält. Solcher Wendepunktslinien muss es also, da bei dieser Anordnung jede Linie dreimal auftritt, $\frac{1}{3} 9 . 4 = 12$ geben. — Wir bezeichnen im Folgenden die Wendepunkte durch die Zahlen

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

und durch L_{ikh} eine Wendepunktslinie, welche die Wendepunkte i, k, h enthält. Es sind sonach 1, 2, 3 z. B. die drei auf der Linie L_{123} liegenden Punkte. Durch jeden von ihnen gehen dann noch 3 Linien ausser L_{123}, so dass wir zusammen 10 Linien haben. Es gibt also noch zwei weitere Wendepunktslinien, welche die Punkte 1, 2, 3 nicht enthalten. Nehmen wir nun an, dass 4, 5, 6 auf einer Geraden L_{456} liegen, so muss es eine 12te Linie L_{789} geben, welche die Punkte 7, 8, 9 enthält. Eine solche Combination von drei Linien wie L_{123}, L_{456}, L_{789}, welche zusammen alle neun Wendepunkte enthalten, nennt

---

*) Vgl. Maclaurin a. a. O. — Einen rein algebraischen Beweis dieses Satzes werden wir weiter unten kennen lernen.

man ein *Wendepunktsdreieck.* Die Zahl dieser Dreiecke bestimmt sich, wie folgt: Durch jeden Wendepunkt gehen 4 Wendepunktslinien; jede muss Seite eines und nur eines Dreiecks sein. Da aber der betrachtete Wendepunkt in jedem Dreiecke vorkommen muss, so gibt es überhaupt nur 4 Wendepunktsdreiecke. Wir können somit den Satz aussprechen:

Die 9 Wendepunkte liegen zu dreien auf 12 Geraden, und diese Geraden ordnen sich in vier Gruppen zu drei (Wendepunktsdreiecke), so dass jede aus 3 Linien bestehende Gruppe sämmtliche 9 Wendepunkte enthält.

Dieser Satz bildet den Kern für die algebraische Behandlung des Wendepunktsproblems, welche wir später durchführen werden; wir skizziren hier nur kurz den dabei zu befolgenden Gedankengang. Aus dieser Gruppirung der 9 Punkte folgt nämlich, dass die Gleichung 9ten Grades, welche sie bestimmt, einen ganz besonderen Charakter hat, dass sie durch Wurzelziehen lösbar ist. Sie muss zuerst auf eine Gleichung vierten Grades führen, von welcher die 4 Wendepunktsdreiecke abhängen; zwei der letzteren je in ihre 3 Seiten zu zerlegen, erfordert dann nur je eine Gleichung 3ten Grades; die Schnittpunkte der einzelnen Seiten verschiedener Dreiecke sind dann die Wendepunkte. *Zur Bestimmung der letzteren hätte man also nach dieser vorläufigen Abzählung ausser linearen Gleichungen nur eine biquadratische und zwei cubische Gleichungen zu lösen.* Um die biquadratische Gleichung selbst aufzustellen, hat man noch folgende geometrische Ueberlegungen nöthig.

Die gegebene Curve $f = 0$ und ihre Hesse'sche $\Delta = 0$ bestimmen den Büschel $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$, dessen Grundpunkte die 9 Wendepunkte sind. Unter den Curven dieses Büschels müssen auch die 4 Wendepunktsdreiecke enthalten sein, denn jedes bildet eine zerfallende Curve 3ter Ordnung, welche durch die 9 Wendepunkte geht. Wir haben also eine biquadratische Gleichung für $\frac{\varkappa}{\lambda}$ zu bilden, welche diese vier besonderen Curven des Büschels $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ bestimmt. Durch einen Wendepunkt gehen nun vier Strahlen, welche je zwei weitere Wendepunkte enthalten. Zwei dieser Linien können wir dazu benutzen, um die harmonische Gerade des Wendepunktes zu construiren, indem wir auf ihnen die vierten harmonischen Punkte in der angegebenen Weise suchen; die Verbindungslinie der letzteren ist die gesuchte harmonische Gerade. Diese Construction hängt nur von den Wendepunkten, nicht von der gegebenen C_3 ab; geht also irgend eine C_3 durch die 9 Wendepunkte, so liegen immer die zu einem derselben in Bezug auf diese C_3 gehörigen vierten harmonischen Punkte in einer Geraden, d. h. die Polare des Punktes zerfällt. Letzteres tritt aber nur für die Wendepunkte ein; und somit haben wir den wichtigen Satz:

Sind die 9 Fundamentalpunkte eines Büschels von Curven dritter Ordnung Wendepunkte für **eine** *Curve desselben, so sind sie es für* **alle** *Curven des Büschels;**) oder:

Alle Curven des Büschels $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ haben dieselben 9 Wendepunkte. (Die Wendetangenten dagegen sind natürlich verschieden.)

Insbesondere folgt hieraus, dass die Hesse'sche Curve von $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ wieder eine Curve des Büschels ist. Bezeichnen wir ihre Gleichung durch $\Delta_{\varkappa\lambda} = 0$, so haben wir also:

$$\Delta_{\varkappa\lambda} = Kf + L\Delta, \tag{3}$$

wo K und L vom dritten Grade in $\varkappa$, λ sind, da die Hesse'sche Form immer vom dritten Grade in den Coëfficienten der Grundform ist. Die wirkliche Bestimmung dieser Functionen K, L geschieht mit Hülfe der Theorie der ternären cubischen Formen, auf welche wir später eingehen werden.

Unter den Curven des „*syzygetischen*" Büschels $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ sind nun, wie schon erwähnt, auch die vier Wendepunktsdreiecke enthalten. Dieselben können wir dadurch charakterisiren, dass ihre Hesse'sche Curve mit der Grundcurve zusammenfallen muss; denn auf einer aus drei Geraden bestehenden Curve ist jeder Punkt ein Wendepunkt, indem in jedem drei successive Punkte auf gerader Linie liegen. Soll also die Curve $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ in drei Gerade zerfallen, so muss von den Gleichungen:

$$\varkappa f + \lambda \Delta = 0, \quad Kf + L\Delta = 0$$

die eine eine Folge der andern sein. Durch Elimination der x_i ergibt sich daher als *die Gleichung vierten Grades, welche die Wendepunktsdreiecke bestimmt:*

$$\varkappa L - \lambda K = 0. \tag{4}$$

Aus der Vertheilung der Wendepunkte auf die Seiten dieser 4 Dreiecke können wir ferner Schlüsse auf die Realität derselben ziehen. Wir stellen zu dem Zwecke die Lage der 9 Punkte auf den 12 Seiten in einem Schema übersichtlich zusammen. Dabei benutzen wir den Satz: *Wenn durch einen Wendepunkt, etwa 1, zwei Wendepunktslinien, etwa L_{123} und L_{147} gehen, so schneiden sich die Verbindungslinien von 2, 3 mit je einem der Punkte 4, 7 niemals in einem Wendepunkte.* Denn wenn sich $\overline{24}$ und $\overline{37}$ in 6 schnitten und etwa 5 der Punkt wäre, welchen $\overline{16}$ noch enthält, so müssten 8, 9 (als die allein übrig bleibenden) sowohl mit 1, als mit 6 in gerader Linie liegen, was nicht möglich ist. Hiernach werden wir nun sogleich folgendes Schema

*) Vgl. hier und im Folgenden Hesse: a. a. O.

der auf den 12 Wendepunktslinien liegenden Tripel der 9 Punkte aufstellen:

	1) 1, 2, 3	2) 1, 4, 7	3) 1, 5, 9	4) 1, 6, 8
(5)	5) 4, 5, 6	6) 2, 5, 8	7) 2, 6, 7	8) 2, 4, 9
	9) 7, 8, 9	10) 3, 6, 9	11) 3, 4, 8	12) 3, 5, 7.

Wir können nämlich 1), 2), 3), 4) ganz beliebig wählen, da durch 1 jedenfalls vier Wendepunktslinien gehen. Ferner können wir, wie schon früher gezeigt wurde, annehmen, dass 4, 5, 6 und 7, 8, 9 je auf einer Geraden liegen, wodurch dann 5) und 9) festgelegt sind. Den Punkt 2 können wir dann noch mit 4, 5 und 6 verbinden; und weil die Zahlen 24, 25, 26 in 1), 2), 3), 4), 5), 9) noch nicht vereinigt vorkommen, dagegen 4 mit 7 schon in 2), 5 mit 9 in 3), 6 mit 8 in 4) vereinigt ist, so haben wir für jedes der drei Paare 24, 25, 26 nur noch die Wahl zwischen je zweien der Zahlen 7, 8, 9; andere Zahlen können dagegen nach obigem Satze nicht hinzugefügt werden. Ebenso erkennt man endlich, dass nach diesen Bestimmungen die von 3 ausgehenden Linien nur die in 10), 11), 12) bezeichneten Punkte enthalten können. In dem so entstandenen Schema bilden gleichzeitig je drei unter einander stehende Gruppen ein Wendepunktsdreieck; denn in ihnen kommt jedesmal jede der Zahlen 1, 2 . . . 9 nur einmal vor. Wir können das Gesetz dieser Gruppirung noch übersichtlicher in folgender Weise darstellen. Wir schreiben die 9 Zahlen in Determinantenform:

$$(6)\qquad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9. \end{matrix}$$

Bezeichnen wir nun die Dreiecke in der Reihenfolge, wie sie in obigem Schema (5) neben einander stehen, mit I, II, III, IV, so dass z. B. III aus den Linien L_{159}, L_{267}, L_{348} besteht, so erkennt man sofort die Richtigkeit der folgenden Regel.

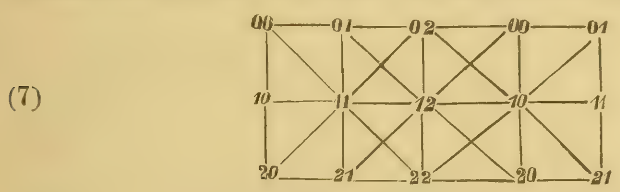
Es liegen immer auf gerader Linie:

in I je drei Punkte einer Horizontalreihe von (6),
„ II „ „ „ „ Verticalreihe von (6),
„ III „ „ „ , welche in (6) als Determinante ein positives Glied geben,
„ IV „ „ „ , welche in der Weise ein negatives Glied ergeben.

Aeusserlich noch einfacher gestaltet sich diese Gruppirung, wenn wir jeden Wendepunkt (wie ein Element einer Determinante) mit zwei Zahlen bezeichnen, also 00 für 1, 01 für 2 etc. schreiben. Wir haben dann die 9 Wendepunkte:

00	01	02
10	11	12
20	21	22,

und die einfache Regel: *Es liegen immer und nur drei solche Punkte in einer Geraden, bei denen sowohl die Summe der ersten als die der zweiten Zahlen durch 3 theilbar ist.* Diese Darstellung erscheint hier nur äusserlich bequemer; wir werden jedoch später mit Hülfe der Theorie der elliptischen Functionen in der Lage sein, den Zahlenpaaren 00, 01 etc. eine reale Bedeutung beizulegen, wodurch wir dann direct auf den zuletzt ausgesprochenen Satz geführt werden. Um so mehr werden wir uns im Folgenden dieser Schreibweise bedienen. Bezeichnen wir also durch Verbindungsstriche die Wendepunktslinien, und zwar durch parallele Striche solche Linien, welche ein Wendepunktsdreieck bilden, so haben wir das Schema (vgl. p. 15):

(7) 

oder man hat die folgenden Linien und Dreiecke:

I	II	III	IV
00, 01, 02	00, 10, 20	00, 11, 22	00, 12, 21
10, 11, 12	01, 11, 21	01, 12, 20	01, 10, 22
20, 21, 22	02, 12, 22	02, 10, 21	02, 11, 20.

Man kann dies auch so aussprechen, dass in I je drei Punkte mit constantem ersten Index auf einer Geraden liegen, in II je drei mit constantem zweiten Index, in III je drei, bei denen jeder Index von Punkt zu Punkt um 1 wächst, in IV je drei, bei denen der eine Index von Punkt zu Punkt um 1 abnimmt, der andere aber um 1 wächst.

Eins der so gewonnenen Dreiecke, z. B. das erste, legen wir den folgenden Betrachtungen zu Grunde und bezeichnen die Ecken desselben durch A_0, A_1, A_2, die gegenüberliegenden Seiten durch a_0, a_1, a_2, so dass auf a_i die Punkte $i0$, $i1$, $i2$ liegen. Betrachten wir etwa die beiden Punktreihen:

$$a_2)\quad A_0,\ 20,\ 21,\ 22,\ A_1,$$
$$a_1)\quad A_0,\ 10,\ 12,\ 11,\ A_2,$$

so folgt ans dem Vorstehenden, dass sie projectivisch liegen, denn je zwei unter einander stehende Punkte liegen mit 00 auf gerader Linie. Statt 00 können wir aber auch 01 oder 02 als Projectionscentrum wählen, wenn wir die Reihe a_1 nur bez. in folgender Weise ordnen:

a_1') A_0, 12, 11, 10, A_2, und:

a_1'') A_0, 11, 10, 12, A_2.

Die drei Punktreihen a_1, a_1', a_1'' sind also unter einander projectivisch, da sie alle zu a_2 projectivisch sind; sie unterscheiden sich aber nur durch cyclische Vertauschung der Elemente 10, 12, 11 und sind daher zu einander cyclisch-projectivisch (vgl. p. 201). Dasselbe gilt für die andern Dreiecke und Linien, so dass wir den Satz aussprechen können:

*Fasst man die drei auf einer Wendepunktslinie liegenden Wendepunkte als ein cyclisch-projectivisches System auf, so werden die beiden festen Grundelemente durch die auf der Linie liegenden Ecken des zugehörigen Wendepunktsdreiecks gegeben; und zwar kann man auf 36 Arten zwei Punktreihen so wählen, dass sie perspectivisch liegen, und dass ihr Projectionscentrum wieder ein Wendepunkt ist**), oder mit anderen Worten (vgl. p. 225):

Fasst man die drei auf einer Geraden liegenden Wendepunkte als Verschwindungspunkte einer binären cubischen Form auf, so werden die Punkte ihrer Hesse*'schen Form durch die Ecken des zugehörigen Wendepunktsdreiecks dargestellt.* Jede solche Ecke bildet also mit den drei Punkten ein äquianharmonisches Doppelverhältniss.

Hieraus folgt schon, dass die beiden Ecken conjugirt imaginär sein müssen, wenn die drei Wendepunkte reell sind; denn vier Punkte mit äquianharmonischem Doppelverhältnisse können niemals sämmtlich reell sein. Sollen dagegen die beiden Ecken reell sein, so müssen zwei der drei Wendepunkte conjugirt imaginär werden. Dass in unserm Falle nun nicht alle 9 Wendepunkte reell sein können, erkennt man auch daraus, dass zwei projectivisch liegende Punktreihen, wie a_1 und a_2, nur ein reelles Projectionscentrum ergeben können. Des Näheren gestaltet sich die Vertheilung von reellen und imaginären Punkten in folgender Weise.

Schon früher haben wir gesehen, dass mindestens immer *drei reelle Wendepunkte* vorhanden sein müssen. Diese drei liegen alsdann auf einer Geraden, denn die reelle Verbindungslinie von zweien derselben muss die Curve in einem dritten *reellen* Punkte treffen; und dies ist dann nach dem obigen Satze ein Wendepunkt. Die zwei auf dieser Wendepunktslinie liegenden Dreiecksecken sind dann nothwendig conjugirt imaginär, und ebenso die beiden durch sie gehenden Linien, welche mit jener reellen Geraden ein Wendepunktsdreieck

---

*) Man schliesst aus diesen Verhältnissen leicht, dass jede Curve dritter Ordnung *18 lineare Transformationen* in sich selbst zulässt; und diese Transformationen führen zugleich alle Curven des Büschels $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ in sich über. Vgl. darüber Klein: Math. Annalen, Bd. 4, p. 353; Harnack: ib. Bd. 9, p. 42 ff.

bilden. Also sind alle die andern Wendepunkte imaginär, und zwar in dem betrachteten Dreiecke die Wendepunkte einer Seite conjugirt zu denen der andern. Verbindet man nun je zwei conjugirte Punkte, so entsteht ein zweites Dreieck, dessen Seiten sämmtlich reell sind, und wo auf jeder Seite ein reeller Wendepunkt liegt. Die beiden andern Dreiecke sind ganz imaginär und einander conjugirt, denn sonst müsste es mehr, als drei reelle Wendepunkte geben, was nicht möglich ist. *Reell sind also immer: 3 Wendepunkte, 4 Wendepunktslinien, 1 Wendepunktsdreieck, 4 Ecken von Wendepunktsdreiecken.**) Letzteres sind die drei Ecken des reellen Dreiecks, und die Ecke, welche der Verbindungslinie der drei reellen Wendepunkte in dem zugehörigen Dreiecke gegenüberliegt.

Diese Verhältnisse lassen sich algebraisch einfach darstellen, wenn wir eines der Wendepunktsdreiecke, etwa das reelle, als Coordinatendreieck einführen, d. h. uns einer (reell herstellbaren) *kanonischen Form für die Gleichung der Curve dritter Ordnung* bedienen. Während eine solche vereinfachte Gleichungsform bei den Kegelschnitten auf dreifach unendlich viele Weisen möglich war, gibt es für sie bei Curven dritter Ordnung nur vier verschiedene Fundamentaldreiecke. Bei höheren Curven jedoch wird die durch eine kanonische Form veranlasste Vereinfachung verhältnissmässig immer geringer; denn eine lineare Transformation enthält 8 Constante, und man kann diese so bestimmen, dass 8 Constante der Curve fortfallen, also in der kanonischen Form nur noch $\frac{1}{2} n (n+3) - 8$ Constante vorkommen. Aber diese Zahl ist schon für $n = 4$ gleich 6, die erzielte Vereinfachung daher nicht mehr so bedeutend. Bei Curven dritter Ordnung muss hiernach eine kanonische Form möglich sein, in der nur noch *eine absolute Constante* vorkommt; und diese Constante hängt mit der einen absoluten Invariante der Curve, die wir später aufstellen werden, eng zusammen. In der That ergibt sich eine kanonische Form der Art durch die folgenden Ueberlegungen.

Ist z. B. durch $y_1 = 0$ eine Wendepunktslinie dargestellt, so haben wir auf ihr eine binäre Coordinatenbestimmung $y_2 : y_3$, deren Grundpunkte mit den auf $y_1 = 0$ gelegenen Ecken des Coordinatendreiecks zusammenfallen. Diese Ecken sollen nun — so nehmen wir an — Ecken eines Wendepunktsdreiecks sein, also nach dem soeben bewiesenen Satze die Hesse'sche Form der binären cubischen Form darstellen, welche durch die drei auf $y_1 = 0$ gelegenen Wendepunkte gegeben ist. Die Gleichung der letzteren in dem binären Gebiete, bezogen auf die Grundpunkte der Hesse'schen Form $y_2 = 0$, $y_3 = 0$

---

*) Die Sätze über Gruppirung und Realität der Wendepunkte sind zuerst von Plücker entwickelt: System der analytischen Geometrie, Berlin 1835, p. 283 ff.

kann aber nach unsern früheren Untersuchungen in der Gestalt $y_2^3 + y_3^3 = 0$*) vorausgesetzt werden; und in diese Gleichung muss also die Curvengleichung für $y_1 = 0$ übergehen. Ebenso können von den Gliedern derselben für $y_2 = 0$ und $y_3 = 0$ bez. nur die Ausdrücke

$$y_1^3 + y_3^3 \quad \text{und} \quad y_1^3 + y_2^3$$

stehen bleiben. *Die Gleichung der Curve dritter Ordnung, bezogen auf ein Wendepunktsdreieck ist daher von der Form:*

$$(8) \qquad f = a\,(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3) + 6\,b\,y_1 y_2 y_3 = 0\,,$$

wo dann $\frac{b}{a}$ eine für die Curve charakteristische absolute Constante ist, deren geometrische Bedeutung wir später erkennen werden. Diese Gleichungsform tritt nicht nur *immer* beim Wendepunktsdreieck ein, sondern kommt auch *ausschliesslich* demselben zu; denn wir können leicht zeigen, dass eine Curve von der Gleichung (8) ihre Wendepunkte immer auf den Seiten des Coordinatendreiecks hat. Zu dem Zwecke bilden wir die Gleichung der Hesse'schen Curve; dieselbe ist:

$$\frac{1}{6}\,\Delta = \begin{vmatrix} a y_1 & b y_3 & b y_2 \\ b y_3 & a y_2 & b y_1 \\ b y_2 & b y_1 & a y_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a^3 + 2\,b^3)\,y_1 y_2 y_3 - a b^2\,(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3) = 0\,,$$

oder wenn wir $\alpha = -\,6\,ab^2$, $\beta = a^3 + 2\,b^3$ setzen:

$$(9) \qquad \Delta = \alpha\,(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3) + 6\,\beta y_1 y_2 y_3 = 0\,,$$

also von derselben Form wie die Curvengleichung. Für die Schnittpunkte der Curven (8) und (9) haben wir also entweder

$$(10) \qquad a\beta - b\alpha = 0\,,$$

oder:

$$(11) \qquad y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = 0 \quad \text{und} \quad y_1 y_2 y_3 = 0\,.$$

Die letzte Gleichung sagt aber unmittelbar aus, dass die Schnittpunkte von (8) und (9), d. i. die Wendepunkte auf den Seiten $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ liegen.

Die Gleichung (10) wird im Allgemeinen nicht erfüllt sein; sie gibt vielmehr für $a : b$ die Gleichung ($\varepsilon^3 = 1$):

$$0 = a^4 + 8\,ab^3 = a\,(a + 2\,b)\,(a + 2\,\varepsilon b)\,(a + 2\,\varepsilon^2 b)\,.$$

Wenn einer dieser vier Factoren verschwindet, ist die Curve immer ein Dreieck, hat also unendlich viele Wendepunkte und kommt für

---

*) Die auf p. 224 benutzte Form $y_2^3 - y_3^3 = 0$ geht offenbar in diese über, wenn man nur $-\,y_3$ statt y_3 schreibt.

uns jetzt nicht in Betracht. Für $a = 0$ gibt nämlich die Gleichung (8) direct $y_1 y_2 y_3 = 0$, und für $a = -2\varepsilon^i b$ oder $b = -\frac{1}{2} a \varepsilon^{2i}$ geht sie über in:

$$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 - 3\varepsilon^{2i} y_1 y_2 y_3 = (y_1 + y_2 + y_3\varepsilon^{2i})(y_1 + y_2\varepsilon + y_3\varepsilon^{2i+2})(y_1 + y_2\varepsilon^2 + y_3\varepsilon^{2i+1}) = 0.$$

Mit Hülfe obiger kanonischen Form beweisen wir auch leicht wieder den Hesse'schen Satz, dass alle Curven des Büschels $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ die Wendepunkte gemeinsam haben. Die Hesse'sche Curve der Curve

$$\varkappa f + \lambda \Delta \equiv (\varkappa a + \lambda \alpha)(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3) + 6(\varkappa b + \lambda \beta) y_1 y_2 y_3 = 0$$

ist nämlich gegeben durch

$$\Delta_{\varkappa\lambda} \equiv A (y_1^3 + y_2^3 + y_3^3) + 6 B y_1 y_2 y_3 = 0, \tag{12}$$

wo A, B von $\varkappa a + \lambda \alpha$, $\varkappa b + \lambda \beta$ ebenso abhängen, wie α, β von a, b, wo also:

$$A = -6(\varkappa a + \lambda \alpha)(\varkappa b + \lambda \beta)^2$$
$$B = (\varkappa a + \lambda \alpha)^3 + 2(\varkappa b + \lambda \beta)^3;$$

und da $y_1^3 + y_2^3 + y_3^3$ und $y_1 y_2 y_3$ sich durch f und Δ ausdrücken lassen, so folgt wieder die Gleichung (3): $\Delta_{\varkappa\lambda} = Kf + L\Delta$, was den Hesse'schen Satz involvirt.

Die Coordinaten der 9 Wendepunkte, sowie die Gleichungen der 12 Wendepunktslinien können wir nun auch leicht angeben. Nehmen wir an, die Linien $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ seien reell, so haben wir für $y_1 = 0$:

$$y_2^2 + y_3^3 = 0,$$

also, wenn $y_2 = 1$ gesetzt wird: $y_3 = -1, -\varepsilon$ oder $-\varepsilon^2$; *und so findet man für die Coordinaten der 9 Wendepunkte die Tafel* ($\varepsilon^3 = 1$):

Auf $y_1 = 0$:	$0,$	$1,$	$-1;$	$0,$	$1,$	$-\varepsilon;$	$0,$	$1,$	$-\varepsilon^2;$
„ $y_2 = 0$:	$-\varepsilon^2,$	$0,$	$1;$	$-1,$	$0,$	$1;$	$-\varepsilon,$	$0,$	$1;$
„ $y_3 = 0$:	$1,$	$-\varepsilon,$	$0;$	$1,$	$-\varepsilon^2,$	$0;$	$1,$	$-1,$	$0.$

Und in dieser Anordnung stimmt die Tafel mit dem früheren Schema (7) vollkommen überein. Je dreimal drei neben oder unter einander stehende Punkte geben ein Dreieck, ebenso je dreimal drei Punkte eines aus dem Schema abgeleiteten positiven oder negativen Determinanten-Gliedes. Man überzeugt sich davon leicht direct, da die aus den Coordinaten je dreier solcher Punkte zu bildende Determinante verschwindet, dieselben also auf gerader Linie liegen. — Für die *Producte der Seiten der 4 Wendepunktsdreiecke* haben wir die Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & y_1 y_2 y_3 = 0, \\ \text{II.} & (y_1 + y_2 + y_3)(y_1 + \varepsilon y_2 + \varepsilon^2 y_3)(y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon y_3) = 0, \\ \text{III.} & (y_1 + \varepsilon y_2 + y_3)(y_1 + y_2 + \varepsilon y_3)(y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^2 y_3) = 0, \\ \text{IV.} & (y_1 + \varepsilon^2 y_2 + y_3)(y_1 + y_2 + \varepsilon^2 y_3)(y_1 + \varepsilon y_2 + \varepsilon y_3) = 0. \end{array}$$

Hier entsteht II aus den positiven Determinantengliedern der Tafel, es enthält eine reelle und zwei conjugirt imaginäre Seiten; III entsteht aus den Horizontalreihen und ist ganz imaginär; IV entsteht aus den negativen Determinantengliedern und ist zu III, Seite für Seite, conjugirt imaginär.

Ganz analog gestalten sich natürlich diese Verhältnisse, wenn man statt des reellen Dreiecks eines der imaginären zu Grunde legt. *Den Uebergang von einem Wendepunktsdreiecke zu einem andern* kann man in folgender Weise bewerkstelligen. Es sei die Curvengleichung $f = 0$ in der Form (8) gegeben, bezogen auf das Dreieck I ($y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$), dann setzen wir, um sie statt dessen z. B. auf das Dreieck II zu beziehen:

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 + y_2 + y_3 \\ z_2 &= y_1 + \varepsilon y_2 + \varepsilon^2 y_3 \\ z_3 &= y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon y_3 \end{aligned}$$

und zur Abkürzung:

$$\varphi = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3, \quad \psi = y_1 y_2 y_3;$$

dann wird:

$$\begin{aligned} \varphi' = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 &= 3(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3) + 18 y_1 y_2 y_3 \\ &= 3\varphi + 18\psi \\ \psi' = z_1 z_2 z_3 &= y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + 3(\varepsilon + \varepsilon^2) y_1 y_2 y_3 \\ &= \varphi - 3\psi, \end{aligned}$$

also:
$$9\varphi = \varphi' + 6\psi', \quad 27\psi = \varphi' - 3\psi'$$

und die gesuchte Gleichung der Curve, bezogen auf das neue Dreieck:

$$9f \equiv 9a\varphi + 54b\psi \equiv (a + 2b)\varphi' + 6(a - b)\psi' = 0.$$

Zur wirklichen Lösung des Wendepunktsproblems bleibt uns nach diesen ausführlichen Erörterungen über die Gruppirung der neun Punkte übrig, die Transformationsformeln aufzustellen, mittelst deren eine beliebige Curve dritter Ordnung in die als möglich erkannte kanonische Form gebracht, d. h. auf ein Wendepunktsdreieck bezogen werden kann. Die Frage nach der Bestimmung der Wendepunkte ist also ebenso auf ein Transformationsproblem zurückgeführt wie die früher behandelte der Aufsuchung der gemeinsamen Punkte zweier Kegelschnitte. Die biquadratische Gleichung (4) vertritt dabei die für letzteres Problem benutzte cubische Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ (vgl. p. 122 ff.).

II. Die zugehörigen Curven dritter Klasse.

Wir knüpfen wieder an die Betrachtung der zu den 9 Wendepunkten gehörenden 9 harmonischen Geraden an. Man kann eine solche, wie schon erwähnt, construiren, indem man auf den durch den zugehörigen Wendepunkt gehenden Wendepunktslinien die vierten harmonischen Punkte zu den beiden andern Wendepunkten der Linie sucht. Zufolge unserer Untersuchungen über binäre cubische Formen (vgl. p. 225) haben wir den Satz:

Fasst man die drei auf einer Geraden liegenden Wendepunkte als Grundpunkte einer binären cubischen Form auf, so bilden die Schnittpunkte der zugehörigen drei harmonischen Geraden mit der Wendepunktslinie die Grundpunkte der Covariante Q. Und da die binäre quadratische Covariante Δ durch die auf der Linie gelegenen Ecken des zugehörigen Wendepunktsdreiecks dargestellt wird (vgl p. 508), so folgt weiter:

Der Schnittpunkt der zu einem Wendepunkte gehörigen harmonischen Geraden mit einer durch ihn gehenden Wendepunktslinie ist der vierte harmonische Punkt zu den beiden auf dieser Linie liegenden Ecken des zugehörigen Wendepunktsdreiecks und dem Wendepunkte.

Diesen Satz können wir auch leicht direct einsehen: Die 9 harmonischen Geraden sind für alle Curven des Büschels $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ dieselben. Als Theile der Polaren der Wendepunkte in Bezug auf alle diese Curven erhält man sie daher auch, wenn man als Curve dritter Ordnung ein Wendepunktsdreieck zu Grunde legt und die Polare eines Wendepunktes in Bezug auf dasselbe construirt. Letztere besteht dann aber aus der durch den Wendepunkt gehenden Seite des Dreiecks und aus der Polare in Bezug auf die beiden andern Seiten desselben. Die harmonische Gerade entsteht also einfach, wenn man den betreffenden Wendepunkt mit der gegenüberliegenden Ecke eines der vier durch ihn gehenden Wendepunktsdreiecke verbindet und zu dieser Linie und zu den in jener Ecke zusammenlaufenden Seiten des Dreiecks den vierten harmonischen Strahl sucht. Die harmonischen Geraden gehen hiernach jede durch eine Ecke jedes Wendepunktsdreiecks:

Die 12 Ecken der Wendepunktsdreiecke liegen zu 4 auf den 9 harmonischen Geraden. Und ferner erkennt man aus der Construction sofort den Satz:

Die harmonischen Geraden, welche zu drei auf einer Wendepunktslinie gelegenen Wendepunkten gehören, schneiden sich in einer Dreiecksecke, welche dadurch jener Wendepunktslinie entspricht: Den Seiten eines Dreiecks entsprechen die gegenüberliegenden Ecken.

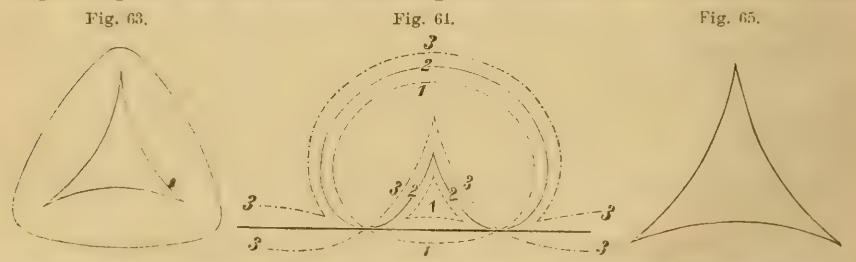
Die harmonischen Geraden bilden also hinsichtlich ihrer Gruppirung ein den Wendepunkten dualistisch genau entgegengesetztes System; sie müssen daher ebenso die gemeinsamen Rückkehrtangenten einer Schaar von Curven dritter Klasse sein, wie die Wendepunkte allen Curven eines Büschels von Curven dritter Ordnung gemeinsam sind. Die Theorie der Curven dritter Ordnung ist daher unzertrennlich von derjenigen der Curven dritter Klasse; die eine führt nothwendig auf die andere. Ehe wir auf die erwähnte Schaar mit gemeinsamen Rückkehrtangenten eingehen, wollen wir die bisher erhaltenen Sätze über Curven dritter Ordnung dualistisch auf Curven dritter Klasse übertragen und kurz zusammenstellen.

Was zunächst die Gestalt der letzteren anbetrifft, so können wir dieselbe erhalten, indem wir etwa die polaren Gegenbilder der in Fig. 62 dargestellten Curven in Bezug auf einen beliebigen Kegelschnitt construiren. Aus einem Ovale wird dabei wiederum ein Oval, wie ein Kegelschnitt wieder in einen Kegelschnitt übergeht; aus dem Zuge mit drei Wendepunkten in gerader Linie dagegen ein Zug mit drei Rückkehrtangenten durch einen Punkt, und zwar ein geschlossener Zug*), denn derselbe muss ebenso aus einem Strahlbüschel durch allmählige Degeneration erzeugt werden können, wie jener Zug mit drei Wendungen aus einer Geraden. Wir haben demnach die folgenden *Typen von Curven dritter Klasse:*

1) *Eintheilige Curven*, bestehend aus einem einzigen Zuge mit drei Rückkehrtangenten (vgl. Fig. 65 und 3 in Fig. 64).
2) *Zweitheilige Curve*, bestehend aus einem solchen Zuge und einem ihn umschliessenden Ovale (vgl. Fig. 63, und 1 in Fig. 64).

Im letztern Falle kann das Oval nicht im Innern des dreispitzigen Zuges liegen, da es sonst Punkte geben würde, von denen aus man

Fig. 63. Fig. 64. Fig. 65.



fünf Tangenten an die Curve ziehen könnte. Zwischen beiden Curvenarten stellt sich als Uebergangsstufe**) die Curve mit Doppeltangente

*) Man erkennt dies auch daraus, dass die Curve dritter Klasse von der sechsten Ordnung ist, und dass eine Curve gerader Ordnung ohne Doppelpunkt nie einen unpaaren Zug enthalten darf; vgl. die Anmk. auf p. 499.

**) Vgl. dazu Fig. 53 auf p. 346.

(vgl. 2 in Fig. 64). Wie aus dieser Curve die zweitheilige von Fig. 63 entsteht, wird aus der Zeichnung unmittelbar klar sein; die Curve von Fig. 65 entsteht dagegen aus der Curve 3 in Fig. 64 durch passende Verzerrung und Projection.

Wir erhalten ferner durch dualistische Uebertragung sofort die folgenden Sätze:

Eine Curve dritter Klasse ist im Allgemeinen von der sechsten Ordnung und hat neun Rückkehrtangenten. *Die erste Polare einer Geraden v in Bezug auf die Curve $\varphi = u_\alpha^3 = 0$* ist ein Kegelschnitt $u_\alpha^2 v_\alpha = 0$, welcher die 6 in den Schnittpunkten von v mit $\varphi = 0$ an diese Curve gezogenen Tangenten berührt. Ist v insbesondere eine Tangente von $\varphi = 0$, so berührt der Kegelschnitt die Curve dritter Klasse in ihrem Berührungspunkte. Er zerfällt in ein Punktepaar, wenn die Gerade v der Bedingung

$$\Delta_\varphi \equiv (\alpha\beta\gamma)^2\, v_\alpha v_\beta v_\gamma = 0$$

genügt, d. h. die Hesse'sche Curve von $\varphi = 0$ berührt; und letztere Curve wird gleichzeitig von den Geraden berührt, welche je zwei Punkte eines solchen Paares verbinden. Diese Curve hat dieselben Rückkehrtangenten, wie $\varphi = 0$, und die gleiche Eigenschaft kommt allen Curven der Schaar $\varkappa\varphi + \lambda\Delta_\varphi = 0$ zu; doch sind ihre Rückkehrpunkte verschieden. Die Polare einer Rückkehrtangente zerfällt in zwei Punkte, von denen der eine der Rückkehrpunkt selbst ist, während der andere einer harmonischen Geraden dualistisch entspricht, und also für alle Curven der Schaar mit gemeinsamen Rückkehrtangenten derselbe ist.

Von jedem Punkte einer Tangente der Curve dritter Klasse kann man noch zwei weitere Tangenten an dieselbe ziehen. Sucht man zu diesen und der ersteren die vierte harmonische Gerade, so umhüllen letztere Geraden einen Kegelschnitt; und dies ist die Polare jener ersten Tangente. Derselbe zerfällt, wie erwähnt, in ein Punktepaar, wenn die Tangente eine Rückkehrtangente war. Die 9 Punkte der so entstehenden 9 Paare, welche nicht in die Rückkehrpunkte fallen, bilden ein System von Punkten, welches gleichzeitig die Grundpunkte für einen syzygetischen Büschel von Curven dritter Ordnung liefert; u. s. w.

Wir werden nun zeigen, dass die Schaar von Curven dritter Klasse, welche zu dem Büschel $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$ gehört, nichts anderes ist, als die Gesammtheit der Cayley'schen Curven dieses Büschels, dass darunter also insbesondere die Cayley'sche Curve von $f = 0$ selbst enthalten ist. Diese Curve müsste unsern allgemeinen Formeln zufolge von der Klasse 6 sein (vgl. p. 368), da aber bei Curven dritter Ordnung die Hesse'sche und Steiner'sche Curve zusammen-

fallen, so zählt jede Tangente, als Verbindungslinie entsprechender Punkte beider Curven, doppelt. *Die* Cayley'*sche ist daher von der dritten Klasse.*

Diese Curve wird auch gleichzeitig von den Linienpaaren umhüllt, in welche die ersten Polaren zerfallen können. Betrachten wir nämlich zwei einander conjugirte Punkte x und y der Hesse'schen Curve, so dass also die erste Polare von x in y, und die erste Polare von y in x einen Doppelpunkt hat. Die beiden so entstehenden Linienpaare schneiden sich in vier Punkten; und alle durch diese gehenden Kegelschnitte haben ihre Pole auf der Linie $\overline{xy}$. Unter letzteren Kegelschnitten ist noch ein drittes Linienpaar, dessen Doppelpunkt z ebenfalls auf der Hesse'schen Curve liegen muss, während der zugehörige Pol z' ebenfalls auf $\overline{xy}$ liegt. In z schneiden sich ferner die Tangenten der Hesse'schen Curve in x und y; denn die Tangente in y ist nach dem Früheren (p. 501) zugleich die lineare Polare von x in Bezug auf die Grundcurve; die letztere ist identisch mit der Polare von x in Bezug auf das zugehörige Linienpaar. Nun sind aber x, y, z die Ecken des Polardreiecks, welches den Kegelschnitten des erwähnten Büschels gemeinsam ist; und also ist die lineare Polare von x die gegenüberliegende Seite; sie geht somit durch z. Dies gibt den Satz:

Die Tangenten der Curve von Hesse *in zwei conjugirten Punkten x und y derselben schneiden sich auf dieser Curve in einem Punkte z, welcher der conjugirte Pol des dritten Schnittpunktes derselben Curve mit der Geraden $\overline{xy}$ ist.*

Da also die linearen Polaren von x und y sich in z schneiden, so muss die erste Polare von z durch x und y gehen; und weil z ein Punkt der Hesse'schen Curve, also die Polare von z ein Linienpaar ist, so folgt:

Eine Gerade, welche zwei conjugirte Pole x und y der Hesse'*schen Curve verbindet, d. h. eine Tangente der* Cayley'*schen Curve, bildet einen Theil der ersten Polare des Punktes z, welcher dem dritten Schnittpunkte der Linie $\overline{xy}$ mit der* Hesse'*schen Curve auf letzterer conjugirt ist.* Und damit ist unsere Behauptung erwiesen.

Mit Hülfe dieser neuen Definition der Cayley'schen Curve können wir ihre Gleichung leicht aufstellen. Sei

$$f \equiv a_x^3 \equiv \Sigma\Sigma\Sigma a_{ikh} x_i x_k x_h = 0$$

die Gleichung der Grundcurve dritter Ordnung, und setzen wir:

$$f_{ik} = a_{ik1} x_1 + a_{ik2} x_2 + a_{ik3} x_3 ,$$

so wird die Bedingung, dass die erste Polare eines Punktes x in zwei Linien u und v zerfalle, gegeben durch die Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} f_{11} = u_1 v_1 & 2 f_{23} = u_2 v_3 + v_2 u_3 \\ f_{22} = u_2 v_2 & 2 f_{31} = u_3 v_1 + v_3 u_1 \\ f_{33} = u_3 v_3 & 2 f_{12} = u_1 v_2 + v_1 u_2 . \end{array}$$

Eliminiren wir hieraus die linear vorkommenden Grössen x_i und v_i, so erhalten wir die *Gleichung der* Cayley'*schen Curve* in der Form:

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a_{111} & a_{112} & a_{113} & u_1 & 0 & 0 \\ a_{221} & a_{222} & a_{223} & 0 & u_2 & 0 \\ a_{331} & a_{332} & a_{333} & 0 & 0 & u_3 \\ 2\,a_{231} & 2\,a_{232} & 2\,a_{233} & 0 & u_3 & u_2 \\ 2\,a_{311} & 2\,a_{312} & 2\,a_{313} & u_3 & 0 & u_1 \\ 2\,a_{121} & 2\,a_{122} & 2\,a_{123} & u_2 & u_1 & 0 \end{vmatrix} = 0 ,$$

in der That eine Curve dritter Klasse; dieselbe Gleichung würde sich für die v_i durch Elimination der x_i und u_i ergeben. Setzen wir insbesondere die Curve dritter Ordnung in der kanonischen Form (8) als gegeben voraus, so erhalten wir die Bedingungsgleichungen:

$$\begin{array}{ll} f_{11} = a x_1 = u_1 v_1 & 2 f_{23} = 2\,b x_1 = u_2 v_3 + v_2 u_3 \\ f_{22} = a x_2 = u_2 v_2 & 2 f_{31} = 2\,b x_2 = u_3 v_1 + v_3 u_1 \\ f_{33} = a x_3 = u_3 v_3 & 2 f_{12} = 2\,b x_3 = u_1 v_2 + v_1 u_2 , \end{array}$$

und hieraus ergeben sich durch Elimination der x_i die drei Gleichungen:

$$\begin{array}{l} 2\,b u_1 v_1 - a\,(u_2 v_3 + v_2 u_3) = 0 \\ 2\,b u_2 v_2 - a\,(u_1 v_3 + v_1 u_3) = 0 \\ 2\,b u_1 v_3 - a\,(u_1 v_2 + v_1 u_2) = 0 . \end{array}$$

Also wird nach Elimination der v_i *die Gleichung der* Cayley'*schen Curve in der kanonischen Form:*

$$\begin{vmatrix} 2\,b u_1 & -a u_3 & -a u_2 \\ -a u_3 & 2\,b u_2 & -a u_1 \\ -a u_2 & -a u_1 & 2\,b u_3 \end{vmatrix} = 0 ,$$

oder entwickelt:

$$(2) \qquad a^2 b\,(u_1{}^3 + u_2{}^3 + u_3{}^3) + (a^3 - 4\,b^2)\,u_1 u_2 u_3 = 0 .$$

Diese Gleichung ist genau von der Form, wie die Grundcurve selbst; die Cayley'sche Curve verhält sich daher ebenso zu den Ecken des Coordinatendreiecks, wie die Grundcurve zu den Seiten; und daraus folgt dann, dass die Cayley'sche Curve in der That die harmonischen Geraden der Wendepunkte der Grundcurve zu Rückkehrtangenten hat, also in der von uns betrachteten Curvenschaar enthalten ist. Dasselbe gilt für die Cayley'sche Curve einer beliebigen Curve des Büschels

$\varkappa f + \lambda \Delta = 0$; denn um ihre Gleichung zu erhalten, braucht man nur in (2) $\varkappa a + \lambda \alpha$, $\varkappa b + \lambda \beta$ statt a, b zu setzen, wodurch die Form der Gleichung nicht geändert wird.

Da nun bei denjenigen 9 Linienpaaren, welche den Wendepunkten als erste Polaren entsprechen, immer eine Gerade des Paares die Wendetangente ist, so werden auch letztere von der Cayley'schen Curve berührt und sie bestimmen dieselbe vollständig. Mit Hülfe dieser Bestimmungsstücke kann man dann die Cayley'sche Curve in später zu erörternder Weise construiren. — Mit den reciproken Betrachtungen vereinigt stellen wir diese Resultate in den folgenden Sätzen zusammen:

Die 9 Wendetangenten einer jeden Curve des Büschels mit gemeinsamen Wendepunkten bestimmen eine Curve 3ter Klasse, und diese sämmtlichen Curven 3ter Klasse haben gemeinsame Rückkehrtangenten.

Die durch die 9 Wendetangenten einer Curve 3ter Ordnung bestimmte Curve 3ter Klasse ist die Enveloppe der Linienpaare, in welche die Polaren gewisser Punkte in Bezug auf erstere Curve zerfallen können, und gleichzeitig die Enveloppe der Verbindungslinien dieser Punkte mit den Doppelpunkten der zugehörigen Linienpaare.

Die 9 Rückkehrpunkte einer jeden Curve der Schaar mit gemeinsamen Rückkehrtangenten bestimmen eine Curve 3ter Ordnung, und diese sämmtlichen Curven 3ter Ordnung haben gemeinsame Wendepunkte.

Die durch die 9 Rückkehrpunkte einer Curve 3ter Klasse bestimmte Curve 3ter Ordnung ist der Ort der Punktepaare, in welche die Polaren gewisser Geraden in Bezug auf erstere Curve zerfallen können, und gleichzeitig der Ort der Schnittpunkte dieser Geraden mit den Doppeltangenten der zugehörigen Punktepaare.

Unter den Curven 3ter Ordnung fanden sich indess 4 Systeme von 3 Geraden (Wendepunktsdreiecke); also sind unter den Curven dritter Klasse 4 Systeme von 3 Punkten (bez. die Ecken jener Wendepunktsdreiecke). Auch letztere Curven müssen von den Wendetangenten einer Curve des syzygetischen Büschels 3ter Ordnung berührt werden; es folgt also:

Unter den Curven mit gemeinsamen Wendepunkten gibt es vier solche, deren Wendetangenten sich dreimal zu drei in Punkten schneiden, welche die Ecken eines Wendepunktsdreiecks bilden.

Unter den Curven mit gemeinsamen Rückkehrtangenten gibt es vier solche, deren Rückkehrpunkte dreimal zu drei in geraden Linien liegen, welche die Seiten eines Wendepunktsdreiecks bilden.

Dadurch ist für die betreffenden Curven dritter Ordnung eine besondere Invarianteneigenschaft ausgesprochen; und wir werden

später auch die Invariante aufstellen, durch deren Verschwinden dieselbe bedingt wird. —

Die Hesse'sche Curve einer Curve dritter Ordnung konnten wir auch als Jakobi'sche Curve des Netzes der ersten Polaren auffassen. Wir haben gesehen, dass dies Netz gleichzeitig das allgemeinste Kegelschnittnetz ist (p. 384); und dies Resultat werden wir dadurch bestätigen, dass wir geradezu die Gleichung der zugehörigen Grundcurve 3ter Ordnung aufstellen. Wir können also die Hesse'sche Curve auch von einem solchen Netze ausgehend definiren: sie ist der Ort der Doppelpunkte zerfallender Curven desselben. Ebenso lässt sich aber auch die Cayley'sche Curve definiren als Enveloppe der Geraden, aus welchen diese zerfallenden Kegelschnitte bestehen; und unter diesem Gesichtspunkte pflegt man letztere Curve als Hermite'sche Curve des Systems zu bezeichnen.*) *Die Gleichung der* Jakobi'*schen oder* Hesse'*schen Curve des Kegelschnittnetzes:*

$$(3)\qquad \varkappa a_x^2 + \lambda b_x^2 + \mu c_x^2 = \varkappa \Sigma a_{ik} x_i x_k + \lambda \Sigma b_{ik} x_i x_k + \mu \Sigma c_{ik} x_i x_k = 0$$

ist nach dem Früheren:

$$(4)\qquad I(a, b, c) = (abc)\, a_x b_x c_x = 0.$$

Die Gleichung der Hermite'*schen Curve desselben* ergibt sich aus den Gleichungen:

$$2(\varkappa a_{ik} + \lambda b_{ik} + \mu c_{ik}) = u_i v_k + v_i u_k$$

durch Elimination von $\varkappa, \lambda, \mu, v_1, v_2, v_3$; sie ist also:

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & b_{11} & c_{11} & u_1 & 0 & 0 \\ a_{22} & b_{22} & c_{22} & 0 & u_2 & 0 \\ a_{33} & b_{33} & c_{33} & 0 & 0 & u_3 \\ 2a_{23} & 2b_{23} & 2c_{23} & 0 & u_3 & u_2 \\ 2a_{31} & 2b_{31} & 2c_{31} & u_3 & 0 & u_1 \\ 2a_{12} & 2b_{12} & 2c_{12} & u_2 & u_1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Symbolisch lässt sich diese Determinante sehr einfach darstellen, wie wir sogleich sehen werden. Wir bezeichnen als *zwei zu einander in Bezug auf das Netz conjugirte Punkte* zwei Punkte der Jakobi'schen Curve der Art, dass sich die Polaren des einen in Bezug auf alle Kegelschnitte des Netzes in dem andern schneiden (vgl. p. 377). Zwei solche conjugirte Punkte stehen hiernach zu einander in derselben

*) Vgl. Hermite in Crelle's Journal, Bd. 57. — Für die folgenden Untersuchungen über Kegelschnittnetze und conjugirte Gewebe vgl. Smith: Proceedings of the London Math. Society, Mai 1868 und Rosanes: Math. Annalen, Bd. 6, p. 264 ff. — Rein algebraisch sind diese Verhältnisse neuerdings von Gundelfinger dargestellt und erweitert: Crelle's Journal, Bd. 80, p. 73.

Beziehung, wie zwei Punkte der Hesse'schen Curve einer Curve dritter Ordnung, Pol und Doppelpunkt seiner Polaren, welche wir früher als conjugirt bezeichneten. Die Enveloppe der Verbindungslinien dieser Punkte war aber die Cayley'sche Curve; also haben wir den Satz (welchen man übrigens auch direct für Kegelschnittnetze leicht in obiger Weise ableitet):

Die Hermite'*sche Curve eines Kegelschnittnetzes ist die Enveloppe der Geraden, welche die in Bezug auf das Netz einander conjugirten Punkte paarweise verbinden.*

Betrachten wir eine Tangente der Curve, so müssen hiernach die Schnittpunkte eines beliebigen Kegelschnittes des Netzes mit ihr harmonisch liegen zu den beiden conjugirten Punkten, deren Verbindungslinien die betrachtete Tangente ist. Letztere wird also von den Curven des Netzes in Punktepaaren einer Involution getroffen. Es ist aber die Bedingung dafür, dass drei binäre Formen

$$a_\xi^2 = 0\,, \quad b_\xi^2 = 0\,, \quad c_\xi^2 = 0$$

Punktepaare derselben Involution darstellen, leicht anzugeben. Alsdann nämlich müssen dieselben zu dem nämlichen vierten Paare gleichzeitig harmonisch liegen. Nun sind die Paare $a_\xi^2 = 0$, $b_\xi^2 = 0$ jedenfalls harmonisch zu dem Paare $\vartheta_x^2 \equiv (ab)\, a_\xi b_\xi = 0$ (vgl. p. 216); soll also auch $c_\xi^2 = 0$ zu letzterem Paare harmonisch liegen, so muss die Invariante $(\vartheta c)^2$ verschwinden. Die gesuchte Bedingung ist daher gegeben durch die Gleichung:

$$(\vartheta c)^2 \doteq (ab)\,(bc)\,(ac) = 0\,.$$

Nach unserm Uebertragungsprincipe (vgl. p. 276) ist also die Gleichung der Enveloppe der Geraden, welche die Kegelschnitte

$$a_x^2 = 0, \quad b_x^2 = 0\,, \quad c_x^2 = 0$$

in Punktepaaren einer Involution schneiden, d. h. *die Gleichung der* Hermite'*schen Curve des Netzes**):

$$H(a,\ b,\ c) \equiv (abu)\,(bcu)\,(acu) = 0\,. \tag{6}$$

Ganz ähnliche Ueberlegungen gelten für ein *Kegelschnittgewebe*, wenn wir unter diesem Ausdrucke das dem Netze dualistisch gegenüberstehende Gebilde verstehen, also ein System von Kegelschnitten, gegeben durch die Gleichung:

$$\nu u_\alpha^2 + \varrho u_\beta^2 + \sigma u_\gamma^2 = 0\,. \tag{7}$$

Die Jakobi'*sche Curve des Gewebes*, der Ort der Doppeltangenten der in Punktepaare zerfallenden Curven, ist gegeben durch:

---

*) Die Vergleichung eines beliebigen Gliedes zeigt, dass sich der Ausdruck $H(abc)$ von der Determinante (5) durch den Factor $-\frac{1}{2}$ unterscheidet.

(8) $$J(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha\beta\gamma)\, u_\alpha u_\beta u_\gamma = 0,$$

und *die* Hermite'*sche Curve des Gewebes*, der Ort der Punktepaare zerfallender Kegelschnitte, gegeben durch:

(9) $$H(\alpha, \beta, \gamma) \equiv (\alpha\beta x)(\alpha\gamma x)(\beta\gamma x) = 0.$$

Ein solches Netz und Gewebe kann man nun direct in einfache Verbindung bringen, so dass das eine unmittelbar durch das andere bedingt ist. Alle Kegelschnitte, welche mit einer beliebigen Curve des Netzes (3) *vereinigt* liegen (vgl. p. 385 und 295), d. h. alle Kegelschnitte $u_\alpha^2 = 0$, für welche die Invarianten a_α^2, b_α^2, c_α^2 verschwinden, bilden offenbar ein Gewebe; denn die Gleichungen

$$a_\alpha^2 = 0, \quad b_\alpha^2 = 0, \quad c_\alpha^2 = 0$$

geben *drei lineare* Bedingungen für die Coëfficienten α_{ik} von u_α^2. Wir wollen das so erhaltene, mit dem Netze (3) vereinigt gelegene Gewebe kürzer als *dem Kegelschnittnetze* (3) *conjugirt bezeichnen*, und umgekehrt dieses als jenem conjugirt.

Zunächst entsteht die Frage nach dem Zusammenhange der Jakobi'schen und Hermite'schen Curve des Netzes mit den entsprechenden des conjugirten Gewebes; sie erledigt sich sehr einfach. Zwei in Bezug auf das Netz conjugirte Punkte, welche also auf der Jakobi'schen Curve desselben liegen, sind harmonische Pole in Bezug auf alle Curven des Netzes und bilden demnach einen Kegelschnitt des conjugirten Gewebes; denn die Bedingung $a_\alpha^2 = 0$ geht für $u_\alpha^2 = u_x \cdot u_y$ über in $a_x a_y = 0$. Wir haben also den Satz:

Die Jakobi'*sche Curve eines Kegelschnittnetzes ist identisch mit der* Hermite'*schen Curve des conjugirten Gewebes.* Und dualistisch entsprechend:

Die Jakobi'*sche Curve eines Kegelschnittgewebes ist identisch mit der* Hermite'*schen Curve des conjugirten Netzes.*

Hieraus können wir Schlüsse auf die Beziehungen zwischen der Hesse'schen und Cayley'schen Curve einer Curve dritter Ordnung ziehen. Die erstere ist gleichzeitig (in dualistisch übertragenem Sinne) die Cayley'sche Curve derjenigen Curve dritter Klasse der Schaar mit gemeinsamen Rückkehrtangenten, deren Polarkegelschnitt-Gewebe zu dem Polaren-Netze der Grundcurve conjugirt ist. Und die Hesse'sche Curve dieser Curve dritter Klasse ist identisch mit der Cayley'schen Curve der Grundcurve dritter Ordnung. Wir können die Gleichung dieser Curve dritter Klasse selbst auch aufstellen, sobald es uns gelingt, die Gleichung der Curve dritter Ordnung anzugeben, deren Polarsystem mit dem Netze (3):

$$\varkappa a_x^2 + \lambda b_x^2 + \mu c_x^2 = 0$$

zusammenfällt. Zu dem Zwecke müssen wir einen Satz voraussetzen,

den wir später bei Betrachtung der ternären cubischen Formen beweisen werden. Ist uns die Grundcurve dritter Ordnung gegeben durch

$$(10) \qquad p_x^3 = q_x^3 = r_x^3 = s_x^3 = 0,$$

wo p, q, r, s gleichbedeutende Symbole sind, und soll ihr System von ersten Polaren mit dem Netze (1) identisch sein, so ist die Gleichung ihrer Hesse'schen Curve:

$$I(a, b, c) \equiv (abc)\, a_x b_x c_x = i_x^3 \equiv i'^3_x = i''^3_x = 0.$$

und die Gleichung ihrer Cayley'schen Curve:

$$H(a, b, c) \equiv (abu)\,(acu)\,(bcu) \equiv u_h^3 = u_{h'}^3 = u_{h''}^3 = 0.$$

Zwischen p_x^3 und u_h^3 besteht nun — und das ist der erwähnte Satz aus der Formentheorie — die Relation:

$$(11) \qquad \tfrac{1}{2}\, p_h^2 u_h^2 p_x = S \,.\, u_x$$

wo S eine Invariante der Grundcurve ist, nämlich:

$$S = (pqr)\,(pqs)\,(prs)\,(qrs),$$

Die Gleichung (11) sagt aber aus, dass (wenn nicht $S = 0$) *die Polare eines Punktes x in Bezug auf eine Curve dritter Ordnung mit der Polaren einer Geraden u in Bezug auf die* Cayley'*sche Curve immer vereinigt liegt, wenn x und u vereinigt liegen.* Sind also u, v zwei Gerade, welche sich in y schneiden, so können wir den Kegelschnitt des Netzes (3), welcher Polarkegelschnitt von y in Bezug auf die Curve $p_x^3 = 0$ ist, dadurch bestimmen, dass er mit den Polarkegelschnitten von v und w in Bezug auf $H(a, b, c) = 0$ vereinigt liegen soll; d. h. es müssen die Gleichungen bestehen:

$$\varkappa a_x^2 + \lambda b_x^2 + \mu c_x^2 = 0$$
$$u_h\, (\varkappa a_h^2 + \lambda b_h^2 + \mu c_h^2) = 0$$
$$v_h\, (\varkappa a_h^2 + \lambda b_h^2 + \mu c_h^2) = 0.$$

Durch Elimination von $\varkappa$, λ, μ finden wir hieraus für den Polarkegelschnitt des Schnittpunktes y von u und v (d. i. für $p_x\,(puv) = 0$) die Gleichung:

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} a_x^2 & b_x^2 & c_x^2 \\ a_h^2 & b_h^2 & c_h^2 \\ a_{h'}^2 & b_{h'}^2 & c_{h'}^2 \end{vmatrix} u_h v_{h'} = 0.$$

Diese Determinante haben wir so umzuformen, dass in ihr die Coordinaten von y statt derer von u und v vorkommen; wenn wir dann $y_i = x_i$ setzen, so resultirt die gesuchte Gleichung der Grundcurve $p_x^3 = 0$. Zu dem Zwecke betrachten wir die Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} a_x^2 & b_x^2 & c_x^2 \\ a_y^2 & b_y^2 & c_y^2 \\ a_z^2 & b_z^2 & c_z^2 \end{vmatrix},$$

welche in die linke Seite von (12) übergeht, wenn man $y_i = h_i$, $z_i = h_i'$ setzt und mit $u_h v_{h'}$ multiplicirt.

Die Determinante D verschwindet, sobald irgend zwei der Werthsysteme a, b, c oder x, y, z einander gleich werden; sie ist daher eine lineare Combination der beiden Bildungen

$$6\,(xyz)\,.\,i_x i_y i_z = (xyz)\,.\,(abc)\,.\sum_{x,y,z} a_x b_y c_z$$

$$6\,(hyz)\,(hzx)\,(hxy) = \sum_{u,v,w} (abu)\,(acv)\,(bcw)\,,$$

wo sich die Summenzeichen auf alle verschiedenen Ausdrücke erstrecken, welche durch Vertauschung von x, y, z, aus $a_x b_y c_z$, bez. von u, v, w aus $(abu)\,(acv)\,(bcw)$ entstehen, und wo gesetzt ist:

$$u_1 = (yz)_1 = y_2 z_3 - y_3 z_2\,,\ \text{etc.}$$
$$v_1 = (zx)_1 = z_2 x_3 - x_3 z_2\,,\ \text{etc.}$$
$$w_1 = (xy)_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2\,,\ \text{etc.}$$

Wir haben sonach die Relation:

(13) $$D = m\,(xyz)\,.\,i_x i_y i_z + n\,(hyz)\,(hzx)\,(hxy)\,,$$

wo m und n Zahlenfactoren sind. Zur Bestimmung derselben setzen wir insbesondere

$$\begin{array}{llllll} x_1 = 1, & x_2 = 0, & x_3 = 0; & u_1 = 1, & u_2 = 0, & u_3 = 0, \\ y_1 = 0, & y_2 = 1, & y_3 = 0; & v_1 = 0, & v_2 = 1, & v_3 = 0, \\ z_1 = 0, & z_2 = 0, & z_3 = 1; & w_1 = 0, & w_2 = 0, & w_3 = 1, \end{array}$$

und:

$$a_x^2 = x_1^2, \quad b_x^2 = x_2^2, \quad c_x^2 = x_3^2.$$

Dann wird, da $8\,I\,(a, b, c)$ gleich der Functionaldeterminante der drei Formen und $H\,(a, b, c)$ gleich der mit -2 multiplicirten Determinante (5) ist*):

(14) $$I\,(a, b, c) = x_1 x_2 x_3\,, \quad H\,(a, b, c) = -\,u_1 u_2 u_3\,,$$

und also in (13):

$$(xyz) = 1, \quad i_x i_y i_z = \tfrac{1}{6}, \quad (hyz)\,(hzx)\,(hxy) = -\,\tfrac{1}{6}\,.$$

während die Determinante D vermöge unserer Substitution den Werth 1 annimmt. Wir haben also:

$$6 = m - n\,.$$

Zweitens setzen wir $a_x^2 = x_2 x_3$, $b_x^2 = x_3 x_1$, $c_x^2 = x_1 x_2$; dann wird in gleicher Weise:

(15) $$I\,(a, b, c) = \tfrac{1}{4}\,x_1 x_2 x_3\,, \quad H\,(a, b, c) = \tfrac{1}{2}\,u_1 u_2 u_3\,;$$

---

*) Vgl. die Anmk. auf p. 520.

während D jetzt den Werth 0 annimmt. Die Gleichung (13) geht sonach über in:

$$0 = m + 2n;$$

und aus den so erhaltenen Gleichungen für m, n findet man: $m = 4$, $n = -2$. Wir haben also das Resultat*):

$$D \equiv \begin{vmatrix} a_x^2 & b_x^2 & c_x^2 \\ a_y^2 & b_y^2 & c_y^2 \\ a_z^2 & b_z^2 & c_z^2 \end{vmatrix} = 4\,(xyz)\,i_x i_y i_z - 2\,(hyz)\,(hzx)\,(hxy)\,.$$

Setzen wir hierin endlich $y_i = h_i$, $z_i = h_i'$ und multipliciren mit u_h und $v_{h'}$, so erhalten wir links den Ausdruck (12) und rechts:

$$\left\{4(hh'x)\,i_x i_h i_{h'} - 2\,(h''hh')\,(h''h'x)\,(h''xh)\right\}.\,u_h v_{h'}\,.$$

Wegen der Vertauschbarkeit von h und h' ist dies ferner gleich:

$$\left\{2\,(hh'x)\,i_x i_h i_{h'} - (hh'h'')\,(h''h'x)\,(hh''x)\right\}\,(u_h v_{h'} - v_h u_{h'})\,.$$

Trägt man hierin $y_i = (uv)_i$ ein, so sind also *die Gleichung der Polare des Punktes y in Bezug auf die Curve dritter Ordnung, deren* Hesse-*sche Curve durch* $I\,(a, b, c) \equiv i_x^3 = 0$, *deren* Cayley'*sche Curve durch* $H\,(a, b, c) \equiv u_h^3 = 0$ *gegeben ist:*

$$2\,(hh'y)\,(hh'x)\,i_x i_h i_{h'} - (hh'y)\,(h''h'x)\,(hh''x)\,(hh'h'') = 0\,.$$

Für $y_i = x_i$ erhalten wir also als *Gleichung der Curve dritter Ordnung, deren Polarennetz mit dem Netze* (3) *zusammenfällt:*

$$(16)\quad p_x^3 \equiv 2\,(hh'x)^2\,i_x i_h i_{h'} - (hh'h'')\,(hh'x)\,(h'h''x)\,(h''hx) = 0.$$

Ganz in gleicher Weise können wir nun auch die Curve dritter Klasse $u_\pi^3 = 0$ finden, deren Polarkegelschnitte das zu (3) conjugirte Gewebe:

$$\nu u_\alpha^2 + \varrho u_\beta^2 + \sigma u_\gamma^2 = 0$$

bilden. Die Jakobi'sche und die Hermite'sche Curve des letzteren seien gegeben durch die Gleichungen

$$I\,(\alpha, \beta, \gamma) \equiv u_I^3 = 0\,, \quad H\,(\alpha, \beta, \gamma) \equiv H_x^3 = 0\,.$$

Alsdann haben wir als Gleichung dieser Curve:

$$(17)\quad u_\pi^3 \equiv 2\,(HH'u)^2\,H_I H_I' u_I - (HH'H'')(HH'u)(H'H''u)(H''Hu) = 0.$$

Wir können auch hierin die Symbole von $I\,(a, b, c)$ und $H\,(a, b, c)$ einführen, denn die Curven $u_I^3 = 0$, $H_x^3 = 0$ sind bez. identisch mit den Curven $u_h^3 = 0$, $i_x^3 = 0$. Wir haben also, wenn c, c' Zahlenfactoren bedeuten:

---

*) Diese Formel kann man auch mit Hülfe der von Gordan für Formen mit mehreren Reihen von Veränderlichen (x, y, z) gegebenen Reihenentwicklungen ableiten: Math. Annalen, Bd. 5, p. 106.

$$I(a, b, c) = c \,.\, H(\alpha, \beta, \gamma), \quad H(a, b, c) = c' \,.\, I(\alpha, \beta, \gamma).$$

Um c, c' zu bestimmen, betrachten wir wieder das specielle Kegelschnittnetz, dessen Curven ein gemeinsames Polardreieck besitzen:

$$\varkappa x_1^2 + \lambda x_2^2 + \mu x_3^2 = 0,$$

und für welches $I(a, b, c)$, $H(a, b, c)$ durch (14) bestimmt sind.

Ein Kegelschnitt $u_\alpha^2 = 0$ des conjugirten Gewebes muss mit den Doppellinien $x_1^2 = 0$, $x_2^2 = 0$, $x_3^2 = 0$ vereinigt liegen, d. h. die Linien $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ berühren; dies Gewebe ist also dargestellt durch:

$$\nu u_1 u_2 + \varrho u_2 u_3 + \sigma u_3 u_1 = 0,$$

und wir haben daher wegen (14) und (15):

$$(18) \quad \begin{cases} I(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{4} u_1 u_2 u_3 = -\frac{1}{4} H(a, b, c), \\ H(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{2} x_1 x_2 x_3 = \frac{1}{2} I(a, b, c). \end{cases}$$

Es ist daher $c = 2$, $c' = -4$ zu setzen, und für die Symbole I, H, h, i bestehen die Beziehungen:

$$u_I^3 = -\tfrac{1}{4} u_h^3, \qquad H_x^3 = \tfrac{1}{2} i_x^3.$$

Führen wir mit Hülfe dieser Relationen die Symbole h, i in die Gleichung (17) ein, so erhalten wir endlich als *Gleichung der Curve dritter Klasse, deren Polarkegelschnitte das zu dem Netze* (3) *conjugirte Gewebe bilden, für welche also* $H(a, b, c) = 0$ *die* Hesse'*sche*, $I(a, b, c) = 0$ *die* Cayley'*sche Curve ist:*

$$(19) \quad -\tfrac{1}{8} u_\pi^3 \equiv (ii'u)^2 u_h i_h i'_h + (ii'i'')(ii'u)(i'i''u)(i''iu) = 0.$$

Die Polare eines beliebigen Punktes y *in Bezug auf* $p_x^3 = 0$ *und die Polare einer beliebigen Geraden* v *in Bezug auf* $u_\pi^3 = 0$ *liegen vereinigt*, wie aus der Ableitung der Gleichung (19) folgt; d. h. unabhängig von den y und v besteht die Relation:

$$(20) \qquad p_\pi^2 p_y v_\pi = 0.$$

Die gewonnenen Resultate können wir benutzen, um die *Resultante der drei Kegelschnitte* a_x^2, b_x^2, c_x^2 aufzustellen. Sollen dieselben nämlich einen Punkt y gemein haben, so ist dieser Punkt doppelt zählend ein Kegelschnitt, welcher mit allen C_2 des vorliegenden Netzes vereinigt liegt, d. h. er bildet einen Kegelschnitt des conjugirten Gewebes; und wir dürfen $u_\gamma^2 = u_y^2$ setzen. Dann wird aber nach den Gleichungen (18):

$$I(a, b, c) = 2(\alpha\beta x)(\beta y x)(\alpha y x), \quad H(a, b, c) = -4 u_y \,.\, (\alpha\beta y) u_\alpha u_\beta.$$

Die Jakobi'sche Curve $i_x^3 = 0$ hat also den Punkt y zum Doppelpunkte, und alle Polarkegelschnitte derselben gehen durch y. Hieraus folgt, dass der Kegelschnitt $u_y^2 = 0$ mit *allen* Kegelschnitten des

Systems der ersten Polaren von $i_x^3 = 0$ vereinigt liegt; d. h. man kann in dem Gewebe $\nu u_\alpha^2 + \varrho u_\beta^2 + \sigma u_\gamma^2 = 0$ eine Curve (nämlich u_y^2) so bestimmen, dass die drei Gleichungen bestehen:

$$\nu i_\alpha^2 i_1 + \varrho i_\beta^2 i_1 + \sigma i_\gamma^2 i_1 = 0,$$
$$\nu i_\alpha^2 i_2 + \varrho i_\beta^2 i_2 + \sigma i_\gamma^2 i_2 = 0,$$
$$\nu i_\alpha^2 i_3 + \varrho i_\beta^2 i_3 + \sigma i_\gamma^2 i_3 = 0.$$

Und durch Elimination von ν, ϱ, σ ergibt sich:

$$(21) \quad \begin{vmatrix} i_\alpha^2 i_1 & i_\beta^2 i_1 & i_\gamma^2 i_1 \\ i'_{\alpha'}{}^2 i'_2 & i'_{\beta'}{}^2 i'_2 & i'_{\gamma'}{}^2 i'_2 \\ i''_{\alpha''}{}^2 i''_3 & i''_{\beta''}{}^2 i''_3 & i''_{\gamma''}{}^2 i''_3 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{6}(i i' i'') \begin{vmatrix} i_\alpha^2 & i_\beta^2 & i_\gamma^2 \\ i'_{\alpha'}{}^2 & i'_{\beta'}{}^2 & i'_{\gamma'}{}^2 \\ i''_{\alpha''}{}^2 & i''_{\beta''}{}^2 & i''_{\gamma''}{}^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Nun besteht dualistisch entsprechend zu der für die obige Determinante D gefundenen Relation die Gleichung:

$$D' = \begin{vmatrix} u_\alpha^2 & u_\beta^2 & u_\gamma^2 \\ v_\alpha^2 & v_\beta^2 & v_\gamma^2 \\ w_\alpha^2 & w_\beta^2 & w_\gamma^2 \end{vmatrix} = 4\,(uvw)\,u_l v_l w_l - 2\,(Hvw)\,(Hwu)\,(Huv)$$

oder wegen (18):

$$D' = -(uvw)\,u_h v_h w_h - (ivw)\,(iwu)\,(iuv)\,.$$

D' aber gibt die in (21) auftretende Determinante, wenn wir darin u durch i, v durch i', w durch i'' ersetzen. *Die Bedingung dafür, dass die drei Kegelschnitte $a_x^2 = 0$, $b_x^2 = 0$, $c_x^2 = 0$ einen Punkt gemein haben (oder dass im conjugirten Gewebe ein doppelt zählender Punkt auftritt) ist also:*

$$(22) \qquad (i i' i'')^2\, i_h i'_h i''_h - (i i' i'')\,(i i' i''')\,(i i'' i''')\,(i' i'' i''') = 0,$$

wo $i_x^3 = 0$ die Jakobi'sche, $u_h^3 = 0$ die Hermite'sche Curve des Netzes darstellt; und dualistisch entsprechend *die Bedingung für das Auftreten einer Doppellinie in dem Netze der Kegelschnitte a_x^2, b_x^2, c_x^2 (oder einer gemeinsamen Tangente der Curven des conjugirten Gewebes)**):

$$(23) \quad 2\,(h h' h'')^2\, i_h i_{h'} i_{h''} + (h h' h'')\,(h h' h''')\,(h h'' h''')\,(h' h'' h''') = 0.$$

Wir heben schliesslich noch als Resultat der soeben gelegentlich angestellten Ueberlegungen über das besondere Kegelschnittnetz:

$$\varkappa x_1^2 + \lambda x_2^2 + \mu x_3^2 = 0$$

die Sätze hervor:

---

*) Die von uns hier betrachteten Bildungen sind sämmtlich (schon wegen ihrer Bedeutung) *Combinanten* des Netzes bez. Gewebes (vgl. p. 303 und 208). Der in Obigem hervortretende Zusammenhang derselben mit der Determinante D ist kein zufälliger; vielmehr hat Gordan nachgewiesen, dass *alle* Combinanten des Netzes als Functionalinvarianten dieser Determinante darstellbar sein müssen: Math. Annalen, Bd. 5, p. 116.

Das conjugirte Gewebe zu einem Netze, dessen Kegelschnitte ein gemeinsames Polardreieck haben, besteht aus den die Seiten des Dreiecks berührenden Kegelschnitten.

Das conjugirte Gewebe zu einem Netze, dessen Kegelschnitte drei Punkte gemein haben, besteht aus den Kegelschnitten, welche das durch die Punkte gebildete Dreieck zum Polardreiecke haben.

III. Zur Geometrie auf einer Curve dritter Ordnung. — Erzeugungsweisen derselben.

Zu jeder Curve dritter Ordnung des Büschels $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ mit gemeinsamen Wendepunkten gehört eine andere Curve desselben Büschels als deren Hesse'sche, gegeben durch die Gleichung:

$$\Delta_{\varkappa\lambda} = Kf + L\Delta = 0,$$

wo K, L vom dritten Grade in $\varkappa$, λ sind (vgl. Gleichung (3) p. 505). Diese Beziehung zwischen beiden Curven ist aber nicht umkehrbar. Soll nämlich die Hesse'sche Curve von $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ mit $f = 0$ zusammenfallen, so muss $L = 0$ sein, damit die Relation $\Delta_{\varkappa\lambda} = K \cdot f$ bestehen kann. Da aber L die Grössen $\varkappa$, λ in der dritten Dimension enthält, so haben wir den von Hesse gefundenen Satz:

Eine allgemeine Curve dritter Ordnung ist die Hesse'*sche Curve von drei anderen Curven dritter Ordnung.*

Fassen wir nun eine vorliegende Curve als Hesse'sche einer anderen auf, so sind damit die Punkte derselben paarweise einander zugeordnet, und zwar der Art, dass der Polarkegelschnitt des einen Punktes eines Paares im andern Punkte einen Doppelpunkt hat: Es sind, nach unserer früheren Bezeichnung, zwei conjugirte Pole in Bezug auf das Netz der Polarkegelschnitte der gewählten Grundcurve, oder, wie wir uns kurz ausdrücken wollen, ein *Polepaar* der Hesse'schen Curve. Aus unserem letzten Satze folgt also:

Man kann eine allgemeine Curve dritter Ordnung $f = 0$ auf drei verschiedene Weisen in Punktepaare (Polepaare) auflösen, so dass die Punkte eines jeden Paares conjugirte Pole in Bezug auf das Netz der Polarkegelschnitte einer Curve $\varphi = 0$ sind, für welche $f = 0$ die Hesse'*sche Curve ist.**)

Wir haben also auf der Curve drei verschiedene Systeme von Polepaaren. Für die Paare eines Systems gilt nun der folgende wichtige Satz:

Wenn man die Punkte zweier Polepaare desselben Systems kreuzweise verbindet, so schneiden sich die Verbindungslinien auf der Curve, und diese Schnittpunkte bilden ein drittes Polepaar desselben Systems.

*) Vgl. Maclaurin und besonders Hesse a. a. O.

Es seien die Polepaare 1, 1′ und 2, 2′ gegeben; es sollen dann die Linienpaare $\overline{12}$, $\overline{1'2'}$ und $\overline{12'}$, $\overline{1'2}$ sich in zwei Punkten 3 und 3′ schneiden, die wieder ein Polepaar sind. Wir nehmen zum Beweise die Nebenseiten des durch die Linien 12, $\overline{1'2'}$, $\overline{1'2}$, $\overline{12'}$ bestimmten vollständigen Vierecks zu Seiten des Coordinatendreiecks; ferner bestimmen wir die Constanten in den Coordinaten so, dass die Gleichung der einen Seite des Vierseits, etwa $\overline{12}$ wird:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0;$$

dann sind nach den Sätzen über das Vierseit (p. 56) die Gleichungen

$$\begin{array}{lrl} \text{von } \overline{1'2'}: & & x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ \quad ,, \ \ \overline{1'2}: & & x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ \quad ,, \ \ \overline{12'}: & - & x_1 + x_2 + x_3 = 0, \end{array}$$

und von $\overline{11'}$, $\overline{22'}$, $\overline{33'}$ bez:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0.$$

Die Coordinaten der Punkte 1, 1′ sind in Folge dieser Festsetzungen:

$$\begin{array}{lll} x_1 = 0, & x_2 = 1, & x_3 = -1 \\ x_1 = 0, & x_2 = 1, & x_3 = +1; \end{array}$$

damit sie also conjugirte Pole eines Kegelschnittes $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$ sind, muss $a_{22} - a_{33} = 0$ sein, und ebenso damit 2 und 2′ conjugirte Pole in Bezug auf denselben Kegelschnitt sind: $a_{11} - a_{33} = 0$. Hieraus folgt aber die dritte Gleichung: $a_{11} - a_{22} = 0$, d. h. auch 3, 3′ sind conjugirte Pole für die Curve $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$. *Wenn also zwei Paare von gegenüberliegenden Ecken eines vollständigen Vierseits conjugirte Pole für einen Kegelschnitt sind, so sind es auch die Punkte des dritten Paares.* Und hieraus ergibt sich unmittelbar der von uns aufgestellte Satz über die Polepaare auf einer Curve dritter Ordnung, da sie als conjugirte Pole in Bezug auf die Kegelschnitte eines Netzes definirt waren.

Aus diesem Satze können wir nun nach dem Vorgange von Schröter eine sehr einfache Construction der Curve dritter Ordnung ableiten. *Eine solche ist nämlich durch drei Polepaare desselben Systems vollständig und eindeutig bestimmt; und zwar kann man diese Polepaare beliebig annhemen.*

Ist für das betreffende System von Polepaaren $\varphi \equiv \alpha_x^3 = 0$ die Gleichung der Grundcurve, auf deren Hesse'scher Curve $f = 0$ die Polepaare liegen sollen, und bezeichnen wir mit x_i, x_i'; y_i, y_i'; z_i, z_i' die Coordinaten der in den drei gegebenen Paaren vorkommenden Punkte, so bestehen die Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{array}{lll} \alpha_x\alpha_{x'}\alpha_1 = 0 & \alpha_y\alpha_{y'}\alpha_1 = 0 & \alpha_z\alpha_{z'}\alpha_1 = 0 \\ \alpha_x\alpha_{x'}\alpha_2 = 0 & \alpha_y\alpha_{y'}\alpha_2 = 0 & \alpha_z\alpha_{z'}\alpha_2 = 0 \\ \alpha_x\alpha_{x'}\alpha_3 = 0 & \alpha_y\alpha_{y'}\alpha_3 = 0 & \alpha_z\alpha_{z'}\alpha_3 = 0\,. \end{array}$$

Und dies sind 9 lineare Gleichungen zur Bestimmung der Coëfficienten von $\varphi = \alpha_x^3$; mit α_x^3 ist aber auch die zugehörige Hesse'sche Curve bestimmt, w. z. b. w. Um einzusehen, dass die Gleichungen (1) wirklich von einander unabhängig sind, d. h. nicht unendlich viele Lösungen zulassen, kann man folgenden Weg einschlagen. Wir wählen die drei Punkte x, y, z zu Ecken eines Coordinatendreiecks; durch die zugeordneten Punkte x', y', z' sind dann aus (1) die folgenden Gleichungen für φ gegeben:

$$(2)\qquad \begin{array}{lll} \alpha_{x'}\alpha_1^2 = 0 & \alpha_{y'}\alpha_2\alpha_1 = 0 & \alpha_{z'}\alpha_3\alpha_1 = 0 \\ \alpha_{x'}\alpha_1\alpha_2 = 0 & \alpha_{y'}\alpha_2^2 = 0 & \alpha_{z'}\alpha_3\alpha_2 = 0 \\ \alpha_{x'}\alpha_1\alpha_3 = 0 & \alpha_{y'}\alpha_2\alpha_3 = 0 & \alpha_{z'}\alpha_3^2 = 0\,. \end{array}$$

In diesem Gleichungssysteme kommen die Coëfficienten α_{111}, α_{222}, α_{333} nur in den Diagonalgleichungen vor, werden also am Schlusse einzeln bestimmt. Die übrigen α bestimmen sich dann (abgesehen von α_{123}, durch welches alle anderen α sich ausdrücken) paarweise aus zwei der Gleichungen (2), z. B. α_{112} und α_{122} aus:

$$\begin{array}{c} \alpha_{112}x_1' + \alpha_{122}x_2' + \alpha_{123}x_3' = 0 \\ \alpha_{112}y_1' + \alpha_{122}y_2' + \alpha_{123}y_3' = 0\,. \end{array}$$

Dabei muss jedoch $x_1'y_2' - x_2'y_1'$ von Null verschieden sein; es darf also die Verbindungslinie der zu zweien der Punkte x, y, z gehörigen Punkte x', y', z' nicht durch den dritten Punkt gehen. *Alle Bedingungen für die Ausführbarkeit der Operationen sind somit erfüllt, wenn man festsetzt, dass von den 6 Punkten der 3 Paare niemals drei zusammengehörige auf einer Geraden liegen sollen.*

Geht man nun von den drei gegebenen Paaren 11′, 22′, 33′ aus, so kann man beliebig viele neue Paare nach dem soeben gegebenen Satze construiren, dass die Verbindungslinien zweier Paare sich auf der Curve und zwar in einem neuen Paare schneiden.*) Man erhält also z. B. durch die Schnittpunkte der Linien 12, 1′2′ und 12′, 1′2 ein neues Paar 44′; ebenso aus den Paaren 11′, 33′ ein neues Paar 55′, dann aus 33′, 44′ ein Paar 66′, aus 55′, 22′ ein neues Paar 77′, u. s. w.

Man kann hiernach, wenn drei Polepaare desselben Systems auf einer Curve dritter Ordnung gegeben sind, beliebig viele Punkte der Curve construiren.

*) Diese Construction ist von Schröter angegeben: Ueber Curven 3ter Ordnung, Math. Annalen, Bd. V, p. 50; vgl. auch Clebsch: Ueber zwei Erzeugungsarten der ebenen Curven 3ter Ordnung, ib. p. 422.

Und zwar leistet diese von Schröter angegebene Construction an Einfachheit das Aeusserste, was man verlangen kann: man erhält jeden neuen Punkt der Curve als Kreuzungspunkt zweier Geraden, ohne weiterer Hülfslinien zu bedürfen.

Gegenüber diesen drei Systemen von Polepaaren zeigen in Bezug auf das Reelle und Imaginäre die ein- und zweitheiligen Curven dritter Ordnung ein wesentlich verschiedenes Verhalten. Man übersieht dies leicht mit Hülfe des bei den Kegelschnittnetzen (p. 516) gegebenen Satzes, dass sich die Tangenten der Curve in den Punkten eines Polepaares wieder in einem Punkte der Curve, „dem zugehörigen *Tangentialpunkte*", schneiden; ein Satz, welcher sich übrigens aus dem Hesseschen Satze über das von zwei Polepaaren gebildete Vierseit unmittelbar ergibt, wenn man die beiden Paare einander unendlich benachbart annimmt. Gehen wir umgekehrt von einem Punkte 0 als Tangentialpunkte aus, so gehören ihm vier Punkte 1, 2, 3, 4 zu: die Berührungspunkte der vier von ihm an die Curve gelegten Tangenten. Nehmen wir etwa den Punkt 1 heraus, so kann zu ihm als conjugirter Pol in einem der drei Systeme nur einer der Punkte 2, 3, 4 gehören. Also sind die Punkte 2, 3, 4 diejenigen, welche bez. mit 1 in den drei Systemen von Polepaaren ein Paar bilden; und wir haben den Satz:

Die vier Berührungspunkte der vier von einem Punkte der Curve an dieselbe zu legenden Tangenten bilden sechs Polepaare; und zwar gehören je zwei sich ergänzende Paare zu einem der drei möglichen Systeme.

Letzteres folgt daraus, dass immer zwei der sechs Polepaare 12, 13, 14, 23, 24, 34, die keinen Punkt gemeinsam haben, zu demselben Systeme gehören müssen, und man so die Paare nur in einer Weise einander zuordnen kann. Da in den vier Berührungspunkten der Tangenten die Grundcurve von dem Polarkegelschnitte des Tangentialpunktes geschnitten wird, können wir den Satz unter Berücksichtigung des Hesse'schen Satzes vom vollständigen Vierseit (p. 527) auch folgendermassen aussprechen:

Der Polarkegelschnitt eines Punktes der Curve dritter Ordnung schneidet dieselbe in vier Punkten, deren kreuzweise Verbindungslinien sich wieder auf der Curve treffen.

Von den betrachteten vier Tangenten gehen nun, wenn ihr gemeinsamer Schnittpunkt auf dem Zuge mit drei Wendungen liegt, immer zwei an das Oval, welches bei einer zweitheiligen Curve vorhanden ist, denn an ein Oval kann man, wie an einen Kegelschnitt, von jedem Punkte ausserhalb desselben zwei Tangenten ziehen: An den Zug mit drei Wendungen kann man also von einem Punkte desselben nur noch zwei Tangenten ziehen. Fehlt aber das Oval (also bei einer eintheiligen Curve), so werden zwei der vier Tangenten

imaginär. An eine eintheilige Curve dritter Ordnung kann man daher von einem ihrer Punkte aus nur zwei *reelle* Tangenten ziehen. Von einem Punkte des Ovals dagegen kann man überhaupt keine reelle Tangente an die Curve legen, denn eine solche müsste das Oval immer noch in einem zweiten reellen Punkte schneiden; was nicht möglich ist, da die Gerade dann 4 Schnittpunkte mit der C_3 haben würde. Aus diesen Ueberlegungen in Verbindung mit dem Vorhergehenden ergibt sich für die Vertheilung der Polepaare auf der Curve das Folgende.

Eine *zweitheilige* Curve kann man mittelst der Schröter'schen Construction auf drei Arten in reeller Weise erzeugen. Bei zweien derselben durchläuft ein Punkt des Polepaares das Oval, der andere den Zug mit drei Wendungen; bei der dritten Erzeugungsart bilden die Punkte des Ovals eine Schaar von Paaren, die Punkte des unendlichen Zuges eine andere. Bei einer *eintheiligen* Curve bleibt, indem das Oval fortfällt, nur die letzte Erzeugungsweise als einzig reelle bestehen; eine solche Curve kann daher nur auf *eine* Art aus reellen Polepaaren zusammengesetzt werden.*) —

Für den hier betrachteten Büschel der vier Tangenten gilt noch der folgende fundamentale Satz:

Das Doppelverhältniss der vier Tangenten, welche man von einem Punkte der Curve dritter Ordnung an dieselbe legen kann, ist constant für alle Punkte der Curve.

Wir geben hier einen einfachen geometrischen Beweis, der von Salmon herrührt, indem wir einen directen algebraischen auf später verschieben. Von einem Punkte 0 der Curve ziehen wir die vier Tangenten

$$01, \quad 02, \quad 03, \quad 04$$

an dieselbe; ihre Berührungspunkte 1, 3, 3, 4 liegen auf dem Polarkegelschnitte von 0. Auf denselben Kegelschnitt projiciren wir von einem zu 0 benachbarten Punkte 0′ der Curve aus die Berührungspunkte 1′, 2′, 3′, 4′ der vier von 0′ ausgehenden Tangenten. Diese Projectionspunkte (d. h. die Schnittpunkte letzterer vier Tangenten mit der C_2) sind dann von den Punkten 1, 2, 3, 4 nur um unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung verschieden, wenn 0 von 0′ um eine Grösse erster Ordnung entfernt ist. Da ferner der Polarkegelschnitt von 0 die Grundcurve in 0 berührt, d. h. (bis auf Grössen zweiter Ordnung) auch durch 0′ geht, so haben die Strahlen von 0 nach 1, 2, 3, 4 (bis auf Grössen zweiter Ordnung) dasselbe Doppelverhältniss,

*) Es knüpfen sich hieran weitere Folgerungen über die Abhängigkeit der Gestalt der Cayley'schen Curve von der der Hesse'schen etc. Vgl darüber Harnack: Math. Annalen, Bd. 9, p. 9 ff.

wie die Strahlen von 0′ nach 1′, 2′, 3′, 4′, oder von 0′ nach 1, 2, 3, 4. Das Doppelverhältniss der vier Tangenten wird somit nicht geändert, wenn man von Punkt zu Punkt auf der Curve fortschreitet; es muss also für die ganze Curve constant sein, q. e. d.

In demselben finden wir somit eine für die Curve charakteristische Constante: Man wird nur solche Curven dritter Ordnung linear in einander transformiren können, bei denen dies Doppelverhältniss denselben Werth hat. Eine für die Curve ebenfalls charakteristische Constante haben wir schon bei anderer Gelegenheit gefunden; es ist die Zahl $\frac{b}{a}$ in der kanonischen Form der Curvengleichung (p. 510):

$$(3) \qquad a(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 6\,b\,x_1 x_2 x_3 = 0\,.$$

Daraus, dass von den Constanten der Curve durch Coordinatenveränderung alle bis auf diese eine $\frac{a}{b}$ zerstört werden können, folgt gleichzeitig, dass der Werth jenes Doppelverhältnisses nur von dieser Grösse $k = \frac{b}{a}$ abhängig sein kann. Dies wird in der That durch die folgende Betrachtung bestätigt. Wir bilden das Doppelverhältniss z. B. für die vier Tangenten, die von einem Wendepunkte ausgehen, und von denen eine mit der Wendetangente zusammenfällt. Ein reeller Wendepunkt ist z. B. gegeben durch die Coordinaten (vgl. p. 511): $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$. Die Gleichung seiner ersten Polare zerfällt in die der Wendetangente:

$$(4) \qquad x_1 + x_2 - 2\,k\,x_3 = 0$$

und in die der zugehörigen harmonischen Geraden:

$$(5) \qquad x_1 - x_2 = 0\,.$$

Die Schnittpunkte der letzteren Linie mit der Grundcurve, d. h. die Berührungspunkte der drei vom Wendepunkte ausgehenden Tangenten, erhält man also aus (3) für $x_1 = x_2$, d. i. durch die Gleichung:

$$(6) \qquad 2\,x_1^3 + x_3^3 + 6\,k\,x_1^2 x_3 = 0\,.$$

Das gesuchte Doppelverhältniss ist nun gleich demjenigen, welches diese drei Punkte zusammen mit dem Schnittpunkte der harmonischen Geraden und der vierten Tangente, der Wendetangente, bilden. Für diesen Schnittpunkt haben wir aber wegen (4) und (5) die Coordinaten:

$$\varrho x_1 = \varrho x_2 = 1\,, \quad \varrho x_3 = \frac{1}{k}\,.$$

Die Coordinaten der vier Punkte sind nur von k abhängig, und somit auch ihr Doppelverhältniss, wie behauptet wurde. Besser gestaltet sich auch diese Darstellung in der Theorie der ternären cubischen Formen; das

Doppelverhältniss und die Constante k erscheinen dann beide abhängig von der *absoluten Invariante* der Curve.*) —

Die Untersuchungen über Polepaare auf der Curve dritter Ordnung, welche uns hier beschäftigten, unterscheiden sich wesentlich von den Betrachtungen, welche wir bisher über die Geometrie auf einer allgemeinen Curve n^{ter} Ordnung angestellt haben. In der That lassen sie sich nicht unmittelbar auf Curven höherer Ordnung übertragen, denn eine solche kann im Allgemeinen nicht als Hesse'sche Curve einer anderen angesehen werden. Auf die Theorie der Schnittpunktsysteme einer Curve dritter Ordnung mit anderen Curven wollen wir hier auch nicht weiter eingehen, wir werden darauf später unter Anwendung der Theorie der elliptischen Functionen zurückkommen. Wir behandeln hier nur zwei darauf bezügliche Probleme:

1) die Lage solcher Punkte auf der Curve, in denen Kegelschnitte mehrpunktig berühren können; und
2) die Chasles'sche Erzeugungsweise der Curve aus einem Kegelschnittbüschel und einem ihm projectivischen Strahlbüschel, woran wir dann noch die Besprechung der sogenannten Grassmann'schen Erzeugungsweise anknüpfen.

Stellen wir die Forderung, dass ein Kegelschnitt die Curve dritter Ordnung berühre, wo er ihr begegnet, so haben wir zunächst folgende Fälle zu unterscheiden:

1) Der Kegelschnitt berührt in 3 Punkten einfach,
2) „ „ „ „ „ 2 „ 2-punktig.

Alle anderen Möglichkeiten erscheinen als Grenzfälle dieser beiden. In letzteren sind je drei Bedingungen gegeben; es gibt also noch doppelt unendlich viele Kegelschnitte, welche ihnen genügen. Im ersten Falle können wir daher noch zwei Berührungspunkte willkürlich annehmen und nach der Lage des dritten fragen. Derselbe bestimmt sich durch den Satz:

Die Tangentialpunkte der drei Punkte, in denen ein Kegelschnitt die Curve dritter Ordnung einfach berührt, liegen auf einer Geraden:

Der Beweis ist folgender: Sind A, B, C die drei Berührungspunkte, A, B, Γ ihre Tangentialpunkte (Schnittpunkte ihrer Tangenten mit der Curve), so haben wir drei Curven dritter Ordnung mit 8 gemeinsamen Punkten, nämlich:

1) die gegebene Curve
2) ihre drei Tangenten in A, B, C,
3) den berührenden Kegelschnitt und die Linie AB.

*) Vgl. den Schluss des Abschnittes V in dieser Abtheilung. — Die absolute Invariante ist dann eine symmetrische Function der 6 verschiedenen Werthe, welche das Doppelverhältniss von vier Punkten annehmen kann.

Die 8 ihnen gemeinsamen Punkte sind: die Punkte A, B und die je doppelt zählenden Berührungspunkte A, B, C. Die drei Curven müssen daher auch den 9ten Punkt Γ gemein haben (vgl. p. 428), q. e. d. Sind nun die Punkte A, B gegeben, so ist es leicht, den Punkt C zu construiren. Wir ziehen die Tangenten in A und B, welche die Curve noch in A und B treffen. Die Linie $\overline{\mathrm{AB}}$ liefert dann als dritten Schnittpunkt den Punkt Γ, und von letzterem aus haben wir nur die vier Tangenten an die Curve zu legen: Jeder Berührungspunkt ist ein Punkt C. Doch nur drei von ihnen geben eine eigentliche Lösung. Bezeichnen wir nämlich durch D den dritten Schnittpunkt der Curve mit $\overline{AB}$, so liefert die Linie $\overline{AB}$, doppelt genommen, auch einen in den drei Punkten A, B, D berührenden Kegelschnitt; und dass die Tangente von D in der That auch durch Γ geht, folgt aus einem unserer ersten Sätze über Curven dritter Ordnung (vgl. p. 503).

*Es gibt also drei verschiedene Systeme von je zweifach unendlich vielen Kegelschnitten, welche eine Curve dritter Ordnung in drei Punkten berühren.**)

Diese drei Systeme sind wegen des Zusammenhanges der Polepaare mit den Tangentialpunkten ebenso von einander vollkommen getrennt, wie die drei verschiedenen Systeme von Polepaaren auf der Curve. Ebenso wie wir hier wieder auf die Polepaare geführt werden, kommen wir bei den zweimal zweipunktig berührenden Kegelschnitten auf die Wendepunkte. Es seien A und B die beiden Berührungspunkte. Wir legen durch dieselben drei einander unendlich benachbarte Gerade, welche die Curve noch in drei weiteren, unendlich benachbarten Punkten schneiden; letztere müssen dann in gerader Linie liegen, d. h. einen Wendepunkt bilden. Denn wir haben wieder drei Curven dritter Ordnung, welche 8 Punkte und also auch den 9ten gemein haben, nämlich:

1) die gegebene Curve,
2) die drei benachbarten Geraden durch A und B,
3) die Wendetangente und den berührenden Kegelschnitt.

Hieraus folgt der Satz:

Jede durch einen Wendepunkt der Curve dritter Ordnung gehende Gerade bestimmt durch ihre beiden anderen Schnittpunkte mit derselben zwei solche Punkte, in denen gleichzeitig ein Kegelschnitt zweipunktig berühren kann; und weiter, da die Curve neun Wendepunkte hat:

---

*) Vgl. Plücker und Hesse a. a. O.; über die nähere Beziehung dieser Kegelschnitte zu der Curve z. B. Cremona's Einleitung in die Theorie der algebraischen Curven.

Es gibt neun verschiedene Systeme von Kegelschnitten, welche eine Curve dritter Ordnung in zwei Punkten zweipunktig berühren.

Die beiden Berührungspunkte A, B fallen insbesondere zusammen für die von dem Wendepunkte ausgehenden Tangenten an die Curve. Im Berührungspunkte einer solchen kann daher ein Kegelschnitt fünfpunktig berühren. Da es neun Wendepunkte gibt und von jedem drei Tangenten an die Curve, haben wir also den Satz:*)

Es gibt 27 Kegelschnitte, welche eine Curve dritter Ordnung fünfpunktig berühren; ihre Berührungspunkte sind die 27 Schnittpunkte der 9 harmonischen Geraden mit der Curve. —

Wir wenden uns nunmehr zur Betrachtung der Chasles'schen Erzeugungsweise der Curven dritter Ordnung (vgl. p. 375). Nehmen wir auf derselben vier Punkte beliebig an, so können wir durch sie noch unendlich viele Kegelschnitte legen. Wir wählen zwei beliebige heraus: $\varphi = 0$ und $\psi = 0$; ein jeder von ihnen schneidet die Curve noch in zwei Punkten, deren Verbindungslinien bez. $A = 0$ und $B = 0$ sein mögen. Wir haben dann wieder drei Curven dritter Ordnung mit 8 gemeinsamen Punkten, nämlich:

1) die Grundcurve,
2) den Kegelschnitt $\varphi = 0$ und die Gerade $B = 0$,
3) „ „ „ $\psi = 0$ „ „ „ $A = 0$.

Dieselben müssen auch den 9ten Punkt, d. h. den Schnittpunkt von $A = 0$ und $B = 0$ gemein haben. Wir erhalten somit den Satz:

Jeder Kegelschnitt eines Büschels, dessen vier Grundpunkte auf der Curve dritter Ordnung liegen, schneidet letztere in zwei beweglichen Punkten, deren Verbindungslinie immer durch einen festen Punkt der Curve geht: „den jenen vier Grundpunkten gegenüber liegenden Punkt“.

Dieser Satz ist übrigens auch eine unmittelbare Folge des Restsatzes: der Strahlbüschel ist mit dem Kegelschnittbüschel äquivalent (vgl. p. 434). Beide Büschel sind aber auch zu einander projectivisch**), denn, ist $f = 0$ die Gleichung der Grundcurve, so muss sein:

$$f = \varkappa\varphi \,.\, B - \lambda\psi \,.\, A\,,$$

wo $\varkappa$, λ Constante sind; die Gleichung $f = 0$ entsteht daher durch Elimination von μ aus den beiden anderen:

$$\varphi + \mu\psi = 0\,, \quad \lambda A + \mu\varkappa B = 0\,.$$

Nimmt man also vier beliebige Punkte einer Curve dritter Ordnung zu Grundpunkten eines Kegelschnittbüschels, so gibt ihr gegenüberliegender

---

*) Aus der auf p. 461 gegebenen Formel würde sich statt 27 zunächst 36 für die Zahl dieser C_2 ergeben; darunter sind aber die 9 Wendetangenten (jede doppelt zählend) mit als Kegelschnitte gezählt.

**) Dies folgt auch schon aus der eindeutigen Beziehung beider Büschel auf einander (vgl. p. 435, Anmerkung).

Punkt den Scheitel eines Strahlbüschels, welches mit dem Kegelschnittbüschel zusammen die Curve dritter Ordnung nach Chasles'*scher Weise erzeugt.*

Mit Hülfe dieser Sätze lässt sich nun *die Construction der Curve dritter Ordnung aus 9 gegebenen Punkten* ausführen.*) Die neun Punkte dürfen natürlich nicht so liegen, dass durch sie noch unendlich viele Curven dritter Ordnung hindurchgehen, denn sonst würde die Lösung unbestimmt werden. Wie dann die Lösung selbst zu geschehen hat, mag hier nur angedeutet werden. Vier der gegebenen Punkte wählt man zu Grundpunkten eines Kegelschnittbüschels; man kann dann zunächst den diesen vier Punkten auf der zu construirenden Curve gegenüberliegenden Punkt M construiren; und zwar ergibt sich dieser als vierter Schnittpunkt zweier Kegelschnitte, deren andere drei Schnittpunkte gegeben sind. Ist so der Punkt M gefunden, so kann man leicht einen Strahlbüschel durch M dem Kegelschnittbüschel derartig zuordnen, dass aus beiden die gesuchte Curve nach Chasles-scher Weise erzeugt wird, dass also je zwei Punkte als Schnittpunkte eines Strahles mit einem Kegelschnitte gefunden werden (vgl. p. 51).

An die hier behandelte Aufgabe schliesst sich sofort die folgende an: *Es sind 8 Punkte beliebig gegeben, man soll den zugehörigen neunten Punkt construiren, welcher mit ihnen zusammen eine Curve dritter Ordnung nicht bestimmt.* Die Lösung beruht wieder wesentlich darauf, dass man zu vier der gegebenen Punkte für zwei verschiedene Curven des durch die 8 Punkte gehenden Büschels den gegenüberliegenden Punkt construirt und dann den leicht zu erweisenden Satz anwendet, dass *der Ort der Punkte, welche vier Basispunkten eines Büschels von Curven 3. Ordnung auf den verschiedenen Curven dieses Büschels gegenüberliegen, ein Kegelschnitt ist, welcher durch die fünf andern Basispunkte geht.* —

Den von uns besprochenen Erzeugungsarten von Schröter und Chasles steht eine andere gegenüber, die von Grassmann**) gefunden und auch auf Curven beliebiger Ordnung angewandt wurde; dieselbe ist von wesentlich anderem, gewissermassen mechanischem Charakter. Wir wollen sie zunächst für Kegelschnitte aussprechen, für welche sie schon von Maclaurin und Taylor in der Form angegeben wurde. Wir haben hier den Satz***):

---

*) Vgl. Chasles: Construction de la courbe du troisième ordre déterminée par neuf points, Comptes rendus, Mai 1853. Man findet die Lösung der Aufgabe auch eingehend behandelt in den erwähnten Werken von Cremona und Durège.

**) Grassmann: Die lineale Ausdehnungslehre, Leipzig 1844, sowie verschiedene Aufsätze in Crelle's Journal, Bd. 31, 36, 42, 52.

***) Vgl. auch Chasles: Aperçu historique, Note XI.

Wenn ein Punkt x sich so bewegt, dass seine Verbindungslinien mit zwei festen Punkten a, b bez. zwei feste Gerade α, β in zwei Punkten schneidet, deren Verbindungslinie immer durch einen festen Punkt c geht, so beschreibt der Punkt x einen Kegelschnitt (vgl. Fig. 66).

Fig. 66.

Bezeichnen wir nämlich die Coordinaten der Punkte x, a, b, c bez. mit x_i, a_i, b_i, c_i und die der Geraden α, β bez. mit α_i, β_i, so sind die Coordinaten der Verbindungslinie von x und a:

$$u_1 = (xa)_1, \quad u_2 = (xa)_2, \quad u_3 = (xa)_3,$$

wo zur Abkürzung:

$$(xa)_1 = x_2a_3 - x_3a_2, \quad (xa)_2 = x_3a_1 - x_1a_3, \quad (xa)_3 = x_1a_2 - x_2a_1.$$

Ebenso sind die Coordinaten der Verbindungslinie von x und b:

$$v_1 = (xb)_1, \quad v_2 = (xb)_2, \quad v_3 = (xb)_3,$$

und also die des Schnittpunktes von u und α:

$$(7) \qquad \begin{aligned} y_1 &= (xa)_2\alpha_3 - (xa)_3\alpha_2 = [(xa), \alpha]_1 \\ y_2 &= (xa)_3\alpha_1 - (xa)_1\alpha_3 = [(xa), \alpha]_2 \\ y_3 &= (xa)_1\alpha_2 - (xa)_2\alpha_1 = [(xa), \alpha]_3, \end{aligned}$$

und ebenso die Coordinaten des Schnittpunktes von v und β:

$$(8) \qquad z_i = [(xb), \beta]_i.$$

Die Punkte y, z und c sollen nun in gerader Linie liegen; d. h. es besteht die Gleichung:

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} [(xa), \alpha]_1 & [(xb), \beta]_1 & c_1 \\ [(xa), \alpha]_2 & [(xb), \beta]_2 & c_2 \\ [(xa), \alpha]_3 & [(xb), \beta]_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

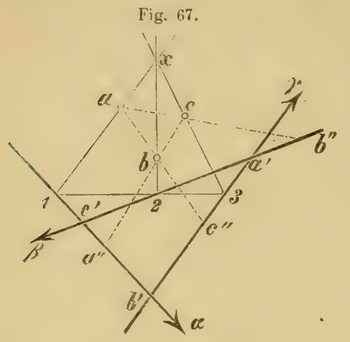
Diese ist aber von der zweiten Ordnung in x, stellt also in der That einen Kegelschnitt dar. Das Resultat kann man auch leicht geometrisch verificiren. Der Strahlbüschel mit dem Mittelpunkte c nämlich schneidet auf α und β zwei perspectivisch liegende Punktreihen aus; die Verbindungslinien dieser Schnittpunkte bez. mit a und b geben zwei projectivische Strahlbüschel mit den Scheiteln a, b; *der Schnittpunkt x zweier entsprechender Strahlen der letzteren beschreibt also in der That einen Kegelschnitt.* Man erkennt gleichzeitig, dass letzterer durch die Punkte a, b und den Schnittpunkt von α und β geht. Ferner muss er auch den Schnittpunkt von $\overline{ac}$ und β, sowie den von $\overline{bc}$ und α enthalten; denn für diese Punkte ist die Forderung

des Satzes jedenfalls erfüllt. Es sind so auch 5 Punkte für den Kegelschnitt unmittelbar gegeben.

Für Curven dritter Ordnung können wir die Grassmann'sche Erzeugungsweise folgendermassen aussprechen:

Ein Punkt x beschreibt eine Curve dritter Ordnung, wenn seine Verbindungslinien mit drei festen Punkten a, b, c einzeln drei feste Gerade α, β, γ in drei Punkten schneiden, welche auf einer (beweglichen) Geraden liegen. Diese Gerade umhüllt dabei eine Curve dritter Klasse (vgl. Fig. 67).

Fig. 67.



Der letzte Theil des Satzes ist nur eine Folge des ersten; denn die bewegliche Gerade bewegt sich eben so, dass ihre Schnittpunkte mit drei festen Geraden α, β, γ, verbunden mit drei festen Punkten a, b, c drei Gerade ergeben, welche sich in einem (beweglichen) Punkte x schneiden; und diese Eigenschaft entspricht dualistisch vollkommen der dem Punkte x auferlegten Forderung.

Die Gleichung der betreffenden Curve dritter Ordnung können wir direct aufstellen. Die Coordinaten des Schnittpunktes der Linien $\overline{xa}$ und α, sowie $\overline{xb}$ und β sind wieder durch die Gleichungen (7) und (8) gegeben. Analog sind die Coordinaten des Schnittpunktes von $\overline{xc}$ und γ:

$$t_i = [(xc), \gamma]_i . \tag{10}$$

Da nun die Punkte y, z, t immer in gerader Linie liegen sollen, so folgt:

$$\begin{vmatrix} [(xa), \alpha]_1 & [(xb), \beta]_1 & [(xc), \gamma]_1 \\ [(xa), \alpha]_2 & [(xb), \beta]_2 & [(xc), \gamma]_2 \\ [(xa), \alpha]_3 & [(xb), \beta]_3 & [(xc), \gamma]_3 \end{vmatrix} = 0; \tag{11}$$

und dies ist die Gleichung unserer Curve dritter Ordnung. Wir können hier auch leicht neun Punkte angeben, durch welche die Curve bestimmt wird; es sind die folgenden (vgl. Fig. 67):

1) die Punkte a, b, c,
2) die Ecken a', b', c' des Dreiecks α, β, γ,
3) die Punkte a'', b'', c'', in welchen die Geraden α, β, γ beziehungsweise von den Geraden $\overline{bc}$, $\overline{ca}$, $\overline{ab}$ getroffen werden.

Man erkennt in der That leicht bei Betrachtung der betreffenden Figur, dass die Forderungen unseres Satzes von selbst erfüllt sind, sobald x in einem dieser neun Punkte liegt. Die letzteren haben hier eine besondere Lage gegen einander, jedoch keineswegs der Art,

dass durch sie noch unendlich viele Curven dritter Ordnung gehen könnten. Es ergibt sich dies einfach daraus, dass wir in (11) eben auf eine ganz bestimmte Curve geführt sind, oder auch, wie folgt. Durch die acht Punkte

$$a'', b'', c''; \quad a', b', c'; \quad a, b$$

geht ausser einer allgemeinen Curve dritter Ordnung noch die aus den Geraden α, β, ab bestehende; der neunte Punkt, welchen beide gemein haben, ist aber der als Schnittpunkt von α und β doppelt zählende Punkt c', also *nicht* der Punkt c, q. e. d.

Von besonderem Interesse ist hier die Frage, wie man auf einer gegebenen Curve dritter Ordnung diejenigen Elemente finden kann, aus welchen sie vermöge des Grassmann'schen Mechanismus entsteht.*) Hiermit wird dann zugleich gezeigt, dass *jede* Curve dritter Ordnung auf solche Weise erzeugt werden kann. Wir knüpfen an das soeben erwähnte System von neun Punkten an. Die charakteristische und ausreichende Eigenschaft desselben besteht darin, dass die Punkte a, b, c und a', b', c' zwei Dreiecke bilden, deren Ecken auf der Curve liegen und deren Seiten sich entsprechend in a'', b'', c'' auf der Curve schneiden. Sehen wir also die letzteren drei Punkte als beliebig auf der Curve gegeben an, so haben wir die Aufgabe zu lösen:

Es soll ein Dreieck gefunden werden, dessen Ecken a, b, c auf der Curve dritter Ordnung liegen, und dessen Seiten einzeln durch drei auf der Curve gegebene Punkte a'', b'', c'' gehen.

Hat man zwei Dreiecke dieser Art gefunden, so begründen sie zusammen eine Grassmann'sche Erzeugung der Curve, und zwar auf doppelte Art; denn es ist noch gleichgültig, welches von ihnen man als Dreieck a, b, c und welches man als Dreieck α, β, γ ansieht. Wir werden zeigen, dass man zu drei Punkten a'', b'', c'' immer vier Dreiecke finden kann; diese bilden sechs Paare, und man hat also den Satz:

Drei beliebig auf der Curve dritter Ordnung gegebene Punkte führen auf zwölf Arten, die Curve nach Grassmann'*scher Methode zu erzeugen.*

Die erwähnten vier Dreiecke ergeben sich folgendermassen. Wir verbinden die Punkte b'' und c'' durch eine Gerade, welche die Curve noch in d treffen möge; ferner werde die Curve von der Linie $\overline{a''d}$ in a''' geschnitten. Von letzterem Punkte a''' aus ziehen wir eine Tangente an die Curve, deren Berührungspunkt a sei; die Verbindungslinien von a mit b'' und c'' mögen ferner die Punkte c und b auf ihr ausschneiden: Wir behaupten, dass alsdann auch die Gerade $\overline{a''b}$

*) Vgl. Clebsch: Math. Annalen, Bd. V, p. 424.

durch c geht, dass also die Punkte a, b, c ein Dreieck der gesuchten Art bilden. In der That haben wir drei Curven dritter Ordnung:

1) die gegebene Grundcurve,
2) die Linien $\overline{da''a'''}$, $\overline{b''ac}$, $\overline{c''ab}$,
3) die Linien $\overline{db''c''}$, $\overline{a'''aa}$, $\overline{a''b}$,

welche sich in den Punkten a'', b'', c'', d, b, a''' und dem doppelt zählenden a, also in acht Punkten schneiden; sie müssen daher auch den neunten Punkt c gemein haben. Da wir nun von a''' aus vier Tangenten an die Curve legen können, und da, wie sich in ähnlicher Weise leicht einsehen lässt, die Wiederholung der Construction von einem analog wie a''' gefundenen Punkte b''' oder c''' nichts Neues ergibt, so haben wir den Satz:

Es gibt vier Dreiecke, deren Ecken auf der Curve dritter Ordnung liegen, und deren Seiten einzeln durch drei auf der Curve gegebene Punkte gehen.

Da ferner die Punkte a, b, c als Berührungspunkte der von a''', b''', c''' ausgehenden Tangenten gefunden waren, so folgt:

Aus einem Dreiecke der Art findet man die drei anderen, indem man zu den Ecken desselben die drei Systeme conjugirter Pole sucht, welche ihnen auf der Curve als Hesse'*scher dreier anderen Curven entsprechen.* Durch diese Beziehung der Grassmann'schen Erzeugungsweise zu den Systemen conjugirter Polepaare ist der Zusammenhang derselben mit der oben besprochenen Schröter'schen Erzeugungsweise gegeben. Man erkennt sofort, dass *dieselbe Curve, welche wir nach* Grassmann'*scher Weise aus den Punkten a, b, c und den Linien α, β, γ erhalten, auch nach* Schröter'*scher Weise aus den drei Punktepaaren a-a', b-b', c-c' construirbar ist.*

In der That überzeugt man sich auch leicht direct, dass diese Punktepaare conjugirte Polepaare sind. Zu dem Zwecke hat man nur zu zeigen, dass die Schnittpunkte der Linien ab' und $a'b$, oder ac' und $a'c$ oder bc' und $b'c$ wieder auf der Curve liegen; dies ist aber offenbar der Fall, denn verbindet man z. B. den Schnittpunkt der letzteren beiden Linien mit a, b, c, so liegen die Schnittpunkte dieser Verbindungslinien auf einer Geraden, wie es die Grassmann'sche Erzeugung verlangt, nämlich der Geraden γ. Während also der Grassmann'sche Mechanismus die Curve durch einen continuirlichen Process entstehen lässt, gibt gleichzeitig die Schröter'sche Methode ein Mittel, um beliebig viele discrete Punkte der Curve linear zu construiren.

Wenn so der gegenseitige Zusammenhang zwischen diesen beiden Erzeugungsweisen hergestellt ist, wird man weiter verlangen, dieselben wieder auf die Chasles'sche Erzeugungsweise zurückzuführen; dies kann in folgender Weise geschehen. Man halte in Fig. 67 den

Punkt 3 fest und benutze die Punkte a, b, 3 und die Linien α, β, um einen Kegelschnitt nach Grassmann zu erzeugen, der Art dass die Verbindungslinien des erzeugenden Punktes x mit a, b die Linien α, β bez. in Punkten treffen, deren Verbindungslinie durch 3 geht. Dieser Kegelschnitt geht dann jedenfalls auch durch den Schnittpunkt d der Linien ab' und ba', denn dessen Verbindungslinien mit a, b schneiden die Linien α, β eben in b', a', welche, ebenso wie 3, auf γ liegen. Der Punkt d ist daher immer derselbe, wo auch 3 auf der Linie γ liegen mag; lässt man also 3 sich auf γ bewegen und construirt für jede Lage von γ in angegebener Weise einen Kegelschnitt, so bilden alle diese Kegelschnitte einen Büschel, dessen Basispunkte in a, b, c', d liegen. Jetzt nehmen wir noch den Punkt c hinzu. Jeder Lage von 3 entspricht auch ein Strahl durch c: die Verbindungslinie von 3 mit c, welche auch durch x geht. Durch Vermittlung des beweglichen Punktes 3 ist also der durch c gehende Strahlbüschel projectivisch auf den soeben erwähnten Kegelschnittbüschel bezogen; und *die Schnittpunkte x entsprechender Curven beider Büschel erzeugen wieder dieselbe Curve, welche wir vorhin auf andere Weise erhalten hatten.* Statt des Punktes c kann man dabei selbstverständlich auch den Punkt a oder b auszeichnen. Zu bemerken ist noch, dass der hier benutzte Kegelschnittbüschel zu dem Strahlbüschel in besonderer Lage ist, insofern ein Basispunkt des ersteren mit dem Träger des letzteren auf der construirten Curve ein Polepaar bildet; man wird also nicht umgekehrt aus den gegebenen Elementen einer beliebigen Chasles'schen Erzeugungsweise unmittelbar die Elemente einer Grassmann'schen oder Schröter'schen Erzeugungsweise für dieselbe Curve finden können.*)

*) Ganz analoge Ueberlegungen gelten übrigens für die Grassmann'sche und Chasles-Jonquières'sche Erzeugungsweise einer Curve beliebiger Ordnung. Lässt man z. B. in Fig. 67 den Punkt c sich auf einer neuen Geraden δ bewegen und construirt zu jedem Punkte dieser Geraden die ihm als Punkt c zugehörige C_3, so bilden alle diese ∞^1 C_3 einen Büschel, dessen 9 Basispunkte leicht anzugeben sind. Einen dazu projectivischen Strahlbüschel erhält man in folgender Weise: Man verbinde jeden Punkt c von δ mit einem festen Punkte d und den Schnittpunkt dieser Verbindungslinie und einer festen Geraden ε verbinde man mit einem neuen festen Punkte e. Der Büschel durch e ist dann projectivisch zu der Punktreihe auf δ, also auch zu obigem Curvenbüschel. Man erhält so die Erzeugung einer Curve C_4, welche sich auch leicht in Grassmann'scher Weise aussprechen lässt. Noch einfacher gestaltet sich dies, wenn man die Curve durch zwei C_2-Büschel bestimmt. Ein solcher entsteht aus Fig. 66, wenn man c sich auf einer Geraden γ bewegen lässt, ein zweiter aus einer entsprechenden Figur, in der a, b, c, α, β durch $a', b', c', \alpha', \beta'$ ersetzt sind, wenn c' auf γ' fortrückt. Die projectivische Beziehung zwischen beiden kann man dadurch herstellen, dass man vermöge eines beliebigen festen Punktes die Punktreihen auf γ und γ' perspectivisch auf einander bezieht. — Es lässt sich zeigen, dass man so jede Grassmann'sche Erzeugungsweise auf eine Chasles'sche zurückführen, d. h. aus den Elementen der einen die der andern bestimmen kann.

IV. Die ternären cubischen Formen.

Wir haben in Betreff der vollständigen algebraischen Erledigung gewisser Probleme über die Curven dritter Ordnung schon wiederholt auf die Theorie der ternären cubischen Formen verwiesen. In der That werden wir in ihr nicht nur eine algebraisch elegante Darstellung der von uns behandelten Fragen finden, sondern auch über die bisherigen Grenzen unserer Betrachtungen hinausgeführt werden; wie dies ja auch bei den ternären quadratischen Formen der Fall war. Während so die Formentheorie zunächst aus der Nothwendigkeit entsprang, die Probleme der projectivischen Geometrie algebraisch zu formuliren, tritt nunmehr überhaupt eine umgekehrte Wirkung der Algebra auf die Geometrie hervor: Es ist die Aufgabe der letzteren, die Begriffe der ersteren sich anzueignen und so den eigenen Gesichtskreis mannigfach zu erweitern, wie es z. B. besonders durch Aufnahme des Begriffes der Polaren bereits geschehen ist. Im Folgenden werden wir also die Theorie der cubischen Formen*) zunächst so weit verfolgen, als es zur Erledigung des Wendepunktproblems erforderlich ist; die weiteren Bildungen und deren Zusammenhang unter einander werden wir dann jedoch nur flüchtig berühren, zumal da ihre geometrische Bedeutung noch nicht vollkommen erfasst ist. Dass diese Theorie durch Gordan's Beweis von der Endlichkeit des zugehörigen Formensystems in sich einen gewissen Abschluss gefunden hat, haben wir schon früher hervorgehoben (p. 274).

Für die *ternären cubischen* Formen haben wir zunächst zwei Gruppen von Bildungen zu betrachten, von denen die eine aus der Theorie der *binären cubischen*, die andere aus der Theorie der *ternären quadratischen* Formen herübergenommen ist.

Bezeichnen wir eine binäre cubische Form symbolisch durch

---

*) Die Anfänge dieser Disciplin finden sich in den Arbeiten von Hesse über die Wendepunkte. Nachdem sodann Aronhold im 39. Bd. von Crelle's Journal (1849) besonders die beiden Invarianten gegeben hatte, wurden diese, sowie die Covarianten und zugehörigen Formen dritter und sechster Ordnung bez. Klasse von Cayley im dritten Memoir upon Quantics (1856) entwickelt. Die Grundlage einer einheitlichen Ausführung bildet jedoch die Arbeit von Aronhold (Crelle's Journal, Bd. 55, 1858), in der die Resultate von 1849 im Zusammenhange dargelegt und erweitert wurden. Für die Entwicklung der Theorie sind ferner zu erwähnen: Aufsätze von Clebsch und Gordan, Math. Annalen, Bd. 1 und 6, Gordan, ib. Bd. 1, Gundelfinger, ib. Bd. 4 und 5, sowie Cayley: Seventh Memoir upon Quantics, Philos. Transactions 1861. — Vgl. eine Zusammenstellung der verschiedenen im Gebrauche befindlichen Bezeichnungsweisen: Math. Annalen, Bd. 6, p. 439, Anmerkung.

$f = a_\xi^3$, so besteht bekanntlich (vgl. p. 219) das Formensystem von f aus den Bildungen*):

$$(1)\quad \begin{cases} \tau = (ab)^2\, a_\xi b_\xi = \tau_\xi^2, \qquad Q = (c\tau)\, c_\xi^2 \tau_\xi = (ab)^2\,(ca)\, c_\xi^2 b_\xi\,, \\ \qquad\qquad B = (\tau\tau')^2 = (ab)^2\,(cd)^2\,(ac)\,(bd)\,. \end{cases}$$

Aus diesen Formen ergeben sich sofort solche, welche einer ternären cubischen Form

$$(2)\qquad f = a_x^3$$

angehören, durch Anwendung unseres Uebertragungsprincipes (vgl. p. 276); nämlich:

$$(3)\qquad \begin{cases} \Theta = (abu)^2\, a_x b_x \\ Q = (abu)^2\,(cau)\, c_x^2 b_x \\ F = (abu)^2\,(cdu)^2\,(acu)\,(bdu)\,. \end{cases}$$

Die geometrische Bedeutung der durch Nullsetzen dieser Formen dargestellten Gebilde ergibt sich unmittelbar aus dem Uebertragungsprincipe und ist uns schon theilweise bekannt:

Die Gleichung $F = 0$ *ist die Gleichung der Curve* $f = 0$ *in Liniencoordinaten* (vgl. p. 278).

Die Gleichung $\Theta = 0$ *gibt für constante* x*: die Gleichung der ersten Polare von* x *in Liniencoordinaten; für constante* u*: den Ort der Pole* x*, deren erste Polaren die Linie* u *berühren, „die Poloconik der Geraden* u*"* (vgl. p. 317).

Für die letztere Curve folgt ferner wegen der Bedeutung des Punktepaares $\tau = 0$ bei den binären Formen aus dem Uebertragungsprincipe der Satz: *Die Schnittpunkte der Poloconik einer Geraden* u *mit dieser Geraden liegen äquianharmonisch zu den Schnittpunkten von* u *mit der Grundcurve* $f = 0$.

Die Bedeutung von $Q = 0$ finden wir durch die Bemerkung, dass Q aus der Bildung

$$Q' = (abu)^2\,(auv)\, b_x$$

für $v_i = c_i c_x^2$ entsteht. Es ist aber $Q' = 0$ die Bedingung, dass der Punkt x und der Schnittpunkt der Linien u, v einander conjugirt seien in Bezug auf die Poloconik der Geraden u; setzen wir also für v die Coordinaten $c_i c_x^2$ der linearen Polare von x, so folgt:

Vermöge der Gleichung $Q = 0$ *wird jeder Geraden* u *eine Curve dritter Ordnung zugeordnet als Ort der Punkte* x*, deren lineare Polare von der Linie* u *in einem Punkte getroffen wird, welcher zu* x *in Bezug auf die Poloconik von* u *conjugirt ist;* und ferner wegen der Bedeutung

*) Es sind die bei den binären Formen früher mit Δ und R bezeichneten Formen hier τ und B genannt, um Verwechslungen mit den bei den ternären cubischen Formen so genannten Bildungen zu verhüten.

des Punkte-Tripels $Q = 0$ bei binären Formen und dessen Beziehung zu $\tau = 0$: *Die Linie u wird von der ihr so zugehörigen Curve in drei Punkten geschnitten, welche in Bezug auf ihre Schnittpunkte mit ihrer Poloconik harmonisch sind zu ihren Schnittpunkten mit der Grundcurve.*

Von der Form Q werden wir jedoch im Folgenden keinen Gebrauch weiter machen. Von besonderer Wichtigkeit dagegen ist für uns die Form Θ. Wir bezeichnen dieselbe symbolisch durch:

$$\Theta = \Theta_x{}^2 u_\vartheta{}^2 = \Theta'_x{}^2 u_{\vartheta'}{}^2, \tag{4}$$

so dass nur das Product zweier Factoren Θ und zweier Factoren ϑ eine wirkliche Bedeutung erhält, nämlich:

$$2\,\Theta_i \Theta_k \vartheta_l \vartheta_m = (ab)_i\,(ab)_k\,(a_l b_m + b_l a_m)\,.$$

Wegen der Vertauschbarkeit von a und b ist also:

$$(abu)^2\, a_i b_k = \Theta_i \Theta_k u_\vartheta{}^2\,,$$

und hieraus ergibt sich eine einfachere Darstellung der Formen Q und F; denn *man kann hiernach in einer Form mit dem Factor* $(abu)^2$ *denselben immer durch* $u_\vartheta{}^2$ *ersetzen, wenn man gleichzeitig die in der Form noch linear vorkommenden* a *und* b *beide durch Symbole* Θ *ersetzt.**) Es ist daher auch:

$$Q = u_\vartheta{}^2\,(c\Theta u)\,c_x{}^2\Theta_x\,, \quad F = u_\vartheta{}^2\,(cdu)^2\,(\Theta cu)\,(\Theta du)$$

und, da F noch den Factor $(cdu)^2$ enthält, nach Wiederholung desselben Verfahrens:

$$F = u_\vartheta{}^2 u_{\vartheta'}{}^2\,(\Theta\Theta' u)^2\,. \tag{5}$$

Dies ist aber, gleich Null gesetzt, nichts anderes, als die Gleichung des in Punktcoordinaten gegebenen Kegelschnittes $\Theta_x{}^2 u_\vartheta{}^2 = 0$ in Liniencoordinaten, also ist auch für $\Theta_{ik} = \frac{1}{2}\frac{\partial\Theta}{\partial x_i \partial x_k}$ **):

$$F = -2 \begin{vmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} & u_1 \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \Theta_{23} & u_2 \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Θ (und damit auch F) können wir auch nicht symbolisch definiren, da Θ die Liniengleichung für den Kegelschnitt $a_y{}^2 a_x = \Sigma f_{ik} y_i y_k$ liefert, wo $f_{ik} = \frac{1}{6}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$; es wird (vgl. p. 317):

---

*) Durch Polarenbildung folgt hieraus auch, dass: $(abu)\,(abv)\,a_i b_k = \Theta_i \Theta_k u_\vartheta v_\vartheta$.

**) Wegen des Zahlenfactors vgl. die Theorie der quadratischen Formen, p. 278 und 285.

$$(7) \qquad \Theta = -2 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & u_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & u_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Geometrisch können wir die Gleichung (5) in folgender Weise auffassen. $F = 0$ ist die Gleichung der Poloconik von u in Liniencoordinaten; da diese Liniencoordinaten aber selbst wieder gleich den u gesetzt sind, so ist es die Bedingung, dass die Poloconik von u diese Linie selbst berührt.

*Hiernach sind die Tangenten der Grundcurve dadurch definirt, dass sie von ihren Poloconiken berührt werden.**) —

Die andere Gruppe zunächst zu betrachtender Formen entspringt aus den ternären quadratischen nach dem Grundsatze, dass die Invarianten und zugehörigen Formen der Polaren bez. Covarianten und Zwischenformen der Grundform ergeben (vgl. p. 316). Das System einer ternären quadratischen Form a_x^2 besteht aus den Bildungen:

$$\varphi = (abu)^2, \qquad A = (abc)^2.$$

Beim Uebergange zu cubischen Formen haben wir nur jedem Symbole $a, b \ldots$ entsprechend einen linearen symbolischen Factor $a_x, b_x \ldots$ hinzuzufügen und erhalten demnach die Bildungen:

$$(8) \qquad \begin{aligned} \Theta &= (abu)^2\, a_x b_x\,, \\ \Delta &= (abc)^2\, a_x b_x c_x\,, \end{aligned}$$

von denen die erstere mit der oben so bezeichneten Form übereinstimmt. Die zweite ist die uns bekannte Hesse'*sche Determinante*. Sie entsteht auch aus Θ, wenn man $u_i u_k = c_i c_k c_x$ setzt; sie kann daher mit Einführung der symbolischen Bezeichnung (4) durch

$$(9) \qquad \Delta = \Theta_x^2 c_\vartheta^2 c_x$$

dargestellt werden.

Eine Covariante von niedrigerer Ordnung als Δ kann es überhaupt nicht geben, wovon man sich leicht durch allgemeinere Ueberlegungen überzeugt. Ist nämlich eine Covariante einer Form n^{ter} Ordnung vom Grade $\varkappa$ in den Coëfficienten, so enthält sie $\varkappa$ verschiedene Symbole, jedes n-mal, also $\varkappa n$ Symbolreihen. Dieselbe Zahl muss aber gleich $3\lambda + \mu$ sein, wenn μ die Ordnung der Covariante und λ die Zahl der in ihr vorkommenden symbolischen Determinantenfactoren bedeutet. Wir haben also:

$$\varkappa n = 3\lambda + \mu.$$

*) Dies folgt auch direct aus der Theorie der binären cubischen Form, denn $\tau = 0$ hat immer und nur gleichzeitig mit $f = 0$ zwei gleiche Wurzeln.

Ebenso findet man für eine zugehörige Form von der Klasse ν und dem Grade $\varkappa$ mit λ Determinantenfactoren:

$$\varkappa n = 3\lambda - \nu,$$

und endlich für eine Zwischenform von der Ordnung μ, der Klasse ν, dem Grade $\varkappa$:

$$\varkappa n = 3\lambda + \mu - \nu.$$

Aus diesen drei Gleichungen ergibt sich für den Fall, dass n durch 3 theilbar ist, der Satz: *Ist die Ordnung einer ternären Grundform durch 3 theilbar, so besitzt sie nur solche Covarianten und zugehörige Formen, deren Ordnungs- bez. Klassenzahl auch durch 3 theilbar ist, und nur solche Zwischenformen, für welche dasselbe für die Differenz dieser beiden Zahlen gilt.* Aehnliches gilt überhaupt für die zu einer Grundform mit r homogenen Veränderlichen gehörigen invarianten Bildungen, wenn die Ordnung der Grundform durch r theilbar ist.

Analoge, allgemeine Betrachtungen können wir für Invarianten anstellen. Da eine solche sich immer aus Factoren des Typus (abc) zusammensetzt (vgl. p. 272), so muss sie wenigstens vom dritten Grade sein, in welchem Falle nur die Bildung $(abc)^n$ möglich ist. Dieselbe ändert aber, wenn n ungerade ist, ihr Zeichen durch Vertauschung zweier Symbole, verschwindet also dann indentisch: *Eine Form ungerader Ordnung besitzt keine Invariante dritten Grades.* Ferner muss für eine Invariante vom Grade $\varkappa$ mit λ Determinantenfactoren immer die Relation bestehen ($\mu = \nu = 0$ in obigen Gleichungen): $\varkappa n = 3\lambda$; d. h. *Eine Invariante vom Grade $\varkappa$ enthält $\frac{1}{3}\varkappa n$ Determinantenfactoren.*

Eine Invariante der cubischen Form muss also mindestens vom vierten Grade sein und vier Determinantenfactoren enthalten. In der That können wir eine solche aus vier Symbolen a, b, c, d direct bilden: Da kein Determinantenfactor dasselbe Symbol zweimal enthalten kann, ist der erste Factor jedenfalls (abc); die drei andern Factoren müssen jeder einmal d enthalten; und es bleibt mithin für die Vertheilung der übrigen Symbole a, b, c in denselben, abgesehen von der Wahl des Vorzeichens, nur eine Möglichkeit. Bezeichnen wir die so entstandene Invariante mit Aronhold durch S, so haben wir*):

$$S = (abc)(abd)(acd)(bcd). \tag{10}$$

---

*) Es ist dies die schon früher erwähnte Invariante (vgl. p. 522). Ausgerechnet findet man nach Aronhold für $f = \Sigma a_{ikh} x_i x_k x_h$:

$$\begin{aligned}\tfrac{3}{2} S = {} & (a_{122} a_{133} - a_{123}^2)^2 + (a_{222} a_{333} - a_{223}^2)(a_{111} a_{133} - a_{113}^2) \\ & + (a_{223} a_{333} - a_{233}^2)(a_{111} a_{122} - a_{112}^2) + (a_{222} a_{333} - a_{223} a_{233})(a_{112} a_{113} - a_{111} a_{123}) \\ & + (a_{122} a_{333} + a_{223} a_{133} - 2 a_{123} a_{233})(a_{112} a_{123} - a_{113} a_{122}) \\ & + (a_{122} a_{233} + a_{133} a_{222} - 2 a_{123} a_{223})(a_{113} a_{123} - a_{112} a_{133}).\end{aligned}$$

Die geometrische Bedeutung der Bedingung $S = 0$ werden wir erst später untersuchen.

Die so gefundene Invariante können wir aber auch aus der Form Θ ableiten; denn wegen (4) ist:

$$(abu)\,(abv)\,a_x b_x = \Theta_x{}^2 u_\vartheta v_\vartheta\,,$$

und wenn wir hierin die u durch c, die v durch d, die x durch die Unterdeterminanten von c und d ersetzen, so entsteht links wieder S; es ist also:

$$S = (\Theta c d)^2\, c_\vartheta d_\vartheta\,, \tag{11}$$

ein Ausdruck, welcher wieder aus $\Theta'_x{}^2 u_{\vartheta'}{}^2 = (c d u)^2 c_x d_x$ abgeleitet werden kann, indem man die x durch ϑ, die u durch Θ ersetzt. Es ist sonach auch:

$$S = \Theta_{\vartheta'}{}^2 \Theta'_\vartheta{}^2\,. \tag{12}$$

Hieraus können wir ferner für S eine nicht symbolische Definition ableiten. Es ist nämlich nach (12):

$$S = (\Theta_1 \vartheta_1' + \Theta_2 \vartheta_2' + \Theta_3 \vartheta_3')^2\, (\Theta_1' \vartheta_1 + \Theta_2' \vartheta_2 + \Theta_3' \vartheta_3)^2,$$

worin:

$$\Theta_i \Theta_k \vartheta_m \vartheta_n\,.\,\Theta_m' \Theta_n' \vartheta_i' \vartheta_k' = \frac{1}{4}\,\frac{\partial^4 \Theta}{\partial x_i \partial x_k \partial u_m \partial u_n}\cdot\frac{1}{4}\,\frac{\partial^4 \Theta}{\partial u_i \partial u_k \partial x_m \partial x_n}\,.$$

Wir erhalten also für S auch die vierfache Summe:

$$S = \frac{1}{16} \sum_{ikmn} \frac{\partial^4 \Theta}{\partial x_i \partial x_k \partial u_m \partial u_n}\cdot\frac{\partial^4 \Theta}{\partial x_m \partial x_n \partial u_i \partial u_k}\,. \tag{13}$$

Aus S entspringt nun eine zugehörige Form, wenn wir eine Symbolreihe, etwa d, durch Liniencoordinaten u ersetzen; es kommt wegen (10) und (11):

$$\begin{aligned} \Sigma &= (abc)\,(abu)\,(acu)\,(bcu) = \frac{1}{4} \sum \frac{\partial S}{\partial a_{ikh}} u_i u_k u_h \\ &= (\Theta c u)^2 c_\vartheta u_\vartheta\,, \end{aligned} \tag{14}$$

also eine zugehörige Form dritter Klasse und dritten Grades. Eine solche war aber durch die linke Seite der Gleichung der Cayley'schen Curve gegeben ((1) auf p. 517); da es ferner wegen der nothwendigen Anordnung der Symbolreihen — ähnlich wie oben bei S — nur *eine* zugehörige Form dritten Grades geben kann, so stellt uns $\Sigma = 0$ die Gleichung der Cayley'schen Curve dar. Es wird dies dadurch bestätigt, dass dieselbe für ein Kegelschnittnetz:

$$\varkappa a_x{}^2 + \lambda b_x{}^2 + \mu c_x{}^2 = 0$$

durch $(abu)\,(acu)\,(bcu) = 0$ gegeben war (vgl. 520). Setzen wir hierin nämlich $a_1 a_x{}^2$ für $a_x{}^2$, $b_2 b_x{}^2$ für $b_x{}^2$, $c_3 c_x{}^2$ für $c_x{}^2$, wo dann a, b, c Symbole der Grundform sind, so erhalten wir für das Polarennetz von f:

$$a_1 b_2 c_3 (abu)(acu)(bcu) = 0;$$

und der links stehende Ausdruck ist in der That wegen der Vertauschbarkeit von a, b, c gleich $\frac{1}{6}\Sigma$.

Die Gleichung $\Sigma = 0$ *stellt also die* Cayley'*sche Curve dar.*

Umgekehrt kann man natürlich auch S aus Σ ableiten: Setzen wir $\Sigma = u_s^3$, so ist:

(15) $$S = a_s^3.$$

Die bisherigen Bildungen zeigen schon die besondere Bedeutung der Form Θ. Wir wollen zunächst für dieselbe noch zwei im Folgenden nützliche Sätze beweisen. Wir bemerken zuvor, dass aus einer Form φ von der μ^{ten} Ordnung und der ν^{ten} Klasse, immer eine neue mit φ' zu bezeichnende Form

$$\varphi' = \frac{1}{\mu\nu}\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial u_1} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2 \partial u_2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3 \partial u_3}\right\}$$

hergeleitet werden kann, welche die Invarianteneigenschaft besitzt. Denn setzen wir symbolisch $\varphi = r_x^\mu u_\varrho^\nu$, so haben wir:

$$\varphi' = r_\varrho r_x^{\mu-1} u_\varrho^{\nu-1};$$

und dasselbe gilt für die durch Fortsetzung des Processes entstehenden Formen:

$$\varphi'' = r_\varrho^2 r_x^{\mu-2} u_\varrho^{\nu-2}, \text{ u. s. w.}$$

Unterwerfen wir nun Θ der angedeuteten Operation, so kommt wegen (4):

$$\Theta' = \Theta_\vartheta \Theta_x u_\vartheta = \tfrac{1}{2}(abu)\left\{(aba)\, b_x + (abb)\, a_x\right\},$$

was identisch verschwindet. Also:

Die aus Θ *abgeleitete Form* Θ' *verschwindet identisch.*

Dann müssen aber wegen $\Theta' = \Theta_\vartheta \Theta_x u_\vartheta$ alle Coëfficienten $\Theta_\vartheta \Theta_i \vartheta_k$ verschwinden, und somit folgt:

Jeder Ausdruck, welcher den symbolischen Factor Θ_ϑ *enthält, verschwindet identisch.*

Der zweite uns beschäftigende Satz über Θ bezieht sich auf die Bildung:

$$\begin{aligned} P = \Theta_{\vartheta'}^2 u_\vartheta^2 \Theta'^2_x &= \tfrac{1}{4}\Sigma \frac{\partial^2\Theta}{\partial x_i \partial x_k}\frac{\partial^2\Theta}{\partial u_i \partial u_k} \\ &= (abu)^2 a_{\vartheta'} b_{\vartheta'} \Theta'^2_x = (cdu)^2 c_{\vartheta'} d_{\vartheta'} \Theta'^2_x \\ &= (abc)(abd)(cdu)^2 a_x b_x. \end{aligned}$$

Auf diesen Ausdruck wenden wir die Identität an:

$$(cdu)\, b_x = (bcd)\, u_x + (bdu)\, c_x - (bcu)\, d_x.$$

Es wird dann:

$$P = (abc)(abd)(cdu)\, a_x \left[(bcd)\, u_x + (bdu)\, c_x - (bcu)\, d_x\right].$$

Hier hat rechts das erste Glied den wirklichen Factor u_x; das zweite aber ist mit dem dritten identisch, da beide durch Vertauschung der Symbole c, d in einander übergehen. Es ist also:

$$P = M \, . \, u_x + 2\,Q,$$

wo:

$$(16) \qquad M = (abc)\,(abd)\,(bcd)\,(cdu)\,a_x$$

$$(17) \qquad Q = (abc)\,(abd)\,(cdu)\,(bdu)\,a_x c_x \, .$$

Vertauschen wir in Q die Symbole a und c und addiren den so entstehenden Ausdruck von Q zu dem obigen, so wird:

$$2\,Q = (abc)\,(bdu)\,a_x c_x\,[(abd)\,(cdu) - (cbd)\,(adu)] \, .$$

Der in der Klammer stehende Theil ist nach einer bekannten Identität gleich $(acd)\,(bdu)$, und daher wird:

$$2\,Q = (abc)\,(acd)\,(bdu)^2\,a_x c_x \, .$$

Dies geht aber in $-P$ über, wenn man b mit c vertauscht; daher ist: $P = \frac{1}{2}\,M \, . \, u_x$.

In dem Ausdrucke M vertauschen wir nun a mit c und mit d und addiren die so entstehenden Ausdrücke zu M; wir erhalten dann:

$$3\,M = (abc)\,(abd)\,(bcd)\,[(cdu)\,a_x - (adu)\,c_x - (cau)\,d_x] \, .$$

Hier ist der eingeklammerte Theil nach der bekannten Identität gleich $(acd)\,u_x$; daher wird:

$$(18) \qquad 3\,M = (abc)\,(abd)\,(bcd)\,(acd) \, . \, u_x = S \, . \, u_x \, ,$$

und folglich:

$$(19) \qquad P = \tfrac{1}{6}\,S \, . \, u_x^2 \, .$$

Wir sprechen dies in dem Satze aus:

Die aus Θ abgeleitete Form

$$P = \Theta_{\vartheta}{}^2\,\Theta'_x{}^2\,u_{\vartheta}{}^2 = (abc)\,(abd)\,(cdu)^2\,a_x b_x$$

hat den Werth $\frac{1}{6}\,S \, . \, u_x^2$.

Geometrisch können wir diese Formel leicht auffassen, wenn wir beachten, dass P nichts anderes ist als die Invariante a_α^2 für die beiden Kegelschnitte $a_x^2 = \Theta_x{}^2\,u_\vartheta{}^2 = 0$, und $u_\alpha{}^2 = \Theta'_x{}^2\,u_{\vartheta'}{}^2 = 0$. Dabei ist a_x^2 und u_α^2 für dieselbe Form Θ geschrieben, aber in a_x^2 ist $\Theta = 0$ als Gleichung der Poloconik von u, in u_α^2 als Liniencoordinatengleichung des Polarkegelschnittes von x gedacht. In (19) liegt also der Satz (vgl. p. 385): *Der Polarkegelschnitt von x liegt mit der Poloconik von u vereinigt, sobald x mit u vereinigt liegt; dagegen auch ohne letztere Bedingung, wenn S verschwindet.*

Ganz ähnlich können wir die Gleichung (18) interpretiren. Aus (16) erkennt man nämlich, dass M nichts anderes als der Ausdruck $a_s^2\,u_s\,a_x$ ist, denn wir haben ($\Sigma = u_s^3$ gesetzt):

$$3 v_s^2 u_s = (abc)\{(abv)(acv)(bcu) + (bcv)(abv)(acu) + (acv)(bcv)(abu)\},$$
$$= 3(abc)(abv)(bcv)(acu),$$

und dies geht in M über, wenn man a durch d, v durch a ersetzt und mit a_x multiplicirt. In (18) liegt daher der schon früher angewandte Satz*):

Der Polarkegelschnitt eines Punktes x in Bezug auf die Grundcurve und der einer Geraden u in Bezug auf die Cayley'*sche Curve sind in vereinigter Lage, wenn u und x vereinigt liegen; jedoch auch ohne diese Bedingung, wenn S verschwindet.*

Die Gleichungen (18) und (19) sind nur specielle Fälle einer allgemeineren Regel, welche folgendermassen lautet:

Enthält die symbolische Darstellung einer Form zwei Factoren von S, etwa (abc) (abd) und ausserdem die Reihen c, d in einem symbolischen Determinantenfactor vereinigt, so ist die Form durch S theilbar.

Jedes Product der bezeichneten Art nämlich besteht aus einer Summe von Gliedern der Form:

$$(abc)(abd)(cdu)\, a_i b_k c_l d_m \,.\, E$$

wo E die Symbole a, b, c, d nicht mehr enthält, und wo die u entweder eine andere Symbolreihe oder Liniencoordinaten bedeuten. Dieses Glied wird nun immer durch S theilbar sein, sobald dies mit dem Ausdrucke

$$L = (abc)(abd)(cdu)\, a_x b_y c_z d_t$$

der Fall ist. Da aber letzterer für a und b symmetrisch ist, so entsteht er durch Polarenbildung aus der Form

$$L' = (abc)(abd)(cdu)\, a_x b_x c_z d_t;$$

und wir haben daher nur zu beweisen, dass diese den Factor S enthält. In L' vertauschen wir c, d und addiren die so entstehende Bildung zu L'; dann kommt:

$$2L' = (abc)(abd)(cdu)\, a_x b_x (c_z d_t - d_z c_t)$$
$$= (abc)(abd)(cdu)(cdv)\, a_x b_x,$$

wenn $v_i = (zt)_i$ gesetzt wird. Dieser Ausdruck entsteht aber aus

$$P = (abc)(abd)(cdu)^2\, a_x b_x,$$

wenn wir die Gleichung des Poles der Geraden v in Bezug auf $P = 0$

*) Vgl. p. 522. Die aus den Kegelschnitten $a_x^2 = 0$, $b_x^2 = 0$, $c_x^2 = 0$ abgeleitete Form $H(a, b, c) = (abu)(acu)(bcu)$ ist gleich $a_1 b_2 c_3 (abu)(acu)(bcu)$, wenn man sie für die Polarkegelschnitte der Coordinatenecken in Bezug auf $a_x^3 =$ bildet, also gleich $\frac{1}{6}\Sigma$. Daher der Factor $\frac{1}{2}$ in Gleichung (11) auf p. 522 statt des Factors 3 in Gleichung (18).

bilden. Da nun P nach (18) den Factor S hat, so gilt dasselbe auch für L', q. e. d. —

Mit den Formen Θ, Q, F, S, Σ sind die einfachsten Bildungen erschöpft; wir sind durch ihre Betrachtung gleichzeitig in den Stand gesetzt, *den syzygetischen Büschel* $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ näher zu studiren, wozu wir jetzt übergehen. Wir beginnen damit, die uns bekannten Formen (F und Q schliessen wir hier jedoch aus) statt für f, für die zusammengesetzte Function $\varkappa f + \lambda \Delta$ zu bilden.

Zu dem Zwecke ist die Einführung des sogenannten *δ-Processes* nützlich, von dem wir schon früher nachgewiesen haben, dass er die Invarianteneigenschaft einer Form φ des zu f gehörigen Systems nicht stört (p. 268). Dieser Process besteht darin, dass man φ nach den Coëfficienten a_{ikh} von f differentiirt, mit den entsprechenden Coëfficienten α_{ikh} von Δ multiplicirt und die Producte addirt; d. h. *er ist definirt durch die Gleichung:*

$$\delta \varphi = \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial a_{ikh}} \alpha_{ikh},$$

wo sich die Summe auf alle Combinationen der Indices i, k, h bezieht. Bezeichnen wir nun mit $\varphi_{\varkappa\lambda}$ die Form, welche zu $\varkappa f + \lambda \Delta$ in derselben Beziehung steht wie φ zu f, so erhalten wir nach dem Taylor'schen Satze für $\varphi_{\varkappa\lambda}$ eine nach Potenzen von $\varkappa$, λ fortschreitende Reihenentwicklung, deren Coëfficienten φ_i aus einander in bekannter Weise durch Differentiationsprocesse entstehen. Diese letzteren aber werden wir später durch δ-Processe ersetzen lernen, und somit haben wir zunächst den Einfluss des Processes δ auf f, Δ, Θ, S, Σ zu untersuchen.*)

Der Definition nach ist nun:

$$\delta f = \Delta. \tag{20}$$

Um den Einfluss des δ-Processes auf einen complicirteren *symbolischen* Ausdruck φ festzustellen, bemerken wir, dass jede in φ enthaltene Symbolreihe ein lineares homogenes Vorkommen der Coëfficienten a_{ikh} in φ anzeigt. Man sieht daraus, dass der Process der Differentiation auf die Summe der Ausdrücke führt, welche entstehen, wenn man nur bezüglich nach einer solchen Reihe differentiirt; es ist:

$$\delta \varphi (a, b, c \dots) = \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial a_{ikh}} \alpha_{ikh} + \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial b_{ikh}} \alpha_{ikh} + \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial c_{ikh}} \alpha_{ikh} + \dots$$

Also: *Aus einer Form φ entsteht die Form $\delta\varphi$, wenn man in der*

---

*) Beide Processe unterscheiden sich dadurch, dass bei jenen Differentiationen die α_{ikh} als von den a_{ikh} unabhängig angesehen werden, was beim δ-Processe nicht geschieht. Der letztere ist von Aronhold eingeführt.

symbolischen Form von φ *der Reihe nach jede Symbolreihe durch eine Symbolreihe von* Δ *ersetzt und die Summe der erhaltenen Ausdrücke bildet.*

Um dann statt der Symbole α von

$$\Delta = (abc)^2 a_x b_x c_x = \alpha_x^3 = \beta_x^3 \dots \tag{21}$$

die Symbole a, b, c der Grundform f einzuführen, hat man zu beachten, dass wegen der Vertauschbarkeit von a, b, c in Δ

$$\begin{aligned}\alpha_i \alpha_k \alpha_h &= \tfrac{1}{6} \frac{\partial \Delta}{\partial x_i \partial x_k \partial x_h} = \tfrac{1}{6} (abc)^2 \Sigma a_i b_k c_h \\ &= (abc)^2 a_i b_k c_h\end{aligned}$$

ist. *Kommt daher in einem symbolischen Producte das Symbol* α *vor, so geschieht die Einführung von Symbolen* a, b, c *der Grundform dadurch, dass man statt des dreimal vorkommenden* α *einmal* a, *einmal* b *und einmal* c *schreibt und mit* $(abc)^2$ *multiplicirt.*

Die Anwendung des δ-Processes auf Δ ergibt also nach der ersteren Regel zunächst:

$$\delta \Delta = \delta \left\{(abc)^2 a_x b_x c_x\right\} = 3\,(ab\alpha)^2 a_x b_x \alpha_x ,$$

und dann durch Anwendung der zweiten Regel, wenn wir für α Symbole c, d, e von f einführen:

$$\delta \Delta = 3\,(abc)\,(abd)\, a_x b_x e_x\, (cde)^2 .$$

Der hier rechts stehende Ausdruck entsteht aber aus P, wenn man $u_i = e_i$ setzt und mit e_x multiplicirt; es ist deshalb nach Gleichung (19), da $e_x^3 = f$:

$$\delta \Delta = 3\,(ab\alpha)^2 a_x b_x \alpha_x = \tfrac{1}{2} S \,.\, f. \tag{22}$$

Die Anwendung des Processes δ *auf die Covariante* Δ *führt also auf die Form* f *zurück, multiplicirt mit* $\frac{1}{2}$ S.

Hieraus geht mit Rücksicht auf (20) hervor, dass auch die wiederholte Anwendung des Processes δ auf Δ zu keinen neuen Covarianten führen kann. Alle dadurch entstehenden Covarianten müssen lineare Functionen von f und Δ sein, und die Coëfficienten derselben sind Invarianten, welche durch wiederholte Anwendung des δ-Processes auf S erzeugt werden.

Der Ausdruck $(ab\alpha)^2 a_x b_x \alpha_x$ ist nun nichts anderes als die eine simultane Invariante der Polarkegelschnitte von x in Bezug auf $f = 0$ und $\Delta = 0$. In (22) liegt also der Satz: *Wenn* x *ein Punkt einer Curve dritter Ordnung ist, so kann man dem Polarkegelschnitte von* x *in Bezug auf dieselbe Dreiecke umschreiben, welche Polardreiecke des Polarkegelschnittes von* x *in Bezug auf die* Hesse'*sche Curve sind, und letzterem Dreiecke einschreiben, welche Polardreiecke des ersteren sind. Dies gilt für jeden Punkt* x, *wenn die Invariante* S *verschwindet.*

Gehen wir auf den Fall $S = 0$ etwas genauer ein. Zu den Kegelschnitten des Netzes $\alpha_y^2 \alpha_x = 0$ stehen nach unsern früheren Untersuchungen zweifach unendlich viele in der besagten Beziehung; und diese bilden „das conjugirte Gewebe", lassen sich also in der Form $\varkappa u_\beta^2 + \lambda u_\gamma^2 + \mu u_\delta^2 = 0$ darstellen, wenn $u_\beta^2 = 0$, $u_\gamma^2 = 0$, $u_\delta^2 = 0$ drei beliebige Curven des Gewebes sind. Die Kegelschnitte $\Theta = (abu)^2 a_x b_x = 0$ hängen dagegen im Allgemeinen von zwei Parametern quadratisch ab, während ihre Gleichung in Punktcoordinaten $\alpha_y^2 \alpha_x = 0$ diese Parameter linear enthält. Wenn nun $S = 0$ ist, so muss daher das quadratische Vorkommen von x_1, x_2, x_3 nur scheinbar sein; letzteres wird aber nur möglich, wenn alle Kegelschnitte des Gewebes ein gemeinsames Polardreieck haben*); denn dann lassen sie sich in der Form darstellen:

$$\varkappa u_1^2 + \lambda u_2^2 + \mu u_3^2 = 0,$$

und in Punktcoordinaten für $\varkappa\lambda = m$, $\lambda\mu = k$, $\mu\varkappa = l$:

$$k y_1^2 + l y_2^2 + m y_3^2 = 0,$$

wo dann k, l, m drei neue, ebenfalls linear vorkommende Parameter sind. In diesem Falle besteht aber das conjugirte Netz $\alpha_y^2 \alpha_x = 0$ des Gewebes $\Theta = 0$ aus den Kegelschnitten durch die Ecken des dem Gewebe gemeinsamen Polardreiecks; dieselben haben also drei Punkte gemein, d. h. die Curve $\Delta = \alpha_y^3 = 0$ hat drei Doppelpunkte, besteht aus drei Geraden (p. 382). Da ferner die Hesse'sche Curve des Gewebes $\Theta = 0$ zugleich Cayley'sche Curve des conjugirten Netzes ist (vgl. p. 521), so haben wir den Satz:

Die Bedingung $S = 0$ sagt aus, dass die Hesse'*sche Curve von $f = 0$ in drei Gerade zerfällt. Die* Cayley'*sche Curve besteht alsdann aus den drei Doppelpunkten der* Hesse'*schen; und das von letzterer gebildete Dreieck ist Polardreieck in Bezug auf alle Polarkegelschnitte der Grundcurve.* Aus dem letzten Theile dieses Satzes folgt ferner, *dass sich die Gleichung der Grundcurve, wenn S verschwindet, in die Form transformiren lässt:*

*) Genauer stellt sich der Beweis, wie folgt: Die Behauptung des Textes können wir auch dahin aussprechen, dass *es kein anderes C_2-Netz gibt, bei dem durch zwei beliebige Punkte nur eine Curve geht und auch zwei beliebige Gerade nur von einer Curve berührt werden, als dasjenige, in welchem alle C_2 ein gemeinsames Polardreieck haben.* Beweis: Alle durch einen beliebigen Punkt x gehenden C_2 bilden einen Büschel von C_2, die jedenfalls ein gemeinsames Polardreieck haben; eine beliebige Gerade u wird von zwei C_2 dieses Büschels berührt, denen dasselbe Polardreieck gemeinsam ist. Seien ihre Gleichungen in Liniencoordinaten $\varphi = 0$, $\psi = 0$, so sollen alle anderen die Linie u berührenden C_2 des Netzes in der Form $\varphi + \lambda\psi = 0$ darstellbar sein, d. h. sie haben auch alle dasselbe Polardreieck gemeinsam. Da nun x und u ganz beliebig waren, so ist hiermit unsere Behauptung bewiesen.

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0.$$

In diesem Falle ist ferner das Gewebe der Polarkegelschnitte der Cayley'schen Curve zu dem Netze derer der Grundcurve conjugirt, indem alle Curven des ersteren von den Seiten jenes Dreiecks berührt werden. Hieraus würde wieder folgen, dass der Ausdruck $M = a_s^2 u_s \alpha_x$ bis auf einen Zahlenfactor gleich dem Producte $S . u_x$ sein muss, wie wir es in Gleichung (18) gefunden haben. Umgekehrt hätten wir auch aus letzter Gleichung die Bedeutung des Verschwindens der Invariante S und die Nothwendigkeit der Relation (22) erschliessen können.

Ein analoger Satz wie für die aus f durch den Process δ entstehenden Bildungen gilt für die aus Θ durch denselben Process abgeleiteten. Aus Θ entspringt zunächst die Form

$$(23) \qquad \mathsf{H} = \tfrac{1}{2}\,\delta\,\Theta = \tfrac{1}{2}\,\delta\,\left\{(a\,b\,u)^2\,a_x b_x\right\} = (a\,\alpha\,u)^2\,a_x \alpha_x\,.$$

Wie man sofort sieht, *ist* $\mathsf{H} = 0$ *die Gleichung eines Kegelschnittes, dessen Tangenten* u *von den Polarkegelschnitten des Punktes* x *in Bezug auf* $f = 0$ *und* $\Delta = 0$ *in harmonischen Punktepaaren getroffen werden* (vgl. p. 281).

Wenden wir nun auf H abermals den Process δ an, so entstehen zwei Glieder, deren eines durch Anwendung der Operation auf die durch die Symbole a vertretenen Coëfficienten von f gebildet wird, während der andere aus der Anwendung der Operation auf die durch die α vertretenen Coëfficienten von Δ entspringt. Der erste Theil gibt eine neue Zwischenform

$$(24) \qquad \mathsf{K} = (\alpha\,\beta\,u)^2\,\alpha_x \beta_x\,.$$

Der zweite aber führt wegen (22) auf Θ zurück; denn letztere Gleichung sagt aus, dass:

$$(25) \qquad \delta\,\alpha_{ikh} = \tfrac{1}{2}\,S\,.\,a_{ikh} = \tfrac{1}{2}\,S\,.\,b_{ikh}\,.$$

Dieser zweite Theil wird sonach $\frac{1}{2}\,S\,(a\,b\,u)^2\,a_x b_x$, und es folgt:

$$(26) \qquad \delta\,\mathsf{H} = \mathsf{K} + \tfrac{1}{2}\,S\,.\,\Theta\,.$$

Mit der Form K ist aber diese Reihe von Bildungen auch abgeschlossen; denn mit Hülfe derselben Betrachtung erhält man sofort:

$$(27) \qquad \delta\,\mathsf{K} = S\,(a\,\alpha\,u)^2\,a_x \alpha_x = S\,.\,\mathsf{H}\,.$$

Die Formen Θ, H, K *bilden demnach, wie* f *und* Δ, *dem Processe* δ *gegenüber ein in sich geschlossenes System.*

Zwei ähnliche in der Weise begrenzte Gruppen gehen aus den Formen S und Σ hervor. Zunächst finden wir:

$$\delta\,S = \delta\,\left\{(a\,b\,c)\,(a\,b\,d)\,(a\,c\,d)\,(b\,c\,d)\right\} = 4\,(a\,b\,c)\,(a\,b\,\alpha)\,(a\,c\,\alpha)\,(b\,c\,\alpha)$$

$$\delta\,\Sigma = \delta\,\left\{(a\,b\,c)\,(a\,b\,u)\,(a\,c\,u)\,(b\,c\,u)\right\} = 3\,(a\,b\,\alpha)\,(a\,b\,u)\,(a\,\alpha\,u)\,(b\,\alpha\,u).$$

Bezeichnen wir die beiden neuen Formen, abgesehen von den Zahlenfactoren bez. mit T und T, so haben wir also:

$$(28)\qquad \begin{aligned} \tfrac{1}{4}\,\delta S &= T = (abc)\,(ab\alpha)\,(ac\alpha)\,(bc\alpha) \\ \tfrac{1}{3}\,\delta \Sigma &= \mathsf{T} = (ab\alpha)\,(abu)\,(a\alpha u)\,(b\alpha u)\,. \end{aligned}$$

Um die Eigenschaften von T und T kennen zu lernen, geben wir zunächst ihre Ausdrücke in den ursprünglichen Symbolen von f, und zwar nach unserer früheren Regel über die Ersetzung der Symbole von Δ durch diejenigen von f. Wir ersetzen also die α einzeln durch d, e, f und multipliciren mit $(def)^2$; es wird dann:

$$(29)\qquad \begin{aligned} T &= (abc)\,(abd)\,(ace)\,(bcf)\,(def)^2 \\ \mathsf{T} &= (abd)\,(abu)\,(aeu)\,(bfu)\,(def)^2\,. \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass T ebenso aus T entsteht, wie Σ aus S, indem man die c durch Liniencoordinaten u ersetzt; und dies ist zur Berechnung von δT wichtig. Bildet man aber den Ausdruck $\Sigma \frac{\partial T}{\partial a_{ikh}} u_i u_k u_h$, so erhält man im Ganzen 6 Terme, welche dadurch entstehen, dass der Reihe nach jede der 6 in T vorkommenden Symbolreihen durch u ersetzt wird. Nun treten a, b, c in T symmetrisch auf; denn T ändert sich nicht, wenn man etwa a, b vertauscht, sobald nur gleichzeitig e, f vertauscht werden. Die Symbolreihen a, b, c liefern also drei gleiche Terme, welche nach (29) sämmtlich gleich T sind. Ebenso liefern die Reihen d, e, f drei gleiche Terme, denn auch sie kommen insofern symmetrisch vor, als sich T nicht ändert, wenn man etwa d mit e und zugleich b mit c vertauscht. Bezeichnen wir also die drei von den Reihen d, e, f herrührenden Terme mit T', so haben wir:

$$\Sigma \frac{\partial T}{\partial a_{ikh}} u_i u_k u_h = 3\,(\mathsf{T} + \mathsf{T}')\,.$$

Wir werden jedoch zeigen, *dass* T *und* T' *einander gleich sind.* Es ist:

$$\mathsf{T}' = (abc)\,(abd)\,(ace)\,(bcu)\,(deu)^2,$$

und wenn wir in T c für das Symbol f schreiben und a mit d vertauschen:

$$\mathsf{T} = (abd)\,(bdu)\,(deu)\,(bcu)\,(ace)^2\,.$$

Die Differenz beider Ausdrücke gibt also:

$$\mathsf{T}' - \mathsf{T} = (abd)\,(ace)\,(bcu)\,(deu)\,\{(abc)\,(deu) - (ace)\,(bdu)\}\,.$$

Die beiden in Klammern eingeschlossenen Glieder sind aber nach einer bekannten Identität gleich

$$(dau)\,(ebc) + (dcu)\,(abe)\,.$$

Setzt man dies ein, so folgt aus einem früheren Satze, dass $\mathsf{T}' - \mathsf{T}$ durch S theilbar ist; denn der erste Theil enthält $(ebc)\,(ace)$ und

a, b noch vereinigt, der andere enthält (abe) (abd) und d, e noch vereinigt. Es ist also:

$$\mathsf{T}' - \mathsf{T} = S \,.\, \mathsf{X}.$$

Aber der Factor X kann nur noch, ausser drei Reihen u, eine Symbolreihe von f enthalten; und da hieraus kein nicht verschwindender symbolischer Determinantenfactor zu bilden ist, so folgt:

$$\mathsf{T}' - \mathsf{T} = 0, \text{ w. z. b. w.}$$

Zwischen der Invariante T und der zugehörigen Form T *bestehen also die Relationen*:

$$(30) \qquad \begin{aligned} \mathsf{T} &= \tfrac{1}{6} \Sigma \frac{\partial T}{\partial a_{ikh}} u_i u_k u_h = u_\iota^3 \\ T &= a_\iota^3 \,. \end{aligned}$$

Nun kann eine Curve dritter Ordnung nur *eine* absolute Invariante haben, denn man kann in ihrer Gleichung alle Constanten bis auf eine durch lineare Transformation zerstören. Es gibt daher auch nur zwei Invarianten, S und T; und der Process δ auf T angewandt muss auf S zurückführen. Um δT wirklich zu bilden, brauchen wir wegen (30) nur in $6\,\mathsf{T}$ oder $6\,\mathsf{T}'$ die u durch Symbole α von Δ zu ersetzen. Wir wählen T' und erhalten also:

$$\delta T = 6\,(abc)\,(abd)\,(ace)\,(bc\alpha)\,(de\alpha)^2 \,.$$

Nach (25) ist aber:

$$\tfrac{1}{3}\,\delta\,\alpha_{ikh} = (de\alpha)^2\; d_i e_k \alpha_h = \frac{S}{6}\, a_i a_k a_h = \frac{S}{6}\, d_i d_k d_h \,;$$

wir haben also in δT statt d, e, α immer d und $\frac{S}{6}$ statt $(de\alpha)^2$ zu schreiben; d. h. es ist:

$$(31) \qquad \delta T = (abc)\,(abd)\,(acd)\,(bcd)\,.\, S = S^2 \,.$$

Die Invarianten S und T bilden daher, wie f und Δ oder Θ, H *und* K, *ein in sich geschlossenes System gegenüber dem δ-Processe.*

Die geometrische Bedeutung der Bedingung $T = 0$, werden wir später bei Bildung von $\Delta_{\varkappa\lambda}$ sofort erkennen; die der Curve $\mathsf{T} = 0$ ergibt sich durch folgende Betrachtung. Wir gehen von der mit T' bezeichneten Form von T aus:

$$\mathsf{T} = (abc)\,(abd)\,(ace)\,(bcu)\,(deu)^2 \,.$$

Dieselbe kann aus den Coëfficienten von Θ und Σ zusammengesetzt werden. Denn da

$$\Theta = (deu)^2\, d_x e_x = \Theta_x{}^2 u_\vartheta{}^2 \,,$$

so folgt, wenn man nach den x differentiirt, mit den y multiplicirt und addirt, wegen der Vertauschbarkeit von d und e:

$$\Theta_x \Theta_y u_\vartheta^2 = (d e u)^2 d_x d_y .$$

Ersetzt man nun links und rechts die x durch Determinanten der a, b, die y durch Determinanten der a, c und multiplicirt mit (abc) (bcu), so erhält man rechts die obige Form von $\mathsf{T}' = \mathsf{T}$; und es ist also:

$$\mathsf{T} = (\Theta a b)\,(\Theta a c)\,(a b c)\,(b c u)\,u_\vartheta^2 .$$

Nun ist ferner nach (20), wenn s_{ikh} die Coëfficienten von Σ bedeuten:

$$v_s^2 u_s = (a b c)\,(a b v)\,(a c v)\,(b c u) ,$$

und demnach, wenn wir v durch Θ ersetzen und mit u_ϑ^2 multipliciren:

$$\mathsf{T} = u_t^3 = \Theta_s^2 u_s u_\vartheta^2 . \tag{32}$$

Hier steht aber rechts die eine simultane Invariante p_σ^2 der Poloconik $p_x^2 \equiv \Theta = 0$ von u und des Polarkegelschnittes $v_\sigma^2 = v_s^2 u_s = 0$ von u in Bezug auf $\Sigma = 0$.

Die Curve dritter Klasse $\mathsf{T} = 0$ *wird also von denjenigen Linien* u *umhüllt, deren Polarcurve (zweiter Klasse) in Bezug auf* $\Sigma = 0$ *mit ihrer Poloconik (zweiter Ordnung) in Bezug auf* $f = 0$ *in vereinigter Lage ist.*

Die in (32) gegebene Form von T führt uns auch zu dem Ausdrucke von $\delta \mathsf{T}$; wir wollen die betreffende Rechnung aber nicht mehr durchführen, da wir die Form $\mathsf{T}_{\varkappa\lambda}$ im Folgenden nicht weiter benutzen werden. Es seien hier nur die dabei benutzten Hülfsgleichungen angeführt, um zu zeigen, wie sich der Inhalt derselben auch geometrisch formuliren lässt. Mit Rücksicht auf die Werthe von $\delta\Theta$ und $\delta\Sigma$ in (23) und (28) folgt nämlich aus (32):

$$\delta \mathsf{T} = 2\,\mathsf{H}_s^2 u_s u_\eta^2 + 3\,\Theta_t^2\, u_t u_\vartheta^2 ; \tag{33}$$

und zu weiteren Umformungen dieses Ausdruckes beweist man dann die folgenden drei Gleichungen*):

$$\mathsf{H} = -\tfrac{1}{6} S \,.\, u_x^2 + u_s^2 d_s d_x^2 \tag{34}$$

$$\mathsf{H}_s^2 u_s u_\eta^2 = \tfrac{1}{6} S \,.\, \Sigma \tag{35}$$

$$\Theta_t^2 u_t u_\vartheta^2 = \tfrac{1}{6} S \,.\, \Sigma , \tag{36}$$

Gleichungen, welche bez. zu den folgenden Sätzen Veranlassung geben:

Ist u *eine Gerade, welche die ersten Polaren von* x *in Bezug auf* f *und* Δ *in harmonischen Punktepaaren trifft, so geht die lineare Polare von* x *in Bezug auf* $f = 0$ *durch den Pol von* u *in Bezug auf* $\Sigma = 0$, *wenn* x *und* u *vereinigt liegen; dagegen unabhängig davon, wenn* S *verschwindet.*

Die Curve 2. Ordnung, welche einer Linie u *durch die Gleichung* $\mathsf{H} = 0$ *in bekannter Weise zugeordnet ist, liegt für die Tangenten* u *der* Cayley'*schen Curve mit der Polare (2. Klasse) von* u *in Bezug auf*

*) Vgl. Clebsch und Gordan: Math. Annalen, Bd. 6.

letztere Curve vereinigt; dies gilt aber für jede Linie u, wenn S verschwindet.

Die Cayley*'sche Curve wird auch umhüllt von denjenigen Linien u, deren Polarkegelschnitt in Bezug auf* $\mathsf{T} = 0$ *mit ihrer Poloconik vereinigt liegt. Letzteres tritt aber beim Verschwinden von S für jede Linie u ein.* — Es liegt hierin nach der Definition von T durch (32) eine gewisse Reciprocität zwischen den Curven $\Sigma = 0$ und $\mathsf{T} = 0$.

Fasst man nun schliesslich die in (33), (35) und (36) gegebenen Resultate zusammen, so ergibt sich

$$(37) \qquad \delta \mathsf{T} = \tfrac{5}{6} S \, . \, \Sigma \, .$$

Die Formen Σ *und* T *bilden also in der That in Bezug auf den* δ*-Process ein ebenso in sich geschlossenes System, wie f und* Δ. Wir werden später sehen, wie die Schaar $\varkappa \Sigma + \lambda \mathsf{T} = 0$ auch geometrisch dem Büschel $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ gegenübersteht; sie bildet eben die Schaar von Curven dritter Klasse, welche die 9 harmonischen Geraden zu gemeinsamen Rückkehrtangenten haben.

Durch die Formeln für $\delta\Delta$, $\delta\Theta$, $\delta\mathsf{H}$, $\delta\mathsf{K}$, $\delta\Sigma$, δS, $\delta\mathsf{T}$, δT haben wir nun das Material gewonnen, um diese Formen für die zusammengesetzte Function $\varkappa f + \lambda \Delta$ zu bilden.

Die Form $\Theta_{\varkappa\lambda}$ können wir ohne Weiteres hinschreiben; es ist:

$$(38) \quad \begin{aligned} \Theta_{\varkappa\lambda} &= (a b u)^2 a_x b_x \, . \, \varkappa^2 + \left\{ (\alpha b u)^2 \alpha_x b_x + (a \alpha u)^2 a_x \alpha_x \right\} . \, \varkappa\lambda + (\alpha \beta u)^2 \alpha_x \beta_x \, . \, \lambda^2 \\ &= \varkappa^2 \Theta + 2 \varkappa \lambda \mathsf{H} + \lambda^2 \mathsf{K} \, . \end{aligned}$$

Für $\Delta_{\varkappa\lambda}$ finden wir zunächst die Entwicklung:

$$(39) \qquad \Delta_{\varkappa\lambda} = \Delta \varkappa^3 + 3 \Delta_1 \varkappa^2 \lambda + 3 \Delta_2 \varkappa \lambda^2 + \Delta_3 \lambda^3 \, ,$$

wo nach dem Taylor'schen Satze:

$$\Delta_1 = (a b \alpha)^2 a_x b_x \alpha_x \, , \quad \Delta_2 = (a \alpha \beta)^2 a_x \alpha_x \beta_x \, , \quad \Delta_3 = (\alpha \beta \gamma)^2 \alpha_x \beta_x \gamma_x \, .$$

Jede von diesen Formen entsteht aus der vorhergehenden durch einen Differentiationsprocess, bei welchem die α_{ikh} von den a_{ikh} als unabhängig betrachtet werden, während der δ-Process sich immer auch auf die in den α_{ikh} enthaltenen Coëfficienten von f erstreckt. Deuten wir daher durch einen dem δ zugefügten Index α an, dass sich der δ-Process nur auf die in den α_{ikh} enthaltenen Coëfficienten der Grundform beziehen soll, so haben wir:

$$\delta \Delta = 3 \Delta_1 \, , \quad \delta \Delta_1 = 2 \Delta_2 + \delta_\alpha \Delta_1 \, , \quad \delta \Delta_2 = \Delta_3 + \delta_\alpha \Delta_2 \, .$$

Nun ist aber nach Gleichung (25): $\delta \alpha_{ikh} = \frac{1}{2} S \, . \, a_{ikh}$, also auch:

$$\delta_\alpha \Delta_1 = \tfrac{1}{2} S \Delta \, , \quad \delta_\alpha \Delta_2 = S \Delta_1 \, ,$$

und somit können wir aus obigen Gleichungen die Δ_i berechnen, es wird:

$$(40)\quad \begin{cases} \Delta_1 = \frac{1}{3}\,\delta\Delta = \frac{1}{6}\,Sf \\ \Delta_2 = \frac{1}{12}\,\delta(Sf) - \frac{1}{4}\,S\Delta = \frac{1}{3}\,Tf - \frac{1}{6}\,S\Delta \\ \Delta_3 = \frac{1}{3}\,\delta\left(Tf - \frac{1}{2}\,S\Delta\right) - \frac{S^2}{6}\,f = \frac{1}{12}\,S^2 f - \frac{1}{3}\,T\Delta\,. \end{cases}$$

Setzen wir die gefundenen Werthe in die Formel für $\Delta_{\varkappa\lambda}$ ein und ordnen nach f und Δ, so kommt*):

$$(41)\quad \Delta_{\varkappa\lambda} = \left(\varkappa^3 - \frac{S}{2}\,\varkappa\lambda^2 - \frac{T}{3}\,\lambda^3\right)\Delta + \left(\frac{S}{2}\,\varkappa^2\lambda + T\varkappa\lambda^2 + \frac{S^2}{12}\,\lambda^3\right)f\,.$$

Man übersieht sofort, dass die für die Ausdrücke Δ_i angestellten Betrachtungen für Coëfficienten einer jeden Entwicklung:

$$\varphi_{\varkappa\lambda} = \varkappa^n\varphi + n\varkappa^{n-1}\lambda\varphi_1 + \frac{n\,.\,n-1}{1\,.\,2}\,\varkappa^{n-2}\lambda^2\varphi_2 + \ldots + \lambda^n\varphi_n$$

Gültigkeit haben, wenn $\varphi_{\varkappa\lambda}$ die zu f gehörige Form φ, gebildet für $\varkappa f + \lambda\Delta$, bedeutet. *Für die Coëfficienten φ_i besteht immer das System von Gleichungen:*

$$(42)\quad \begin{cases} \delta\varphi = n\,\varphi_1\,, & \delta\varphi_1 = (n-1)\varphi_2 + \frac{1}{2}S.\;\varphi\,, \\ \delta\varphi_2 = (n-2)\varphi_3 + \frac{1}{2}S\,.\,2\,\varphi_1\,, & \delta\varphi_3 = (n-3)\,\varphi_4 + \frac{1}{2}S.3\,\varphi_2\,, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \delta\varphi_{n-1} = \varphi_n + \frac{1}{2}S.(n-1)\,\varphi_{n-2}\,, & \delta\varphi_n = \frac{1}{2}S.n\,\varphi_{n-1}\,. \end{cases}$$

Benutzen wir diese Gleichungen zu der Berechnung der Coëfficienten Σ_i in

$$\Sigma_{\varkappa\lambda} = \Sigma\varkappa^3 + 3\,\Sigma_1\varkappa^2\lambda + 3\,\Sigma_2\varkappa\lambda^2 + \Sigma_3\lambda^3$$

so erhalten wir:

$$\Sigma_1 = \mathsf{T},\quad \Sigma_2 = \frac{1}{6}\,S\Sigma\,,\quad \Sigma_3 = \frac{2}{3}\,T\Sigma - \frac{1}{2}\,S\mathsf{T}$$

$$(43)\quad \Sigma_{\varkappa\lambda} = \left(\varkappa^3 + \frac{1}{2}\,S\varkappa\lambda^2 + \frac{2}{3}\,T\lambda^3\right)\Sigma + \left(3\,\varkappa^2\lambda - \frac{1}{2}\,S\lambda^3\right)\mathsf{T}\,.$$

Die Gleichungen $\Delta_3 = 0$ und $\Sigma_3 = 0$ geben bez. die Hesse'sche und Cayley'sche Curve von $\Delta = 0$; wir haben daher wegen der für Δ_3 und Σ_3 gefundenen Ausdrücke die Sätze:

Wenn S verschwindet, so fällt die Hesse'*sche Curve von Δ mit Δ zusammen, d. h. $\Delta = 0$ besteht aus drei geraden Linien, und die* Cayley'*sche Curve von $\Delta = 0$ fällt mit der von $f = 0$ zusammen, sie besteht aus drei Punkten;* wie wir schon früher fanden (p. 553 f.).

Wenn die Invariante T verschwindet, so ist die Hesse'*sche Curve der* Hesse'*schen wieder die Grundcurve $f = 0$; die* Cayley'*sche Curve der* Hesse'*schen fällt dagegen mit $\mathsf{T} = 0$ zusammen.*

In der Formel für $\Delta_{\varkappa\lambda}$ bemerkt man, dass die Coëfficienten von f und Δ die nach $\varkappa$ und λ genommenen Differentialquotienten der-

*) In dieser Formel liegt wieder der Hesse'sche Satz, vgl. p. 505.

selben biquadratischen binären Form $G(\varkappa, \lambda) = G$ sind, welche den Ausdruck hat*):

$$G = \varkappa^4 - S\varkappa^2\lambda^2 - \tfrac{4}{3}\, T\varkappa\lambda^3 - \tfrac{1}{12}\, S^2\lambda^4. \tag{44}$$

In der That wird:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}\frac{\partial G}{\partial \varkappa} &= G_1 = \varkappa^3 - \frac{S}{2}\varkappa\lambda^2 - \frac{T}{3}\lambda^3 \\ \tfrac{1}{4}\frac{\partial G}{\partial \lambda} &= G_2 = -\frac{S}{2}\varkappa^2\lambda - T\varkappa\lambda^2 - \frac{S^2}{12}\lambda^3, \end{aligned} \tag{45}$$

und folglich nimmt $\Delta_{\varkappa\lambda}$ die einfache Gestalt an:

$$\Delta_{\varkappa\lambda} = G_1\Delta - G_2 f. \tag{46}$$

Diese Formel können wir benutzen, um die Bildungen $S_{\varkappa\lambda}$, $T_{\varkappa\lambda}$, u. s. f. einfach herzustellen. Wir brauchen nur den Einfluss des δ-Processes auf eine Form $\varphi_{\varkappa\lambda}$ zu untersuchen, wenn sich derselbe statt auf die Coëfficienten von f und Δ, auf die von $\varkappa f + \lambda\Delta$ und $\Delta_{\varkappa\lambda}$ bezieht. Da die letzteren aber nach (46) durch

$$G_1\alpha_{ikh} - G_2 a_{ikh}$$

gegeben sind, so wird:

$$\begin{aligned} (\delta\varphi)_{\varkappa\lambda} &= \sum \frac{\partial \varphi_{\varkappa\lambda}}{\partial(\varkappa a_{ikh} + \lambda\alpha_{ikh})}(G_1 a_{ikh} - G_2\alpha_{ikh}) \\ &= G_1\frac{\partial\varphi_{\varkappa\lambda}}{\partial\lambda} - G_2\frac{\partial\varphi_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa}. \end{aligned} \tag{47}$$

Ist also φ eine aus f entstandene Form, so ist die für die zusammengesetzte Form $\varkappa f + \lambda\Delta$ gebildete Form $(\delta\varphi)_{\varkappa\lambda}$ gleich der Functionaldeterminante von G und $\varphi_{\varkappa\lambda}$.

Mit Hülfe dieses Satzes bilden wir aus (46) $S_{\varkappa\lambda}$, indem wir berücksichtigen, dass $\delta\Delta = \frac{S}{2}f$; es wird:

$$\tfrac{1}{2} S_{\varkappa\lambda}(\varkappa f + \lambda\Delta) = (\delta\Delta)_{\varkappa\lambda} = G_1\left(\frac{\partial G_1}{\partial\lambda}\Delta - \frac{\partial G_2}{\partial\lambda}f\right) - G_2\left(\frac{\partial G_1}{\partial\varkappa}\Delta - \frac{\partial G_2}{\partial\varkappa}f\right).$$

Hierin führen wir die zweiten Differentialquotienten von G, dividirt durch 12, ein, nämlich die Ausdrücke:

$$\begin{cases} G_{11} = \tfrac{1}{12}\dfrac{\partial^2 G}{\partial\varkappa^2} = \varkappa^2 - \dfrac{S}{6}\lambda^2 \\ G_{12} = \tfrac{1}{12}\dfrac{\partial^2 G}{\partial\varkappa\partial\lambda} = -\dfrac{S}{3}\varkappa\lambda - \dfrac{T}{3}\lambda^2 \\ G_{22} = \tfrac{1}{12}\dfrac{\partial^2 G}{\partial\lambda^2} = -\dfrac{S}{6}\varkappa^2 - \dfrac{2T}{3}\varkappa\lambda - \dfrac{S^2}{12}\lambda^2. \end{cases} \tag{48}$$

Die Formel für $S_{\varkappa\lambda}$ wird dann zunächst:

---

*) Die Gleichung $G = 0$ ist also die früher durch $\varkappa L - \lambda K = 0$ bezeichnete Gleichung, vgl. p. 505.

$$S_{\varkappa\lambda}(\varkappa f + \lambda\Delta) = 6\begin{vmatrix} G_1 & G_{11}\Delta - G_{12}f \\ G_2 & G_{12}\Delta - G_{22}f \end{vmatrix},$$

oder nach den bekannten Eigenschaften der homogenen Functionen:

$$S_{\varkappa\lambda}(\varkappa f + \lambda\Delta) = 6\begin{vmatrix} G_{11}\varkappa + G_{12}\lambda & G_{11}\Delta - G_{12}f \\ G_{12}\varkappa + G_{22}\lambda & G_{12}\Delta - G_{22}f \end{vmatrix}$$

$$= 6\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{12} & G_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varkappa & \lambda \\ \Delta & -f \end{vmatrix}.$$

Dividiren wir also durch $\varkappa f + \lambda\Delta$, *so wird S proportional zu der* Hesse'*schen Form H der biquadratischen binären Form G:*

$$(49)\qquad \begin{aligned} S_{\varkappa\lambda} &= -6(G_{11}G_{22} - G_{12}^2) = -3H_G \\ &= S\varkappa^4 + 4T\varkappa^3\lambda + S^2\varkappa^2\lambda^2 + \tfrac{2}{3}ST\varkappa\lambda^3 + (\tfrac{2}{3}T^2 - \tfrac{1}{12}S^3)\lambda^4. \end{aligned}$$

Hieraus folgt weiter, da $\delta S = 4T$:

$$(50)\qquad T_{\varkappa\lambda} = \tfrac{1}{4}\left(G_1\frac{\partial S_{\varkappa\lambda}}{\partial\lambda} - G_2\frac{\partial S_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa}\right) = -3T_G,$$

wenn T_G die Covariante sechster Ordnung der biquadratischen Form $G(\varkappa, \lambda)$ bedeutet. Ferner haben wir wegen der Relationen $\mathsf{H} = \frac{1}{2}\delta\Theta$, $\mathsf{K} = \delta\mathsf{H} - \frac{S}{2}\Theta$ die Gleichungen:

$$(51)\qquad \mathsf{H}_{\varkappa\lambda} = G_1(\varkappa\mathsf{H} + \lambda\mathsf{K}) - G_2(\varkappa\Theta + \lambda\mathsf{H})$$

$$(52)\qquad \mathsf{K}_{\varkappa\lambda} = G_1\frac{\partial\mathsf{H}_{\varkappa\lambda}}{\partial\lambda} - G_2\frac{\partial\mathsf{H}_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa} - \tfrac{1}{2}S_{\varkappa\lambda}\Theta_{\varkappa\lambda}.$$

Die letzte Gleichung können wir noch einfacher schreiben, wenn wir beachten, dass K entsteht, wenn man die Bildung Θ an der Form Δ vornimmt, dass also $\mathsf{K}_{\varkappa\lambda}$ die Zwischenform Θ gebildet aus $\Delta_{\varkappa\lambda}$ ist. Wir finden dann wegen (46):

$$(52a)\qquad \mathsf{K}_{\varkappa\lambda} = G_1^2\mathsf{K} - 2G_1G_2\mathsf{H} + G_2^2\Theta. -$$

Endlich folgt aus (43), da $\mathsf{T} = \frac{1}{3}\delta\Sigma$ ist:

$$(53)\qquad \begin{aligned} \mathsf{T}_{\varkappa\lambda} &= G_1\left[(\tfrac{1}{3}S\varkappa\lambda + \tfrac{2}{3}T\lambda^2)\Sigma + (\varkappa^2 - \tfrac{1}{2}S\lambda^2)\mathsf{T}\right] \\ &\quad - G_2\left[(\varkappa^2 + \tfrac{1}{6}S\lambda^2)\Sigma + 2\varkappa\lambda\mathsf{T}\right]. \end{aligned}$$

Wir brechen hiermit diese algebraischen Untersuchungen zunächst ab, um die gewonnenen Resultate für einige Anwendungen zu verwerthen. Wir werden dabei dann von selbst genöthigt sein, noch weitere Bildungen aus der Theorie der ternären cubischen Formen in den Kreis unserer Betrachtung zu ziehen, ohne jedoch hierin Vollständigkeit zu erreichen oder anzustreben.*) Es sei hier nur noch der folgende sogleich zu verwerthende Satz bewiesen:

---

*) Wegen des Näheren vgl. besonders Clebsch und Gordan: Ueber cubische ternäre Formen, Math. Annalen, Bd. 6 und dazu das Druckfehlerverzeichniss des 8. Bandes; ferner den Schluss dieser Abtheilung.

Die cubische zugehörige Form $M = (\alpha\alpha u)^3$ verschwindet identisch.

Es entsteht nämlich M aus $\Delta = \alpha_x{}^3 = (cde)^3 c_x d_x e_x$, wenn man die α durch die aus den u und a gebildeten Determinanten ersetzt; es ist also

$$M = (cde)^2 (cua) (dua) (eua).$$

Nun ist nach einer bekannten Identität:

$$(cde) (cua) = (cue) (cda) - (cud) (cea).$$

Führen wir dies in M ein, so wird:

$$M = (cde) (dua) (eua) \{(cue) (cda) - (cud) (cea)\},$$

oder, da beide Theile durch Vertauschung von d und e in einander übergehen, also identisch sind:

$$M = 2 (cde) (cda) (dua) (cue).$$

Dieser Ausdruck enthält den Factor S, denn er hat den symbolischen Factor $(cde) (cda)$, und die Symbole e, a kommen noch in einer Determinante vereinigt vor. Aber der nach Absonderung von S übrig bleibende Factor von M kann dann keine Symbole mehr enthalten, sondern nur noch die u, muss also, da aus letzteren nicht verschwindende Determinanten nicht mehr zu bilden sind, nothwendig gleich Null sein, q. e. d.

V. Fortsetzung. — Anwendungen der Formentheorie.

Die von uns in Vorstehendem durchgeführten formalen Entwicklungen geben uns im Wesentlichen die Mittel, um die Gleichungen vollständig aufzustellen, von denen das wichtigste der bei den Curven dritter Ordnung auftretenden Probleme abhängt: *die Bestimmung der Wendepunkte;* wir werden dabei auch einige neue Formen benutzen müssen, auf die wir dann später zurückkommen. Ueber die Natur der Gleichung neunten Grades, von welcher dies Problem abhängt, haben wir schon verschiedene Schlüsse aus der gegenseitigen Gruppirung der Wendepunkte gezogen; und letztere wieder gründete sich auf den einen Fundamentalsatz, dass *immer drei Wendepunkte auf einer geraden Linie liegen.* Wir wollen zunächst für denselben einen rein algebraischen Beweis erbringen.

Es seien x und y zwei Wendepunkte, dann bestehen gleichzeitig die Gleichungen:

$$(1) \qquad \begin{array}{ll} a_x{}^3 = 0, & a_y{}^3 = 0, \\ \alpha_x{}^3 = 0, & \alpha_y{}^3 = 0; \end{array}$$

und wir haben nachzuweisen, dass auch für einen von 0 und ∞ verschiedenen Werth von λ die Gleichungen $a_{x+\lambda y}{}^3 = 0$, $\alpha_{x+\lambda y}{}^3 = 0$

zusammen bestehen müssen. Diese beiden Gleichungen geben aber entwickelt und mit Hülfe von (1) vereinfacht:

$$a_x^2 a_y + \lambda a_x a_y^2 = 0, \quad \alpha_x^2 \alpha_y + \lambda \alpha_x \alpha_y^2 = 0;$$

also durch Elimination von λ:

$$(2) \qquad a_x^2 a_y \,.\, \alpha_x \alpha_y^2 - a_x a_y^2 \,.\, \alpha_x^2 \alpha_y = 0.$$

Diese Gleichung ist aber in der That eine unmittelbare Folge der Gleichungen (1), denn sie ergibt sich aus dem soeben bewiesenen Satze, dass die Form $(a\alpha u)^3$ identisch Null ist, wenn man $u_i = (xy)_i$ setzt. Wir erhalten zunächst die Salmon'sche Identität:

$$(a_x \alpha_y - a_y \alpha_x)^3 \equiv a_x^3 \alpha_y^3 - 3 a_x^2 a_y \alpha_x \alpha_y^2 + 3 a_x a_y^2 \alpha_x^2 \alpha_y - \alpha_x^3 a_y^3 = 0,$$

und hieraus folgt wegen (1) wieder Gleichung (2). Der Gang dieses Beweises lässt noch die Richtigkeit des folgenden Satzes erkennen:

Zwei Curven dritter Ordnung $a_x^3 = 0$ und $\alpha_x^3 = 0$ haben ihre neun Wendepunkte gemeinsam, sobald die simultane zugehörige Form $(a\alpha u)^3$ identisch verschwindet. Aus letzterem Umstande folgt nämlich zunächst wieder, dass je zwei der 9 Schnittpunkte mit einem dritten auf einer Geraden liegen, dass also die 9 Punkte gruppirt sind, wie die Wendepunkte einer C_3, d. h. dass durch sie 4 Dreiecke hindurchgehen; dann sind sie aber nach Früherem auch Wendepunkte für alle durch sie gehenden C_3. —

Aus der Gruppirung der Wendepunkte haben wir zunächst gefolgert, dass es in dem Büschel $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ vier in gerade Linien zerfallende Curven gibt: die vier Wendepunktsdreiecke; und zwar werden die zugehörigen Parameterwerthe als Wurzeln einer Gleichung vierten Grades gefunden, welche sich aus den Gleichungen

$$\varkappa f + \lambda \Delta = 0,$$
$$\Delta_{\varkappa\lambda} \equiv Kf + L\Delta \equiv G_1 \Delta - G_2 f = 0$$

durch Elimination von f, Δ ergibt (vgl. p. 505). Dadurch kommen wir aber auch auf die Form $G(\varkappa, \lambda)$, welche durch Gleichung (44) auf p. 560 definirt war, also:

Die Gleichung vierten Grades $G(\varkappa, \lambda) = 0$ bestimmt die vier Wendepunktsdreiecke, d. h. die Parameterwerthe $\varkappa$, λ für die zerfallenden Curven des syzygetischen Büschels. Das Product der Gleichungen der vier Dreiecke ist daher gegeben durch:

$$(3) \qquad G(\Delta, -f) \equiv \Delta^4 - S\Delta^2 f^2 + \tfrac{4}{3} T\Delta f^3 - \tfrac{1}{12} S^2 f^4 = 0.$$

Untersuchen wir die für uns nunmehr besonders wichtige Form

$$G = \varkappa^4 - S\varkappa^2\lambda^2 - \tfrac{4}{3} T\varkappa\lambda^3 - \tfrac{1}{12} S^2\lambda^4$$

etwas genauer. Wir bilden zunächst ihre beiden Invarianten i_G und j_G (vgl. p. 229); die erstere ist:

(4) $$i_G = 2\left\{-\tfrac{1}{12}S^2 + 3 \cdot \tfrac{1}{36}S^2\right\} = 0\,.$$

Die erste Invariante von G verschwindet also identisch.

Geometrisch können wir $\varkappa$, λ, zufolge der Bedeutung von $G = 0$, als Coordinaten in einem Strahlbüschel auffassen, dessen Mittelpunkt ein Wendepunkt von $f = 0$ ist; wo dann $G = 0$ durch die vier Wendepunktslinien repräsentirt wird, welche von dem gewählten Wendepunkte ausgehen. Die Gleichung (4) gibt also den Satz:

Die vier durch einen Wendepunkt gehenden Wendepunktslinien sind zu einander äquianharmonisch (vgl. p. 239).

Wenn wir so in einem Wendepunkte unsere Constructionen ausführen, können wir die Bedeutung der Gleichung

$$\Delta_{\varkappa\lambda} = G_1\Delta - G_2 f = G_1\varkappa' + G_2\lambda'$$

(für $\varkappa' f + \lambda'\Delta = 0$) auch folgendermassen aussprechen:

Die Wendetangenten der drei Curven, deren Hesse'*sche Curve eine gegebene Curve dritter Ordnung* ($\varkappa' f + \lambda'\Delta = 0$) *ist, bilden die erste Polare der Wendetangente der letzteren in Bezug auf die vier Wendepunktslinien.*

Umgekehrt wird die Wendetangente der Hesse'*schen Curve durch die lineare Polare der Wendetangente der Grundcurve in Bezug auf die vier Wendepunktslinien gegeben.*

Dadurch sind in dem betrachteten Büschel besonders diejenigen Linien ausgezeichnet, deren Polare in Bezug auf $G = 0$ eine Doppellinie enthalten. Da aber die Invariante i_G verschwindet, so sind dies bekanntlich (vgl. p. 231) die Grundstrahlen von $G = 0$ selbst; und die erste Polare eines solchen besteht aus dem Strahle selbst und aus zwei in einen Strahl der Hesse'schen Form von G zusammenfallenden Strahlen. Jedes Wendepunktsdreieck ist daher Hesse'sche Curve seiner selbst und einer anderen Curve dritter Ordnung; und die Wendetangenten der den vier Dreiecken so zugeordneten Curven bilden in dem betrachteten Strahlbüschel die Hesse'sche Form H_G von $G(\varkappa, \lambda)$. Die Curven, deren Hesse'sche in ein Dreieck zerfällt, sind aber, wie wir wissen, durch das Verschwinden von S charakterisirt (p. 553), und somit folgt:

Die Invariante $S_{\varkappa\lambda}$ der zusammengesetzten Form $\varkappa f + \lambda\Delta$ unterscheidet sich nur durch einen Zahlenfactor von der Hesse'*schen Form der binären Form $G(\varkappa, \lambda)$; wie es durch Gleichung* (49) *auf p.* 561 *bestätigt wird.*

In dem betrachteten Büschel von Wendetangenten gibt es ferner sechs Strahlen $T_G = 0$ (p. 244), die sich in drei Paare theilen, so dass die erste Polare eines Strahles in jedem Paare in Bezug auf $G = 0$ den andern Strahl enthält (gleichzeitig auch in Bezug auf $H_G = 0$, was uns aber jetzt nicht angeht). Ein solches Strahlenpaar

ist sonach wegen der soeben gegebenen Constructionen dadurch ausgezeichnet, dass von den zugehörigen Curven des Büschels die eine immer Hesse'sche Curve der andern ist. Da dies Verhältniss durch des Verschwinden von $T_{\varkappa\lambda}$ ausgedrückt wird (p. 559), so folgt:

Die Invariante $T_{\varkappa\lambda}$ unterscheidet sich nur durch einen Zahlenfactor von der Covariante sechster Ordnung T_G der binären Form $G(\varkappa, \lambda)$; wie es durch Gleichung (50) *auf p.* 561 *bestätigt wird.*

Bilden wir endlich noch die zweite Invariante von G; sie ist:

$$(5) \qquad j_G = 6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{S}{6} \\ 0 & -\frac{S}{6} & -\frac{T}{3} \\ -\frac{S}{6} & -\frac{T}{3} & -\frac{S^2}{12} \end{vmatrix} = \frac{2}{3}\left(\frac{S^3}{6} - T^2\right).$$

Wenn auch diese Invariante verschwindet, so hat bekanntlich die Gleichung $G = 0$ drei gleiche Wurzeln, d. h. drei der vier durch einen Wendepunkt gehenden Linien fallen zusammen (p. 240). Dies ist aber nur möglich, wenn die Curve $f = 0$ einen Doppelpunkt hat, denn nur dadurch kann die Zahl der Wendepunkte nach den Plücker'schen Formeln reducirt werden. Bezeichnen wir also den in (5) rechts stehenden Ausdruck mit $-\frac{2}{3}R$, so haben wir:

*Die Discriminante der Curve dritter Ordnung $f = 0$, d. h. die linke Seite der Doppelpunktsbedingung ist gegeben durch die Bildung**):

$$(6) \qquad R = T^2 - \tfrac{1}{6} S^3.$$

Die Invariante R hat die besondere Eigenschaft, dass sie sich von der Invariante $R_{\varkappa\lambda}$ nur um einen Factor unterscheidet: *sie ist, wie man sich ausdrückt, eine Combinante des Systems $\varkappa f + \lambda \Delta$* (vgl. p. 208); ebenso wie die Form T_G einer binären Form G für das System $\varkappa G + \lambda H_G$. Zwischen den letztgenannten Formen besteht nämlich die bekannte Relation:

$$T_G^2 = -\tfrac{1}{2}\left\{H_G^3 - \tfrac{1}{2} i_G H_G G^2 + \tfrac{1}{3} j_G G^3\right\};$$

*) Nach Aronhold ist ausgerechnet:

$$R = 36 \cdot \begin{vmatrix} a_{111} & a_{122} & a_{133} & a_{123} & a_{113} & a_{112} \\ a_{211} & a_{222} & a_{233} & a_{223} & a_{213} & a_{212} \\ a_{311} & a_{322} & a_{333} & a_{323} & a_{313} & a_{312} \\ \alpha_{111} & \alpha_{122} & \alpha_{133} & \alpha_{123} & \alpha_{113} & \alpha_{112} \\ \alpha_{211} & \alpha_{222} & \alpha_{233} & \alpha_{223} & \alpha_{213} & \alpha_{212} \\ \alpha_{311} & \alpha_{322} & \alpha_{333} & \alpha_{323} & \alpha_{313} & \alpha_{312} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinantenform von R erhält man bis auf einen Zahlenfactor sofort durch Elimination der x aus den 6 Gleichungen $a_x^2 a_i = 0$, $\alpha_x^2 \alpha_i = 0$, welche bestehen müssen, wenn x ein Doppelpunkt von f ist.

und diese verwandelt sich in unserm Falle wegen (4) und (5), und da $T_G = -\frac{1}{3} T_{\varkappa\lambda}$, $H_G = -\frac{1}{3} S_{\varkappa\lambda}$, in:

(7) $$R_{\varkappa\lambda} = T_{\varkappa\lambda}{}^2 - \tfrac{1}{6} S_{\varkappa\lambda}{}^3 = (T^2 - \tfrac{1}{6} S^3) \,.\, G^3 = R \,.\, G^3(\varkappa, \lambda) \,.$$

In dem syzygetischen Büschel $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ sind daher keine Curven mit Doppelpunkt ($R_{\varkappa\lambda} = 0$) enthalten ausser den in drei Gerade zerfallenden ($G(\varkappa, \lambda) = 0$).

— *Die Auflösung der Gleichung $G = 0$* wird durch das Verschwinden ihrer ersten Invariante sehr vereinfacht, indem die Anwendung der Euler'schen Methode zum Ziele führt.*) Wir setzen $\frac{\varkappa}{\lambda} = x$, so dass wir die Gleichung haben:

(8) $$x^4 - Sx^2 - \tfrac{4}{3} Tx - \tfrac{1}{12} S^2 = 0 \,.$$

Für x machen wir die Substitution:

$$x = u + v + w \,,$$

so dass:

$$x^2 = (u^2 + v^2 + w^2) + 2(vw + wu + uv) \,,$$
$$x^4 = (u^2 + u^2 + w^2)^2 + 4(u^2 + v^2 + w^2)(vw + wu + uv) + 4(v^2 w^2 + w^2 u^2 + u^2 v^2) + 8\, uvw\, (u + v + w) \,.$$

Führen wir diese Werthe von x, x^2, x^4 in Gleichung (8) ein, so wird dieselbe erfüllt, wenn wir setzen

$$v^2 w^2 + w^2 u^2 + u^2 v^2 = \tfrac{1}{12} S^2$$
$$u^2 + v^2 + w^2 = \tfrac{1}{2} S$$
$$uvw = \tfrac{1}{6} T \,.$$

Dann sind aber u^2, v^2, w^2 die Wurzeln der cubischen Gleichung für z:

(9) $$z^3 - \tfrac{1}{2} S z^2 + \tfrac{1}{12} S^2 z - \tfrac{1}{36} T^2 = 0 \,,$$

oder nach einer einfachen Umformung:

$$\left(z - \frac{S}{6}\right)^3 = \frac{T^2}{36} - \frac{S^3}{6^3} = \tfrac{1}{36} R \,.$$

Für u^2, v^2, w^2 als Wurzeln dieser Gleichung haben wir somit die Werthe:

$$u^2 = \tfrac{1}{6}(S + \sqrt[3]{6R}) \,, \qquad v^2 = \tfrac{1}{6}(S + \varepsilon \sqrt[3]{6R}) \,, \qquad w^2 = \tfrac{1}{6}(S + \varepsilon^2 \sqrt[3]{6R}) \,,$$

wo ε eine imaginäre dritte Wurzel der Einheit bedeutet. *Die Wurzeln der Gleichung $G = 0$ sind also gegeben durch:*

$$x = \frac{\varkappa}{\lambda} = \pm \sqrt{\frac{S + \sqrt[3]{6R}}{6}} \pm \sqrt{\frac{S + \varepsilon \sqrt[3]{6R}}{6}} \pm \sqrt{\frac{S + \varepsilon^2 \sqrt[3]{6R}}{6}} \,,$$

*) Vgl. eine andere Behandlung der biquadratischen Gleichung mit verschwindendem i in Clebsch's Theorie der binären Formen, p. 171.

wo die Vorzeichen so zu wählen sind, dass das Product uvw der drei Quadratwurzeln gleich $+\frac{1}{6}T$ wird.

Es sind demnach in der That nur *vier* Vorzeichencombinationen möglich, entsprechend den vier Wurzeln von $G=0$. Von den Wurzeln u^2, v^2, w^2 der cubischen Gleichung (9) sind, wenn die Coëfficienten von f reell angenommen werden, zwei Wurzeln conjugirt imaginär; das Product derselben also ist positiv, und folglich die dritte reell und positiv, damit $u^2v^2w^2=\frac{1}{36}T^2$ sein kann. Die Grösse u ist daher immer reell, v und w einander conjugirt imaginär. Hieraus ergibt sich, dass von den vier Wurzeln der Gleichung (8) immer zwei reell und zwei conjugirt imaginär sind; und zwar geben die Vorzeichencombinationen

$$\begin{matrix} + & + & + \\ + & - & - \end{matrix}$$

reelle, die andern beiden imaginäre Werthe. Oder mit andern Worten: *Das Product der drei Seiten eines Wendepunktsdreiecks ist für zwei Dreiecke reell, für zwei conjugirt imaginär*, wie wir es schon früher auf anderem Wege gefunden haben.

Zur Bestimmung der Wendepunkte von $f=0$ würde es nunmehr noch nöthig sein, zwei der Wendepunktsdreiseite in ihre einzelnen linearen Factoren aufzulösen.*) Wir wollen diese Aufgabe jedoch auf einem anderen Wege durchführen, indem wir dieselbe an ein früher bezeichnetes Transformationsproblem anknüpfen**) (vgl. p. 512). Wird ein Wendepunktsdreieck als Coordinatendreieck eingeführt, so erscheint, sahen wir, die Gleichung der Curve dritter Ordnung in der Form:

$$(10) \qquad f \equiv a\,(y_1^3+y_2^3+y_3^3)+6\,b\,y_1y_2y_3=0\,.$$

Zunächst kommt es uns nur darauf an, die Coëfficienten a, b der transformirten Form in ihrer Abhängigkeit von den a_{ikh} der Grundform f darzustellen; ohne dabei die directe Berechnung der Transformationscoëfficienten zu verlangen. Wegen der vier vorhandenen Wendepunktsdreiecke würden wir vier Werthe für $\frac{b}{a}$ finden müssen. Aber die Gleichung (10) ändert sich nicht bis auf einen zu b hinzutretenden Factor ε oder ε^2, wenn wir den y_i beliebig dritte Wurzeln der Einheit als Factoren hinzufügen, während dadurch thatsächlich

---

*) Vgl. über diese directe Lösung des Problems Gundelfinger: Math. Annalen, Bd. 4, p. 567 ff., sowie den folgenden Abschnitt dieser Vorlesungen.

**) Vgl. im Folgenden Clebsch: Math. Annalen, Bd. 2, p. 382. Eine andere Behandlung des Problems gab Gundelfinger, ib. Bd. 5, p. 442. Vgl. ferner Clebsch's Theorie der binären algebraischen Formen, Leipzig 1872, p. 234 ff., sowie den Schluss der 5. Abtheilung dieses Bandes.

doch nur die Beziehung geändert wird. Wir werden daher nicht für $\frac{b}{a}$, sondern für $\frac{b^3}{a^3}$ eine biquadratische Gleichung aufstellen, welche im Wesentlichen auf $G = 0$ zurückführen muss. Es geschieht dies durch Vergleichung der beiden Werthe der absoluten Invariante*), die wir einmal für die allgemeine, dann für die kanonische Form von f bilden. Wir setzen nun

$$\chi = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3$$

$$\Delta'_\chi = 6 \begin{vmatrix} y_1 & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & y_3 \end{vmatrix} = 6 y_1 y_2 y_3,$$

so dass also $\chi = 0$ eine Curve des syzygetischen Büschels

$$f = a\chi + b\Delta_\chi' = 0 \tag{11}$$

ist und Δ_χ', deren Hesse'sche Form. Dieselbe ist, wie dies mit allen Bildungen in der kanonischen Form geschehen soll, durch einen oberen Strich von der entsprechenden Bildung in Bezug auf die ursprünglichen Variabeln x_i unterschieden. Da Δ_χ' in drei lineare Factoren zerfällt, so ist $\chi = 0$ dadurch ausgezeichnet, dass ihre Invariante S_χ verschwindet. Wir können ferner mit Hülfe der Formeln (49) und (50) p. 561 für $S_{\varkappa\lambda}$ und $T_{\varkappa\lambda}$ die Invarianten S' und T' (und auch die Substitutionsdeterminante r) für f berechnen, sobald wir die Form G, gebildet für χ kennen, welche mit Γ bezeichnet sein mag. Es ist aber nach Gleichung (46) auf p. 560:

$$\begin{aligned} \Delta' &= 6 \begin{vmatrix} a y_1 & b y_3 & b y_2 \\ b y_3 & a y_2 & b y_1 \\ b y_2 & b y_1 & a y_3 \end{vmatrix} = (a^3 + 2b^3)\,\Delta'_\chi - 6ab^2\chi \\ &= \tfrac{1}{4}\frac{\partial \Gamma}{\partial a}\,\Delta'_\chi - \tfrac{1}{4}\frac{\partial \Gamma}{\partial b}\,\chi, \end{aligned} \tag{12}$$

also durch Vergleichung beider Ausdrücke:

$$\Gamma_1 = \tfrac{1}{4}\frac{\partial \Gamma}{\partial a} = a^3 + 2b^3, \quad \Gamma_2 = \tfrac{1}{4}\frac{\partial \Gamma}{\partial b} = 6ab^2.$$

und somit:

$$\begin{gathered} \Gamma = a^4 + 8ab^3, \\ \Gamma_{11} = a^2, \quad \Gamma_{12} = 2b^2, \quad \Gamma_{22} = 4ab. \end{gathered} \tag{13}$$

Hieraus folgt nach (49) und (50), wenn r die Substitutionsdeterminante bedeutet:

$$\begin{aligned} S' = r^4 \,.\, S &= -6(\Gamma_{11}\Gamma_{22} - \Gamma_{12}^2) \\ &= 24b(b^3 - a^3) \end{aligned} \tag{14}$$

---

*) Vgl. das entsprechende Verfahren bei den biquadratischen binären Formen auf p. 248.

$$(15)\qquad T' = r^6 \,.\, T = \tfrac{1}{4}\left(\Gamma_1 \frac{\partial S'}{\partial b} - \Gamma_2 \frac{\partial S'}{\partial a}\right) = 6\,(8\,b^6 + 20\,a^3 b^3 - a^6)\,.$$

Bilden wir hieraus die absolute Invariante, *so kommt für* $\frac{a^3}{b^3}$ *die Gleichung vierten Grades:*

$$(16)\qquad \frac{S^3}{T^2} = \frac{384\,b^3\,(b^3 - a^3)^3}{(8\,b^6 + 20\,a^3 b^3 - a^6)^2}\,;$$

und gleichzeitig findet man die Transformationsdeterminante, wenn $\frac{a^3}{b^3} = \alpha$ *bekannt ist, aus der Gleichung:*

$$(17)\qquad r^2 = \frac{S}{T}\,\frac{8\,b^6 + 20\,a^3 b^3 - a^6}{4\,b\,(b^3 - a^3)} = b^2\,\frac{8 + 20\,\alpha - \alpha^2}{4\,(1 - \alpha)}\,,$$

in der b noch willkürlich angenommen werden kann, was damit übereinkommt, dass die Substitutionscoëfficienten (also auch r) nur bis auf einen Proportionalitätsfactor bestimmt sind.

Die Gleichung (16) können wir leicht auf $G = 0$ zurückführen. Setzt man nämlich:

$$(18)\qquad \alpha = \frac{a^3}{b^3} = 1 - \tfrac{3}{2}\,S\,\frac{\lambda^2}{\varkappa^2}\,,$$

so geht dieselbe über in:

$$\frac{S^3}{T^2} = \frac{16\,\varkappa^2\,\lambda^6\,S^3}{9\,(\varkappa^4 - S\,\varkappa^2\,\lambda^2 - \tfrac{1}{12}\,S^2\,\lambda^4)^2}\,,$$

und hier braucht man nur auf beiden Seiten die Wurzel zu ziehen, um wieder die Gleichung $G\,(\varkappa,\,\lambda) = 0$ zu haben.

Die *wirkliche Berechnung der Ausdrücke* y_1, y_2, y_3 in Function der Coëfficienten von f erfordert etwas weitläufigere Betrachtungen. Durch die Formen χ und Δ_χ sind uns zwei symmetrische Functionen der gesuchten Grössen y_1^3, y_2^3, y_3^3 gegeben; denn aus (11) und (12) ergibt sich (da $\Delta' = r^2\,.\,\Delta$):

$$(19)\qquad \begin{aligned} y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = \chi \quad &= \frac{1}{\Gamma}\,\{f\,.\,\Gamma_1 - r^2 \Delta\,.\,b\} \\ y_1 y_2 y_3 = \tfrac{1}{6}\,\Delta'_\chi &= \frac{1}{6\,\Gamma}\,\{f\,.\,\Gamma_2 + r^2 \Delta\,.\,a\}\,. \end{aligned}$$

Wenn wir nun noch den Werth der dritten symmetrischen Function $y_2^3 y_3^3 + y_3^3 y_1^3 + y_1^3 y_2^3$ angeben, so können wir eine cubische Gleichung aufstellen, deren Wurzeln uns die Werthe von y_1^3, y_2^3, y_3^3 angeben. Aber diese dritte Function ist von der sechsten Ordnung, verlangt also die Benutzung von Covarianten sechster Ordnung, denen wir bisher noch nicht begegnet sind. Auf dieselben werden wir sogleich noch zurückkommen; wir erwähnen hier nur, dass der von uns

gewünschte Ausdruck aus Θ entsteht, wenn wir die u_i durch die Grössen $\Delta_i = \frac{1}{3}\frac{\partial \Delta}{\partial x_i}$ ersetzen, d. h. wir wählen die Covariante:

$$\varphi = \Theta_x{}^2 \alpha_\vartheta \beta_\vartheta \alpha_x{}^2 \beta_x{}^2 = (ab\alpha)(ab\beta)\, a_x b_x \alpha_x{}^2 \beta_x{}^2$$
$$= -2 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \Delta_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \Delta_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & \Delta_3 \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

In der That finden wir für die kanonische Form:

$$(20)\quad \varphi_\chi' = -2 \begin{vmatrix} y_1 & 0 & 0 & 2y_2y_3 \\ 0 & y_2 & 0 & 2y_3y_1 \\ 0 & 0 & y_3 & 2y_1y_2 \\ 2y_2y_3 & 2y_3y_1 & 2y_1y_2 & 0 \end{vmatrix} = 8(y_2{}^3y_3{}^3 + y_3{}^3y_1{}^3 + y_1{}^3y_2{}^3).$$

Die erwähnte cubische Gleichung, deren Wurzeln $y_1{}^3$, $y_2{}^3$, $y_3{}^3$ sind, würde also sein:

$$(21)\qquad z^3 - \chi z^2 + \tfrac{1}{8}\varphi_\chi' z - (\tfrac{1}{6}\Delta_\chi')^3 = 0.$$

Die Auflösung derselben wird dadurch vereinfacht, dass wir die Quadratwurzel aus ihrer Discriminante, d. h. das Differenzenproduct

$$(y_1{}^3 - y_2{}^3)(y_2{}^3 - y_3{}^3)(y_3{}^3 - y_1{}^3),$$

wie sogleich gezeigt werden soll, durch eine Covariante neunter Ordnung von f darstellen können; man hat also eine Quadratwurzel weniger auszuziehen, als bei einer allgemeinen cubischen Gleichung.*)

Wir können jedoch die schliesslichen Ausdrücke für $y_i{}^3$ auch ohne directe Auflösung der Gleichung (21) finden, wenn wir auch noch die symmetrische Function $y_1{}^6 + y_2{}^6 + y_3{}^6$ mittelst Covarianten von f berechnen. Dass dies möglich ist, folgt aus der Bemerkung, *dass jede Covariante von f in der kanonischen Form eine ganze Function von $y_1{}^3$, $y_2{}^3$, $y_3{}^3$, $y_1y_2y_3$ und in $y_1{}^3$, $y_2{}^3$, $y_3{}^3$ symmetrisch sein muss.* Eine Covariante darf sich nämlich nicht ändern, wenn man zu y_1, y_2, y_3 je dieselbe dritte Wurzel der Einheit als Factor hinzufügt, denn dadurch wird die Form f nicht afficirt. — Alle Covarianten sechster Ordnung lassen sich aber, wie man an der kanonischen Form leicht beweist, durch eine von ihnen und f und Δ rational ausdrücken. Unter ihnen ist die Form ψ besonders ausgezeichnet, welche durch die Gleichung

$$(22)\qquad \psi = N_{n'} N_n' N_x{}^3 N_x'{}^3$$

definirt ist, wo die Symbole N, n sich auf die uns ebenfalls neue Zwischenform beziehen:

*) Vgl. die Formeln (16) auf p. 223.

$$(23) \qquad N = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial \Delta}{\partial x_1} & u_1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} & u_2 \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} & \frac{\partial \Delta}{\partial x_3} & u_3 \end{vmatrix} = (a \alpha u)\, a_x^2 \alpha_x^2 = N_x^4 u_u .$$

Diese Covariante ψ werden wir als eine Combinante des Systems $\varkappa f + \lambda \Delta$ erkennen, d. h. wir werden die Gleichung nachweisen:

$$(24) \qquad \psi_{\varkappa\lambda} = G^2 . \psi .$$

Ferner besteht zwischen den Formen φ und ψ die sogleich zu beweisende Relation (p. 574):

$$(25) \qquad \psi = -\tfrac{3}{4}\varphi - \tfrac{1}{12} T f^2 + \tfrac{1}{8} S \Delta f ,$$

aus welcher wir die kanonische Form von φ ableiten können. Da nämlich für die Form χ nach Früherem $S = 0$, $T = -6$*) ist, so gibt die Gleichung (25) wegen (20):

$$\psi_\chi' = -\tfrac{3}{4}\varphi_\chi' + \tfrac{1}{2}\chi^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3)^2 - 6(y_2^3 y_3^3 + y_3^3 y_1^3 + y_1^3 y_2^3) ;$$

und hieraus finden wir die Form ψ von f mit Hülfe von (24), es ist:

$$r^6 \psi = \psi'_{a\chi + b\Delta\chi} = \Gamma^2 . \psi_\chi' ,$$

also schliesslich:

$$(26) \quad r^6 \psi = \tfrac{1}{2}\Gamma^2 . \left\{(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3)^2 - 12(y_2^3 y_3^3 + y_3^3 y_1^3 + y_1^3 y_2^3)\right\} .$$

Dies in Verbindung mit (19) gibt uns die weiteren symmetrischen Functionen:

$$(27) \quad \begin{cases} y_2^3 y_3^3 + y_3^3 y_1^3 + y_1^3 y_2^3 = -\frac{r^6\psi}{6\Gamma^2} + \frac{1}{12\Gamma^2}\{f . \Gamma_1 - r^2\Delta . b\}^2 \\ y_1^6 + y_2^6 + y_3^6 = \frac{r^6\psi}{3\Gamma^2} + \frac{5}{6\Gamma^2}\{f . \Gamma_1 - r^2\Delta . b\}^2 . \end{cases}$$

Ausser diesen symmetrischen Functionen können wir noch das schon erwähnte Differenzenproduct (unter Adjunction von r) rational darstellen mittelst einer Covariante Ω, definirt durch ($\psi = \psi_x^6$):

$$(28) \qquad \Omega = \frac{1}{54} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial \Delta}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} & \frac{\partial \Delta}{\partial x_3} & \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \end{vmatrix} = (a \alpha \psi)\, a_x^2 \alpha_x^2 \psi_x^5$$
$$= N_x^4 \psi_u \psi_x^5 = N_{u'} N'_u N'_{u''} N_x^3 N_x'^2 N''^1_x .$$

Diese Covariante Ω ist ebenfalls eine Combinante, d. h. es ist: $\Omega_{\varkappa\lambda} = G^3 . \Omega$ (vgl. p. 575), also auch für die kanonische Form:

*) Man findet diesen Werth aus (15) für $a = 1$, $b = 0$.

$$r^9 \Omega = \Omega' = \Gamma^3 \,.\, \Omega_\chi' = 6\,\Gamma^3 \,.\, \begin{vmatrix} y_1^2 & y_2 y_3 & y_1^5 \\ y_2^2 & y_3 y_1 & y_2^5 \\ y_3^2 & y_1 y_2 & y_3^5 \end{vmatrix}$$

$$= -6\,\Gamma^3 \,.\, (y_1^3 - y_2^3)(y_2^3 - y_3^3)(y_3^3 - y_1^3) \,.*)$$

Das Differenzenproduct der Cuben y_1^3, y_2^3, y_3^3, *d. h. die Quadratwurzel aus der Discriminante der Gleichung* (21) *ist daher gegeben durch:*

$$(y_1^3 - y_2^3)(y_2^3 - y_3^3)(y_3^3 - y_1^3) = -\frac{r^9 \Omega}{6\,\Gamma^3}\,. \tag{29}$$

Dabei ist zu bemerken, dass das Vorzeichen auf der rechten Seite nicht bestimmt ist, weil durch Gleichung (17) nur r^2, nicht aber r selbst gefunden wurde. Der Ausdruck (29) enthält also noch den irrationalen Factor

$$r = \sqrt{\frac{S}{T}\;\frac{8\,b^6 + 20\,a^3 b^3 - a^6}{4\,b\,(b^3 - a^3)}}\,,$$

und der numerische Werth unter dem Wurzelzeichen besteht aus einer völlig gegebenen nur von $\frac{b^3}{a^3}$ abhängigen Grösse und aus einem willkürlich zu wählenden Factor b^2, welcher, wie man sieht, aus der Irrationalität als solcher ausscheidet.

Mit Hülfe der gefundenen Ausdrücke kann man nun die Cuben und das Product der beiden irrationalen Covarianten

$$M = y_1^3 + \varepsilon y_2^3 + \varepsilon^2 y_3^3, \quad N = y_1^3 + \varepsilon^2 y_2^3 + \varepsilon y_3^3 \tag{30}$$

darstellen. Beachten wir bei Berechnung dieser Cuben die Relationen:

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$$

$$y_1^9 + y_2^9 + y_3^9 = (y_1^3 + y_2^3 + y_3^3)^3 - 3(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3)(y_2^3 y_3^3 + y_3^3 y_1^3 + y_1^3 y_2^3) + 3\,y_1^3 y_2^3 y_3^3\,,$$

$$M^3 + N^3 = 2(y_1^9 + y_2^9 + y_3^9) - 3(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3)(y_2^3 y_3^3 + y_3^3 y_1^3 + y_1^3 y_2^3) + 21\,y_1^3 y_2^3 y_3^3\,,$$

so finden wir unter Berücksichtigung von (19), (27) und (29) sofort:

$$\left\{\begin{aligned} 8\,\Gamma^3 (M^3 + N^3) &= 12\,r^6 \psi\,(f\Gamma_1 - r^2 \Delta b) + 10\,(f\Gamma_1 - r^2 \Delta b)^3 \\ &\quad + (f\Gamma_2 + r^2 \Delta a)^3 \\ 8\,\Gamma^3 (M^3 - N^3) &= 4\,\varepsilon\,(1 - \varepsilon)\, r^9 \Omega \\ \Gamma^2 M N &= \tfrac{1}{2}\, r^6 \psi + \tfrac{3}{4}\,(f\,\Gamma_1 - r^2 \Delta b)^2\,. \end{aligned}\right. \tag{31}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen sieht man, dass folgende beiden Covarianten neunter Ordnung vollständige Cuben sind:

---

*) Dass die Determinante bei der Ausrechnung in dies Product übergeht, erkennt man am einfachsten daraus, dass sie verschwindet, sobald zwei der y einander gleich werden und dass sie symmetrisch in den drei Cuben sein muss. Zur Bestimmung des Zahlenfactors braucht man dann nur ein Glied auszurechnen.

$$(32)\quad \begin{cases} 16\,\Gamma^3\,M^3 = (f\Gamma_2 + r^2\Delta a)^3 + 10\,(f\Gamma_1 - r^2\Delta b)^3 \\ \qquad + 12\,r^6\psi\,(f\Gamma_1 - r^2\Delta b) + 4\,\varepsilon\,(1-\varepsilon)\,r^9\Omega \\ 16\,\Gamma^3\,N^3 = (f\Gamma_2 + r^2\Delta a)^3 + 10\,(f\Gamma_1 - r^2\Delta b)^3 \\ \qquad + 12\,r^6\psi\,(f\Gamma_1 - r^2\Delta b) + 4\,\varepsilon\,(\varepsilon - 1)\,r^9\Omega\,. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (30) in Verbindung mit der Gleichung: $\chi = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3$ können wir endlich die drei Cuben y_1^3, y_2^3, y_3^3 linear in M, N und χ berechnen, wo dann $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ die Gleichungen der Seiten eines Wendepunktsdreiecks sind.

Ziehen wir also aus den Grössen (32) *die Cubikwurzel, so erhalten wir eine der gesuchten Transformationen auf die kanonische Form durch die Cubikwurzeln aus den folgenden drei Ausdrücken:*

$$(33)\quad \begin{cases} 3\,y_1^3 = \frac{1}{\Gamma}(f\Gamma_1 - r^2\Delta b) + M + N \\ 3\,y_2^3 = \frac{1}{\Gamma}(f\Gamma_1 - r^2\Delta b) + \varepsilon\,M + \varepsilon^2 N \\ 3\,y_3^3 = \frac{1}{\Gamma}(f\Gamma_1 - r^2\Delta b) + \varepsilon^2 M + \varepsilon\,N\,, \end{cases}$$

wo nun $\frac{a^3}{b^3}$ eine Wurzel der biquadratischen Gleichung (16) ist*), wo ferner Γ durch (13), r durch (17), M und N durch (32) definirt sind, und in M, N die Form ψ durch (22), Ω durch (28).

Durch die Gleichungen (33) *ist das Wendepunktproblem vollständig erledigt.* Wir hatten dabei eine biquadratische und eine cubische Gleichung zu lösen; erstere war durch das Verschwinden der Invariante i ausgezeichnet, letztere dadurch, dass das Differenzenproduct der Wurzeln bekannt war. —

Wir haben noch einige Bemerkungen über die neuen von uns benutzten Bildungen hinzuzufügen, insbesondere die zwischen φ und ψ bestehende Identität sowie die Combinanteneigenschaft der Formen ψ und Ω nachzuweisen. Wir werden daran ferner einige Bemerkungen über das System $\varkappa\Sigma + \lambda T = 0$ von Curven dritter Klasse knüpfen.

Die von Brioschi eingeführte Covariante ψ hatten wir aus der Zwischenform (23):

$$N = (a\alpha u)\,a_x^2\alpha_x^2$$

abgeleitet; gleich Null gesetzt, ordnet letztere jeder Linie u die Curve 4. Ordnung der Punkte x zu, deren lineare Polaren in Bezug auf $f = 0$ und $\Delta = 0$ sich auf u schneiden. Um ψ zunächst durch Symbole a, α von f, Δ auszudrücken, bemerken wir, dass ψ nach (22) aus

*) Man erhält diese Wurzeln mittelst der Substitution (18) direct aus den Wurzeln $\frac{\varkappa}{\lambda}$ der Gleichung (8) $G = 0$.

$$N_x^3 N_y u_n = \tfrac{1}{2} (a \alpha u)\, a_x \alpha_x (a_x \alpha_y + a_y \alpha_x)$$

entsteht, wenn man y durch x, u durch N ersetzt und mit N_x^3 multiplicirt. Daher ist:

$$\psi = \tfrac{1}{2} (a \alpha N) (a_n \alpha_x + a_x \alpha_n)\, a_x \alpha_x N_x^3.$$

Hier entstehen beide Glieder wieder aus $N_x^3 N_y u_n$ (b, β für a, α geschrieben); das erstere, indem man u durch a, y durch Determinanten der a, α, das andere, indem man u durch α, y durch Determinanten der a, α ersetzt. Also ist:

$$\psi = \tfrac{1}{4} a_x \alpha_x b_x \beta_x \left\{ a_x (b \beta \alpha) + \alpha_x (b \beta a) \right\} \left\{ b_x (\beta a \alpha) + \beta_x (b a \alpha) \right\}.$$

Multiplicirt man aus, so entstehen vier Glieder, von denen aber zwei durch Vertauschung von Buchstaben in einander übergehen; es wird also:

(34) $$\psi = -\tfrac{1}{4} (\varphi + 2 \varphi' + \varphi'')$$

wo: $$\varphi = (a b \beta)(a b \alpha)\, a_x b_x \alpha_x^2 \beta_x^2$$

(35) $$\varphi' = -(a b \beta)(\alpha \beta a)\, a_x \beta_x \alpha_x^2 b_x^2$$

$$\varphi'' = (\alpha \beta a)(\alpha \beta b)\, \alpha_x \beta_x a_x^2 b_x^2.$$

Wir werden nun zeigen, dass sich $2\varphi'$ sowohl auf φ als auf φ'' zurückführen lässt; man kann daher weiterhin alle φ durch ψ ausdrücken. Es ist nämlich (a, b vertauscht):

$$\begin{aligned} 2\varphi' &= (a b \beta)\, a_x b_x \alpha_x^2 \beta_x \left\{ - b_x (\alpha \beta a) + a_x (\alpha \beta b) \right\} \\ &= (a b \beta)\, a_x b_x \alpha_x^2 \beta_x \left\{ \beta_x (a b \alpha) - \alpha_x (a b \beta) \right\} \\ &= \varphi - \Delta \,.\, (a b \beta)^2 a_x b_x \beta_x \\ &= \varphi - \tfrac{1}{6} S \Delta f; \qquad \text{(nach Gl. (22) auf p. 552)} \end{aligned}$$

aber auch (α mit β vertauscht):

$$\begin{aligned} 2\varphi' &= (\alpha \beta a)\, \alpha_x \beta_x a_x b_x^2 \left\{ - \alpha_x (a b \beta) + \beta_x (a b \alpha) \right\} \\ &= (\alpha \beta a)\, a_x \beta_x a_x b_x^2 \left\{ a_x (\alpha \beta b) - b_x (\alpha \beta a) \right\} \\ &= \varphi'' - \tfrac{1}{6} f (2 T f - S \Delta). \qquad \text{(vgl. Gl. (40) p. 559)} \end{aligned}$$

Tragen wir diese Ausdrücke von φ, φ'' in die Formel (34) ein, so kommt:

(36) $$\begin{cases} \varphi = -\tfrac{4}{3} \psi - \tfrac{1}{9} T f^2 + \tfrac{1}{6} S \Delta f \\ \varphi' = -\tfrac{2}{3} \psi - \tfrac{1}{18} T f^2 \\ \varphi'' = -\tfrac{4}{3} \psi + \tfrac{2}{9} T f^2 - \tfrac{1}{6} S \Delta f. \end{cases}$$

Die erste von diesen drei Gleichungen ist die vorhin benutzte.

Um nachzuweisen, dass ψ und Ω Combinanten sind, brauchen wir nur zu zeigen, dass dies für die Zwischenform N gilt, aus welcher beide nach (22) und (28) abgeleitet werden. Dass sich N und $N_{\varkappa\lambda}$ in der That nur um einen Factor unterscheiden, ersieht man schon

daraus, dass die linearen Polaren von x in Bezug auf die Curven $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ einen Strahlbüschel bilden, dessen Mittelpunkt eben durch $N = 0$ gegeben ist. Um diesen Factor als eine Potenz von G zu erkennen, gehen wir von der Form aus:

$$(37) \qquad H = a_x^3 \alpha_y^3 - a_y^3 \alpha_x^3 = f(x)\,\Delta(y) - \Delta(x)\,f(y),$$

welche man, wie sich zeigen lässt*), allen Combinantenbildungen von f zu Grunde legen kann. Es ist aber:

$$[f(x)\Delta(y) - \Delta(x)f(y)]_{\varkappa\lambda} = \begin{vmatrix} \varkappa f(x) + \lambda\Delta(x) & G_1\Delta(x) - G_2 f(x) \\ \varkappa f(y) + \lambda\Delta(y) & G_1\Delta(y) - G_2 f(y) \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \varkappa & \lambda \\ -G_2 & G_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f(x) & \Delta(x) \\ f(y) & \Delta(y) \end{vmatrix}$$
$$= G(\varkappa, \lambda) \,.\, \{f(x)\,\Delta(y) - \Delta(x)\,f(y)\}.$$

Also die Form H ist eine Combinante: $H_{\varkappa\lambda} = G \,.\, H$.

Nach (37) ist aber auch

$$H = (a_x\alpha_y - a_y\alpha_x)\,(a_x^2\alpha_y^2 + \alpha_x^2 a_y^2 + a_x\alpha_x a_y\alpha_y),$$

und es ist identisch (vgl. p. 563):

$$0 = (a_x\alpha_y - a_y\alpha_x)\,(a_x^2\alpha_y^2 + \alpha_x^2 a_y^2 - 2a_x\alpha_x a_y\alpha_y) = (a_x\alpha_y - a_y\alpha_x)^3;$$

der letzte Ausdruck entsteht nämlich aus der verschwindenden Form $(a\alpha u)^3$, wenn man die u durch Determinanten aus den x, y ersetzt. Daher ist auch:

$$H = \tfrac{1}{2}\,(a_x\alpha_y - a_y\alpha_x)\,(a_x^2\alpha_y^2 + \alpha_x^2 a_y^2 + 4\,a_x\alpha_x a_y\alpha_y).$$

Dies entsteht aber aus $N = (a\alpha u)\,a_x^2\alpha_x^2$, wenn man N wiederholt nach den x differentiirt, mit den y multiplicirt und schliesslich für die u Determinanten der x, y setzt. Es ist also H eine aus N entstandene Form und zwar entstanden durch lineare Operationen. *Ebenso entsteht aber auch N aus H*; denn für N kann man den Werth setzen, welchen der Ausdruck**)

$$\tfrac{1}{18}\left\{u_1\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_2\partial y_3} - \frac{\partial^2 H}{\partial x_3\partial y_2}\right) + u_2\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_3\partial y_1} - \frac{\partial^2 H}{\partial x_1\partial y_3}\right) + u_3\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_1\partial y_2} - \frac{\partial^2 H}{\partial x_2\partial y_1}\right)\right\}$$

annimmt, indem man die y den x gleich setzt. Hierdurch ist der Zusammenhang von N und H bewiesen, und es folgt:

Die Form N, und somit auch ψ und Ω sind Combinanten; es ist:

$$N_{\varkappa\lambda} = G \,.\, N, \quad \psi_{\varkappa\lambda} = G^2 \,.\, \psi, \quad \Omega_{\varkappa\lambda} = G^3 \,.\, \Omega.$$

---

*) Vgl. Näheres über die Combinanten der ternären cubischen Formen in dem Aufsatze von Clebsch und Gordan, Math. Annalen, Bd. 6 und den VIII. Abschnitt dieser Abtheilung; über Combinanten im Allgemeinen ib. Bd. 5, p. 95.

**) Derselbe lässt sich, wenn man symbolisch $H = h_x^3 k_y^3$ setzt, übersichtlicher in der Form $\frac{1}{2}(hku)\,h_x^2\,k_y^2$ schreiben.

Damit haben wir die für Aufstellung der Transformationsformeln (33) benutzten Sätze sämmtlich bewiesen. —

Die Behandlung des Problems der Wendepunkte hätte man natürlich auch an das Studium der zugehörigen Formen Σ und T anknüpfen können. Statt der Wendepunkte gilt es dann, die neun gemeinsamen Rückkehrtangenten der Schaar $\varkappa\Sigma + \lambda\mathrm{T} = 0$ zu finden. *Dass diese Curven sämmtlich die harmonischen Geraden von $f = 0$ zu Rückkehrtangenten haben und also die früher erwähnte Schaar von Curven dritter Klasse bilden* (p 518), erkennt man sofort aus der kanonischen Form. Σ und T nämlich waren definirt durch:

$$\Sigma = \tfrac{1}{4}\, \Sigma \frac{\partial S}{\partial a_{ikh}}\, u_i u_k u_h\,, \quad \mathrm{T} = \tfrac{1}{6}\, \Sigma \frac{\partial T}{\partial a_{ikh}}\, u_i u_k u_h\,;$$

mithin erhält man aus (14) und (15):

$$\Sigma' = \tfrac{1}{12} \frac{\partial S'}{\partial a} (v_1{}^3 + v_2{}^3 + v_3{}^3) + \tfrac{1}{4} \frac{\partial S'}{\partial b}\, v_1 v_2 v_3\,;$$

denn es ist: $\dfrac{\partial S'}{\partial a_{111}} = \dfrac{\partial S'}{\partial a_{222}} = \dfrac{\partial S'}{\partial a_{333}} = \tfrac{1}{3} \dfrac{\partial S'}{\partial a}$.

Ebenso wird: $\mathrm{T}' = \tfrac{1}{18} \dfrac{\partial T'}{\partial a} (v_1{}^3 + v_2{}^3 + v_3{}^3) + \tfrac{1}{6} \dfrac{\partial T'}{\partial b}\, v_1 v_2 v_3$; und also durch Ausrechnung:

$$\Sigma' = 6\,(4b^3 - a^3)\, v_1 v_2 v_3 - 6\, b a^2\, (v_1{}^3 + v_2{}^3 + v_3{}^3)$$
$$\mathrm{T}' = 4\,(4b^3 + 5a^3)\, b^2 v_1 v_2 v_3 + 2\,(10b^3 - a^3)\, a^2\, (v_1{}^3 + v_2{}^3 + v_3{}^3).$$

Die Form der Gleichungen $\Sigma = 0$, $\mathrm{T} = 0$ ist also in der That dieselbe, wie die der Gleichungen $f = 0$, $\Delta = 0$. Um nun die invarianten Bildungen des Systems $\varkappa\Sigma + \lambda\mathrm{T}$ zu studiren, legt man jedoch zwei andere Formen Π und P dieses Systems zu Grunde, welche dadurch ausgezeichnet sind, dass die Bildung $\Delta\Pi - f\mathrm{P}$ eine Combinante ist, und dass sie den Bedingungen

$$\Pi_{\varkappa\lambda} = G^2 \,.\, (\varkappa\Pi + \lambda\mathrm{P})\,, \quad \mathrm{P}_{\varkappa\lambda} = G^2 \,.\, (G_1 \mathrm{P} - G_2 \Pi)$$

genügen. Sie sind definirt durch die Gleichungen*):

*) Die Einführung dieser Bildungen gestattet z. B. die früher gewonnenen Ausdrücke für $\Sigma_{\varkappa\lambda}$ und $\mathrm{T}_{\varkappa\lambda}$ (p. 559 u. 561) übersichtlicher darzustellen; man findet:

$$R \,.\, \Sigma_{\varkappa\lambda} = \tfrac{1}{4} \left\{ \mathrm{P} \frac{\partial S_{\varkappa\lambda}}{\partial \varkappa} - \Pi \frac{\partial S_{\varkappa\lambda}}{\partial \lambda} \right\}, \qquad R \,.\, \mathrm{T}_{\varkappa\lambda} = \tfrac{1}{6} \left\{ \mathrm{P} \frac{\partial T_{\varkappa\lambda}}{\partial \varkappa} - \Pi \frac{\partial T_{\varkappa\lambda}}{\partial \lambda} \right\}.$$

Wegen des Näheren vgl. den angeführten Aufsatz von Clebsch und Gordan: Math. Annalen, Bd. 6. — Wir erwähnen hier nur noch einige Resultate, welche mit unseren früheren Untersuchungen über das einem Kegelschnittnetze conjugirte Gewebe zusammenhängen (p. 521). Wir haben damals die Gleichung einer Curve dritter Ordnung aufgestellt, deren Hesse'sche Curve durch $i_x{}^3 = 0$, deren Cayley'sche durch $u_h{}^3 = 0$ gegeben ist, und zwar in der Form

$$p_x{}^3 = 2\,(h h' x)^2\, i_x i_h i_{h'} - (h h' h'')\,(h h' x)\,(h' h'' x)\,(h'' h x) = 0\,.$$

$$(38)\qquad \begin{aligned}\Pi &= S\mathrm{T} - T\Sigma\\ \mathrm{P} &= T\mathrm{T} - \tfrac{1}{6}S^2\Sigma\,.\end{aligned}$$

Für das System $\varkappa\Pi + \lambda\mathrm{P}$ gibt es nun entsprechend der Form ψ eine Form sechster Klasse, welche sich aus F, der linken Seite der Liniencoordinatengleichung von $f = 0$, Σ und T zusammensetzt*), und eine Form neunter Klasse, welche der Form Ω dualistisch gegenübersteht. Es ging aber nach (29) Ω in der kanonischen Form in

---

Die linke Seite dieser Gleichung darf sich nun von unserer Grundform f nur um einen Factor unterscheiden, wenn wir setzen (vgl. die Anmerkung auf p. 550):

$$(1)\qquad 6\,i_x^3 = \Delta = \alpha_x^3, \qquad 6\,u_h^3 = \Sigma = u_s^3\,.$$

Dann entsteht das erste Glied von p_x^3, wenn man die Form $\Theta^{(\Sigma)} = (ss'x)^2 u_s u_{s'}$ bildet, darin die u durch α ersetzt und mit α_x multiplicirt. Nun ist aber (vgl. Gleichung 90 a. a. O.):

$$\Theta^{(\Sigma)} = \mathrm{K} + \tfrac{1}{2}S\Theta$$

und also wird (nach Gleichung 40, p. 561):

$$(2)\qquad 6^3\,(hh'x)^2\,i_h i_{h'}\,i_x = \Delta_3 + \tfrac{1}{2}S\Delta_1 = -\tfrac{1}{3}T\Delta\,.$$

Das zweite Glied von p_x^3 gibt gleich Null gesetzt die Cayley'sche Curve $\Sigma^{(\Sigma)} = 0$ von $u_h^3 = 0$. Nun ist aber (a. a. O. Gl. 99):

$$\Sigma^{(\varkappa\Pi + \lambda P)} = \tfrac{2}{3}R^2\,(G_2 f - G_1\Delta) = -\tfrac{2}{3}R^2\,.\,\Delta_{\varkappa\lambda}\,,$$

und hieraus ergibt sich, wenn man $\Sigma = 6\,u_h^3$ in der Form $\varkappa\Pi + \lambda\mathrm{P}$ mittelst der Gleichungen (38) darstellt:

$$\begin{aligned}\Sigma^{(\Sigma)} &= (ss's'')\,(ss'x)\,(ss''x)\,(s's''x)\\ &= -\,6^3\,(hh'h'')\,(hh'x)\,(hh''x)\,(h'h''x)\\ (3)\qquad &= \tfrac{2}{3}\,(\tfrac{1}{2}S^2 f + T\Delta)\,.\end{aligned}$$

Die Gleichungen (2), (3) geben uns in der That für p_x^3 die verlangte Relation:

$$6^3\,p_x^3 = \tfrac{1}{3}\,S^2\,.\,f\,.$$

Wir haben ferner die Gleichung der Curve dritter Klasse aufgestellt, deren Polarkegelschnitte mit denen von $p_x^3 = 0$ vereinigt liegen (p. 525); dieselbe war:

$$-\tfrac{1}{8}\,u_\pi^3 = (ii'u)^2\,i_h i_h' u_h + (ii'i'')\,(ii'u)\,(i'i''u)\,(i''iu) = 0\,.$$

Wegen (1) findet man aber (a. a. O. Gl. 92):

$$\begin{aligned}6^3\,(ii'u)^2\,i_h i_h' u_h &= (\alpha\beta u)^2\,\alpha_s\beta_s u_s = \mathrm{K}_s{}^2 u_k{}^2 u_s\\ &= \tfrac{1}{2}S\mathrm{T} - \tfrac{1}{3}T\Sigma\,,\end{aligned}$$

und ferner (wegen des Ausdruckes für $\Sigma_{\varkappa\lambda}$):

$$\begin{aligned}6^3\,(ii'i'')\,(ii'u)\,(i'i''u)\,(i''iu) &= -\,(\alpha\beta\gamma)\,(\alpha\beta u)\,(\alpha\gamma u)\,(\beta\gamma u)\\ &= -\,\Sigma_\Delta = \tfrac{2}{3}T\Sigma - \tfrac{1}{2}S\mathrm{T}\,;\end{aligned}$$

und somit erhalten wir:

$$-\frac{6^3}{8}\,u_\pi^3 = S\mathrm{T} - T\Sigma = \Pi\,.$$

Die Gleichung $\Pi = 0$ stellt daher die Curve dritter Klasse dar, deren Polarengewebe zu dem Polarennetze von $f = 0$ conjugirt ist (vgl. Aronhold a. a. O.).

*) Vgl. a. a. O. die Darstellung von Φ in § 18.

das Differenzenproduct von y_1^3, y_2^3, y_3^3 über. Ebenso unterscheidet sich die Form neunter Klasse von dem Producte:

$$(v_1^3 - v_2^3)(v_2^3 - v_3^3)(v_3^3 - v_1^3)$$

nur um einen Factor. Eine Gleichung $v_1^3 - v_2^3 = 0$ ist aber die Gleichung des Productes der drei auf der Seite $y_3 = 0$ gelegenen Wendepunkte; denn dieselhen genügen noch der Bedingung:

$$y_1^3 + y_2^3 = (y_1 + y_2)(y_1 + \varepsilon y_2)(y_1 + \varepsilon^2 y_2) = 0,$$

und die Gleichung des Schnittpunktes einer Linie $y_1 + \varepsilon^i y_2 = 0$ mit $y_3 = 0$ ist eben:

$$v_1 - \varepsilon^i v_2 = 0.$$

*Die zugehörige Form neunter Klasse stellt daher, gleich Null gesetzt, das Product der neun Wendepunkte vor.**)

Und dualistisch entsprechend:

Die Form neunter Ordnung (28) Ω *stellt, gleich Null gesetzt, das Product der neun harmonischen Geraden vor.*

— Den Umstand, dass die Curve dritter Ordnung nur *eine* absolute Invariante und also nur *zwei* Invarianten, haben kann (vgl. p. 556), wollen wir noch verwerthen, um den früher geometrisch erhaltenen Satz zu beweisen, dass *das Doppelverhältniss der vier von einem Punkte der Curve dritter Ordnung an dieselbe gelegten Tangenten constant ist*, und um die absolute Invariante in Function dieses Doppelverhältnisses der Curve auszudrücken.

Ist $a_y^3 = 0$, so ist die Gleichung des Productes der vier von y an die Curve $f \equiv a_x^3 = 0$ zu legenden Tangenten (vgl. p. 501):

$$4f \,.\, D^2 f - 3(Df)^2 \equiv 4\, a_x^3 : b_y^2 b_x - 3\, a_x^2 a_y \,.\, b_x^2 b_y = 0$$
$$= A_x^4 = B_x^4 = C_x^4,$$

eine Curve vierter Ordnung, welche ihrer besonderen Natur nach von jeder Linie u in vier Punkten von demselben Doppelverhältnisse geschnitten wird. Die Curve vierter Klasse (vgl. p. 278):

$$i \equiv (ABu)^4 = 0,$$

deren Tangenten die Curve A_x^4 in vier äquianharmonischen Punkten treffen, wird daher entweder von *allen* Linien u berührt oder sie stellt wieder den Punkt y dar. Die Form $(ABu)^4$ muss also in zwei Factoren zerfallen, von denen der eine von den u, der andere von den A, B unabhängig ist. Der letztere kann aber nur u_y^4 sein, wie geometrisch sofort erhellt. Da nun $(ABu)^4$ eine invariante Bildung ist,

---

*) Ueber die Bildung des Productes der Gleichungen der 9 Wendetangenten vgl. Salmon's Lessons on higher algebra und Clebsch: Crelle's Journal, Bd. 58.

so bleibt für den ersteren nur noch ein von den Coëfficienten der Grundform f allein abhängiger invarianter Ausdruck, und zwar vom vierten Grade in diesen Coëfficienten, d. h. die Invariante S. Es ist daher*):

$$(39) \qquad i = (ABu)^4 = c \,.\, S \,.\, u_y^{\,4},$$

und ebenso:

$$(40) \qquad j = (ABu)^2\,(ACu)^2\,(BCu)^2 = c' \,.\, T \,.\, u_y^{\,6},$$

wo c, c' Zahlenfactoren bedeuten. Nun hängt das Doppelverhältniss der vier Strahlen $A_x^{\,4} = 0$ bekanntlich von der absoluten Invariante

$$\frac{i^3}{j^2} = \frac{c^3}{c'^2} \cdot \frac{S^3}{T^2}$$

ab, ist also *in der That von y unabhängig***), w. z. b. w. Insbesondere haben wir den Satz:

Das Doppelverhältniss einer Curve dritter Ordnung ist äquianharmonisch, wenn die Invariante S, harmonisch, wenn die Invariante T verschwindet. Eine äquianharmonische Curve ist also nach dem Früheren dadurch charakterisirt, dass ihre Hesse'*sche Curve in drei Gerade zerfällt, und dass sich in den drei Doppelpunkten dieser Curve die Wende-*

---

*) Die Invarianten und Covarianten der durch die 4 von y ausgehenden Tangenten gegebenen binären Form sind neuerdings von Harnack durch die Functionalinvarianten von f vollständig dargestellt: Math. Annalen, Bd. 9, p. 218.

**) Eine ganz analoge Schlussweise führt bei Curven höherer Ordnung zu einem entsprechenden Satze. Das Product der $k - 2$ von einem Curvenpunkte y einer Curve k^{ter} Klasse an dieselbe zu legenden Tangenten wird durch eine Gleichung $(k-2)^{\text{ter}}$ Ordnung $A_x^{\,k-2} = 0$ gegeben, welche aus der Liniencoordinatengleichung entsteht, wenn man $u_i = (xy)_i$ setzt und von der linken Seite derselben sodann vermöge $a_y^{\,n} = 0$ einen Factor $[a_y^{\,n-1} a_x]^2$ absondert. Die Gleichung $(k-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, wo $k = n(n-1)$, ist dann vom Grade $2(n-1) - 2$ in den Coëfficienten von f (vgl. p. 279), und vom Grade $k - 2(n-1) = (n-1)(n-2)$ in den y. Eine Invariante p^{ten} Grades der binären Form $(k-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche der Form $A_x^{\,k-2}$ entspricht, enthält (nach p. 195) $\frac{1}{2} p (k-2)$ Determinantenfactoren; die aus ihr nach dem Uebertragungsprincipe zu bildende ternäre Form — entsprechend der obigen Form $(ABu)^4$ — enthält daher die u zur Dimension $\frac{1}{2} p (k-2)$. Dieselbe muss in zwei Factoren zerfallen, von denen der eine die u nicht enthält, der andere eine Potenz von u_y ist. Diese Invariante enthält nun die y im Ganzen zum Grade $p(n-1)(n-2)$; nach Absonderung des Factors $u_y^{\,\frac{1}{2} p (k-2)}$ kommen dieselben daher noch zur Dimension:

$$p(n-1)(n-2) - \tfrac{1}{2} p (k-2) = \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)\,p$$

vor; und wir haben den Satz: *Auf einer Curve n^{ter} Ordnung ohne Doppelpunkte gibt es $\frac{1}{2} p\, n (n-2)(n-3)$ Punkte, von denen $k-2$ Tangenten an die C_n zu ziehen sind, für welche, aufgefasst als Repräsentanten einer binären Form, eine Invariante p^{ten} Grades der letzteren verschwindet.*

tangenten zu dreien schneiden; eine harmonische dadurch, dass die Hesse*sche Curve ihrer* Hesse'*schen wieder die Grundcurve ist* (p. 518 u. 559).

Die absolute Invariante einer binären biquadratischen Form hatten wir früher als Function des Doppelverhältnisses α dargestellt; es war (s. Gl. (28) p. 239):

$$\frac{i^3}{j^3} = 24 \frac{(1-\alpha+\alpha^2)^3}{(1+\alpha)^2(2-\alpha)^2(1-2\alpha)^2}.$$

Insbesondere erhalten wir hieraus für $\alpha = 1$ die Bedingung für eine Doppelwurzel: $i^3 - 6j^2 = 0$. Die linke Seite dieser Gleichung muss aber in unserem Falle mit der Discriminante von $f = a_x^3$ bis auf einen Factor C übereinstimmen, d. h mit

$$6R = 6T^2 - S^3.$$

Wir haben also wegen (39) und (40):

$$Ci^3 = c^3 S^3 u_y^{12}, \quad Cj^2 = c'^2 T^2 u_y^{12},$$

also $\frac{c^3}{c'^2} = 1$: *Die absolute Invariante hängt mit dem Doppelverhältnisse α der Curve dritter Ordnung zusammen durch die Gleichung:*

$$\frac{S^3}{T^2} = \frac{i^3}{j^2} = 24 \frac{(1-\alpha+\alpha^2)^3}{(1+\alpha)^2(2-\alpha)^2(1-2\alpha)^2}. \tag{41}$$

Ebenso ist natürlich für eine Curve des Büschels $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$:

$$\frac{S_{\varkappa\lambda}^3}{T_{\varkappa\lambda}^2} = 24 \frac{(1-\alpha_{\varkappa\lambda}+\alpha_{\varkappa\lambda}^2)^3}{(1+\alpha_{\varkappa\lambda})^2(2-\alpha_{\varkappa\lambda})^2(1-2\alpha_{\varkappa\lambda})^2};$$

und da $\varkappa$, λ in S^3 und T^2 zum zwölften Grade vorkommen, so folgt:

Es gibt in dem syzygetischen Büschel $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$ immer 12 Curven von gleichem Doppelverhältnisse (jedoch nur vier äquianharmonische und sechs harmonische).

VI. Curven dritter Ordnung mit Doppel- oder Rückkehrpunkt. — Ausartungen derselben.

Nachdem wir in Vorstehendem die wichtigsten Punkte aus der Theorie der allgemeinen Curven dritter Ordnung erörtert haben, bleibt uns übrig, die Modificationen zu untersuchen, welche die erwähnten Verhältnisse durch das Auftreten von Singularitäten (also insbesondere von Doppel- und Rückkehrpunkten und durch das Zerfallen der betrachteten Curve) erleiden. Dabei werden uns immer zwei wesentlich verschiedene Fragen beschäftigen:

1) Welche Relationen zwischen den Functionalinvarianten der cubischen Form sind nothwendig und hinreichend zur Charakterisirung der betreffenden Singularität?

2) Wie kann man, die Erfüllung dieser Relationen vorausgesetzt, die auftretenden singulären Punkte oder Tangenten etc. durch die Functionalinvarianten der Grundform darstellen?

Drittens endlich müsste man untersuchen, welche Besonderheiten bei den verschiedenen covarianten Curven etc. in den betrachteten Specialfällen auftreten. Doch würde uns letztere Frage hier zu weit führen; auch für die Beantwortung der beiden zuerst gestellten reichen die im Vorstehenden gegebenen Bruchstücke aus der Theorie der ternären cubischen Formen nicht aus; gleichwohl werden wir dieselben der Vollständigkeit halber behandeln, indem wir uns dabei eventuell auf andere Arbeiten beziehen.*) Ausserdem aber werden wir bei den Curven mit Doppel- sowie bei denen mit Rückkehrpunkt für die Behandlung der Geometrie auf der Curve neue Hülfsmittel kennen lernen, deren Erweiterung dann später zu den Anwendungen der elliptischen Functionen auf die Theorie der allgemeinen Curven dritter Ordnung führt.

Wir beginnen mit Betrachtung der *Curven mit einem Doppelpunkte.***) Dieselben sind charakterisirt durch das Verschwinden der Discriminante R, welche sich aus den beiden Invarianten

$$S = (abc)(abd)(acd)(bcd), \quad T = (abc)(abd)(ace)(bcf)(def)^2$$

in folgender Weise zusammensetzt (p. 565):

$$R = T^2 - \tfrac{1}{6} S^3.$$

Es entsteht hier sofort die Frage nach der Bestimmung des Doppelpunktes y für den Fall $R = 0$. Wir haben uns also nach einer zugehörigen Form umzusehen, welche gleich Null gesetzt diesen Punkt darstellt, und zwar mindestens dreifach zählend, da es keine zugehörige Form niedrigerer Klasse gibt. Eine solche Form ist nun die früher mit Π bezeichnete (p. 577), welche durch die Gleichung:

$$(1) \qquad \Pi = S\mathrm{T} - T\Sigma$$

definirt war.

Als Bedingung dafür, dass eine ternäre cubische Form $a_x{}^3$ die dritte Potenz einer linearen Form darstellt, werden wir nämlich weiterhin das identische Verschwinden der Zwischenform $\Theta = (abu)^2 a_x b_x$ erkennen. Diese Form gebildet für $\varkappa\Pi + \lambda \mathrm{P}$ statt für $a_x{}^3$ gibt aber***):

$$\Theta^{(\varkappa\Pi + \lambda P)} = R \,.\, \{G_{11}\mathrm{K} - 2 G_{12}\mathrm{H} + G_{22}\Theta\},$$

*) Und zwar besonders auf den mehrfach erwähnten Aufsatz von Clebsch und Gordan: Math. Annalen, Bd. 6.

**) Ausführlicher findet man manche Punkte aus der Theorie dieser Curven in dem Werke von Salmon erörtert, sowie bei Weyr: Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde, Leipzig 1869.

***) Vgl. a. a. O. Gleichung (91).

und diese Bildung verschwindet in der That unabhängig von den u_i und x_i, sobald R Null ist, insbesondere ist also für $\varkappa = 1$, $\lambda = 0$: $\Theta^{(\Pi)} = 0$, wie es sein sollte.*) Sonach können wir setzen

$$(2) \qquad \Pi = (u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3)^3.$$

Um zu zeigen, dass die Grössen y_i mit den Coordinaten des Doppelpunktes zusammenfallen, haben wir nur nachzuweisen, dass für $\Pi = u_\pi{}^3$ sowohl $a_\pi{}^3$ als $\alpha_\pi{}^3$ verschwindet (wo wieder $\alpha_x{}^3 = (abc)^2 a_x b_x c_x$), d. h. dass der Punkt y sowohl auf $f = 0$ als auf der Hesse'schen Curve $\Delta = 0$ liegt. Alsdann nämlich kann y nur der Doppelpunkt sein, denn einer der drei (nach den Plücker'schen Formeln noch möglichen) Wendepunkte von f, die doch symmetrisch auftreten, kann unmöglich allein für sich rational dargestellt werden. Nun ist aber für $\Sigma = u_s{}^3$, $\mathrm{T} = u_t{}^3$ (vgl. p. 548 und p. 556):

$$a_s{}^3 = S, \quad a_t{}^3 = T;$$

also nach (1) $a_\pi{}^3 = 0$ auch unabhängig von $R = 0$.**) Ferner ist nach p. 554 und wegen der Relation $\mathrm{T}' = \mathrm{T}$ auf p. 556:

$$\alpha_s{}^3 = \tfrac{1}{4}\,\delta S = T, \quad \alpha_t{}^3 = \tfrac{1}{6}\,\delta T = \tfrac{1}{6} S^2,$$

also:

$$\alpha_\pi{}^3 = \tfrac{1}{6} S^3 - T^2 = -R.$$

und sonach in der That $a_\pi{}^3 = 0$ und $\alpha_\pi{}^3 = 0$, q. e. d.

Wir haben also die Gleichung:

$$\Pi = u_\pi{}^3 = \Sigma\Sigma\Sigma \pi_{ikh} u_i u_k u_h = (u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3)^3;$$

*und die Coordinaten des Doppelpunktes y bestimmen sich durch die laufende Proportion****):*

$$y_1{}^3 : y_1{}^2 y_2 : y_1{}^2 y_3 : \ldots : y_1 y_2 y_3 = \pi_{111} : \pi_{112} : \pi_{113} : \ldots : \pi_{123},$$

wo für $\mathrm{T} = u_t{}^3$, $\Sigma = u_s{}^3$:

$$\pi_{ikh} = S t_{ikh} - T s_{ikh}.$$

*) In dem Büschel $\varkappa\Pi + \lambda \mathrm{P} = 0$ ist auch die Curve $\Sigma = 0$ enthalten und zwar nach p. 577 für $\varkappa = -\frac{T}{R}$, $\lambda = \frac{S}{R}$; für Σ verschwindet also Θ nicht, ebenso wenig für T; es ist vielmehr z. B. $\Theta^{(\Sigma)} = \mathrm{K} + \frac{1}{2} S\Theta$ nach Gleichung (90) a. a. O.

**) Diese Relation folgt auch aus der Identität $a_p{}^2 a_x u_p = 0$, welche nach Gleichung (20) p. 525 besteht; denn $u_\pi{}^3 = \Pi$ stimmt nach der Anmk. auf p. 577 mit der dort durch $u_\pi{}^3$ bezeichneten Form bis auf einen Zahlenfactor überein, und $p_x{}^3$ haben wir durch $a_x{}^3$ zu ersetzen. Bezeichnen wir aber die Form $a_\pi{}^3 a_x u_\pi$ mit P, so ist:

$$a_\pi{}^3 = \frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial u_1} + \frac{\partial^2 P}{\partial x_2 \partial u_2} + \frac{\partial^2 P}{\partial x_3 \partial u_3},$$

verschwindet also in der That mit P.

***) Vgl. Aronhold: Crelle's Journal, Bd. 55, p. 165.

Nachdem so der Doppelpunkt gefunden ist, kann man die Curvengleichung in eine sehr einfache kanonische Form bringen. Zwei Seiten des einzuführenden Fundamentaldreiecks sind durch die beiden Tangenten des Doppelpunktes gegeben, werden also durch Zerfällung des Ausdruckes $a_y a_x^2$ in seine beiden linearen Factoren gefunden (vgl. p. 104); die dritte Seite ist die allein noch übrige Wendepunktslinie. Es sind nämlich nur noch drei Wendepunkte vorhanden, die anderen sechs fallen in den Doppelpunkt zusammen (vgl. p. 327 und 357), indem die Hesse'sche Curve $\Delta = 0$ in ihm ebenfalls einen Doppelpunkt hat, und ihre beiden Zweige die der Grundcurve berühren. Die drei Wendepunkte liegen natürlich wieder auf einer Geraden, und diese soll die dritte Seite unseres Coordinatendreiecks bilden. Um sie zu finden, haben wir die zerfallenden Curven des Büschels

$$\varkappa f + \lambda \Delta = 0 \tag{3}$$

zu suchen, welche im Allgemeinen durch die biquadratische Gleichung $G(\varkappa, \lambda) = 0$ gegeben sind. Letztere hat aber, da wegen $R = 0$ ihre *beiden* Invarianten verschwinden (vgl. p. 564 und 240 f.), drei gleiche Wurzeln.

Es gibt daher in dem Büschel (3) *zwei in drei Gerade zerfallende Curven, von denen eine dreifach, die andere einfach zählt.*

Die erstere jedoch gibt kein eigentliches Dreieck, denn dieselbe besteht (wie man durch Grenzübergang von der allgemeinen zur speciellen Curve beweisen mag, indem man dabei berücksichtigt, dass im Doppelpunkte 6 Wendepunkte vereinigt liegen) aus den Verbindungslinien des Doppelpunktes mit den drei Wendepunkten. Die letztere dagegen besteht aus der Wendepunktslinie und den beiden Tangenten im Doppelpunkte; zwei Seiten sind uns also schon durch Zerlegung des Ausdrucks $a_y a_x^2$ in lineare Factoren bekannt, und so ist es leicht, die Coordinaten der dritten Seite zu finden. Sei nun die Gleichung der letzteren $x_3 = 0$, und seien $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ die Gleichungen der Tangenten im Doppelpunkte. Alsdann kann die Curvengleichung immer auf die Form

$$f \equiv \alpha x_1^3 + \beta x_2^3 + 6\gamma x_1 x_2 x_3 = 0$$

gebracht werden; denn diese Curve hat in $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ einen Doppelpunkt und diese Coordinatenseiten selbst zu Tangenten; und $x_3 = 0$ schneidet die Wendepunkte aus, da die Gleichung der Hesse-schen Curve wird:

$$\frac{1}{6}\Delta = \begin{vmatrix} \alpha x_1 & \gamma x_3 & \gamma x_2 \\ \gamma x_3 & \beta x_2 & \gamma x_1 \\ \gamma x_2 & \gamma x_1 & 0 \end{vmatrix} = \gamma^2 (2\gamma x_1 x_2 x_3 - \alpha x_1^3 - \beta x_2^3).$$

Dieselbe schneidet also $f = 0$ ausser im Doppelpunkte in der That nur noch in den Schnittpunkten von $x_3 = 0$. Aber auch die Constanten α, β, γ in f können wir durch Aenderung der Definition der Coordinaten x um passende Factoren fortschaffen, was dem Umstande entspricht, dass die Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt keine absolute Invariante (d. h. keine für sie charakteristische Constante) mehr hat. Aus letzterem Umstande folgt dann auch, dass *jede* C_3 mit Doppelpunkt in obiger Form darstellbar ist; denn jede solche Curve kann in jede andere der Art transformirt werden. Wir haben also den Satz:

Die Gleichung einer Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt kann immer auf eine Weise in die Form

$$f \equiv x_1^3 + x_2^3 + 6\, x_1 x_2 x_3 = 0 \tag{4}$$

transformirt werden; und die Gleichung der Hesse'*schen Curve ist dann:*

$$\tfrac{1}{6}\,\Delta = 2\, x_1 x_2 x_3 - x_1^3 - x_2^3 = 0\,.$$

Der Büschel $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ oder:

$$(x_1^3 + x_2^3)(\varkappa - 6\lambda) + 6\, x_1 x_2 x_3 (\varkappa + 2\lambda) = 0 \tag{5}$$

enthält nun in der That nur zwei zerfallende Curven, nämlich für $\varkappa = 6\lambda$ und für $\varkappa = -2\lambda$. Wir erkennen ferner, dass für die Lage der Ecken des Fundamentaldreiecks auf der Wendepunktslinie noch derselbe Satz gilt wie bei einer allgemeinen Curve (vgl. p. 508); dieselben werden nämlich ausgeschnitten durch die Linien $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, während die Wendepunkte durch $x_2^3 + x_1^3 = 0$ bestimmt sind. Also:

Die Tangenten im Doppelpunkte schneiden die Wendepunktslinie in zwei Punkten, welche die Hesse'*sche Form für die durch die drei Wendepunkte gegebene binäre cubische Form darstellen. Die Covariante Q der letzteren wird durch die drei harmonischen Geraden der drei Wendepunkte ausgeschnitten.**)

---

*) Man kann überhaupt (vgl. die Fortsetzung des Textes) die Geometrie auf der Curve mit der Theorie der binären cubischen Form in Verbindung setzen, wenn man für letztere die Strahlen vom Doppelpunkte nach den drei Wendepunkten als Grundstrahlen annimmt, wie dies von Igel (Math. Annalen, Bd. 6, p. 633) und Rosenow (Ueber Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkt. Breslau 1873) ohne Benutzung der kanonischen Form durchgeführt ist. Wir erwähnen hier nur noch den Satz:

Ist a_ξ^3 die binäre Form, welche die Wendepunkte darstellt, d. h. die Verbindungslinien des Doppelpunktes mit ihnen, so liegen drei Punkte der Curve in gerader Linie, wenn ihre Verbindungslinien ξ, η, ζ mit dem Doppelpunkte der Bedingung $a_\xi a_\eta a_\zeta = 0$ genügen.

Für $\eta = \zeta$ ergibt sich hieraus der Zusammenhang der Polarenbildungen von a_ξ^3 mit der Theorie der Tangentialpunkte. — Wir kommen hierauf später bei Behandlung der C_n vom Geschlechte Null zurück.

Diese drei Linien gehen, wie die Polare eines jeden Punktes, durch den Doppelpunkt; der eben ausgesprochene Satz gilt also ebenso für die Strahlen des durch den Doppelpunkt bestimmten Büschels, wie für die Punkte der Wendepunktslinie $x_3 = 0$. Ferner muss auch für die Realität der Wendepunkte dasselbe gelten, wie für die Grundpunkte einer cubischen Form in ihrer Beziehung zur Hesse'schen Form.

*Von den drei Wendepunkten sind daher zwei conjugirt imaginär und einer reell, wenn die Tangenten des Doppelpunktes reell sind, dagegen alle reell, wenn die Tangenten des Doppelpunktes imaginär sind, d. h. wenn letzterer ein isolirter Punkt ist.**)

Wir können aber überhaupt die Geometrie auf der Curve mit der Geometrie in dem durch den Doppelpunkt bestimmten Strahlbüschel in Verbindung setzen; denn jeder Strahl desselben trifft die Curve nur noch in *einem* Punkte: *Die Curve ist also eindeutig auf den Strahlbüschel und somit auf eine beliebige Gerade abgebildet.* Um dieser Beziehung einen algebraischen Ausdruck zu geben, um die Coordinaten eines Punktes der Curve durch diejenigen des entsprechenden Strahles im Büschel auszudrücken, knüpfen wir an die Chasles'sche Erzeugungsweise der Curven dritter Ordnung an, welche durch einen Strahl und einen ihm projectivischen Kegelschnittbüschel vermittelt wurde (vgl. p. 535). *Eine solche Curve mit Doppelpunkt wird nämlich erzeugt, wenn man den Mittelpunkt des Strahlbüschels in einen Grundpunkt des Kegelschnittbüschels verlegt.* In der That, es sei ersterer gegeben durch: $x_1 + \lambda x_2 = 0$, dann ist die Gleichung eines ihm projectivischen Kegelschnittbüschels der beregten Art von der Form:

$$Ax_1 + Bx_2 + \lambda (Cx_1 + Dx_2) = 0,$$

wo A, B, C, D linear in den x sind; und durch Elimination von λ folgt:

$$(Ax_1 + Bx_2)\, x_2 - (Cx_1 + Dx_2)\, x_1 = 0,$$

eine Gleichung, in der jedes Glied mindestens von der zweiten Ordnung in x_1, x_2 ist, w. z. b. w.

Auf Grund dieser Erzeugungsweise *lässt sich auch die Construction der Curve ausführen, wenn der Doppelpunkt* 0 *und sechs andere Punkte*

$$1, 2, 3, 4, 5, 6$$

gegeben sind. Wir benutzten etwa die Punkte 0, 1, 2, 3 als Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels, ordnen dann dem Kegelschnitte

*) Wie die erstere dieser Curven aus der allgemeinen C_3 entsteht, ist auf p. 499 gezeigt; die mit isolirtem Punkte kann man aus der Curve 3 in Fig. 62 dadurch entstanden denken, dass sich das Oval immer mehr auf einen Punkt zusammenzieht.

durch 4 den Strahl $\overline{04}$, dem durch 5 den Strahl $\overline{05}$, dem durch 6 den Strahl $\overline{06}$ zu, womit die projectivische Beziehung zwischen Strahl- und Kegelschnittbüschel festgelegt ist. Denkt man sich diese Beziehung wieder durch den Tangentenbüschel der Kegelschnitte in einem der Punkte 1, 2, 3 vermittelt (vgl. p. 375), so bietet die Construction des Schnittpunktes eines beliebigen Strahles durch 0 mit der Curve keine Schwierigkeiten mehr.

Um die Gleichung der Curve sofort in der Form (4) zu erhalten, brauchen wir den Kegelschnittbüschel nur in der Form:

$$\lambda x_1^2 + x_2^2 + 6\lambda x_2 x_3 = 0 \tag{6}$$

anzunehmen, wenn wieder $x_1 + \lambda x_2 = 0$ der Strahlbüschel ist. Aus (6) folgt aber weiter für $x_1 = -\lambda x_2$:

$$x_2 - \lambda^2 x_1 + 6\lambda x_3 = 0. \tag{7}$$

Schreiben wir nun $\frac{\lambda}{\mu}$ statt λ, so finden wir hieraus:

$$\sigma x_1 = \lambda, \quad \sigma x_2 = -\mu, \quad \sigma x_3 = \frac{\mu^3 + \lambda^3}{6\lambda\mu},$$

oder wenn wir mit $6\lambda\mu$ multipliciren:

$$\varrho x_1 = 6\lambda^2\mu, \quad \varrho x_2 = -6\lambda\mu^2, \quad \varrho x_3 = \lambda^3 + \mu^3. \tag{8}$$

Die Coordinaten der Punkte der Curve stellen sich also als Functionen dritten Grades eines Parameters $\frac{\lambda}{\mu}$ dar, wo λ, μ die Coordinaten der Strahlen des durch den Doppelpunkt bestimmten Büschels sind, bezogen auf die Tangenten des Doppelpunktes als Grundstrahlen; dabei entspricht jedem Punkte der Curve ein Strahl des Büschels und umgekehrt.

Diese Parameterdarstellung ist besonders zur Untersuchung der Geometrie auf der Curve nützlich. Wir wollen mit Hülfe derselben einige Probleme behandeln, welche wir später überhaupt für Curven vom Geschlechte Null in ähnlicher Weise erledigen werden. — Schneiden wir die Curve mit einer beliebigen Geraden u, so bestimmen sich die den Schnittpunkten entsprechenden Parameterwerthe aus der cubischen Gleichung:

$$6\lambda^2\mu u_1 - 6\lambda\mu^2 u_2 + (\lambda^3 + \mu^3)\, u_3 = 0.$$

Dividiren wir dieselbe durch $u_3\mu^3$, so haben wir eine Gleichung für $\frac{\lambda}{\mu}$, deren constantes Glied stets gleich der Einheit ist, wie auch die Gerade gewählt sein mag. Bezeichnen wir also durch beigefügte Indices die Wurzeln der Gleichung, so ist immer:

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} \cdot \frac{\lambda_2}{\mu_2} \cdot \frac{\lambda_3}{\mu_3} = -1; \tag{9}$$

und hieraus kann man den dritten Schnittpunkt jeder Geraden bestimmen, wenn die beiden anderen bekannt sind.

Wird insbesondere die Curve von der Geraden u berührt, so sind zwei der Wurzeln einander gleich, und wir haben

$$(10) \qquad \frac{\lambda_3}{\mu_3} = -\frac{\mu_1^2}{\lambda_1^2}.$$

Diese Gleichung bestimmt die beiden Berührungspunkte

$$(10^*) \qquad \frac{\lambda_1}{\mu_1} = +\sqrt{-\frac{\mu_3}{\lambda_3}}, \qquad \frac{\lambda_1}{\mu_1} = -\sqrt{-\frac{\mu_3}{\lambda_3}}$$

der von einem Punkte λ_3, μ_3 der Curve an dieselbe zu ziehenden Tangenten, oder umgekehrt den Tangentialpunkt λ_3, μ_3 des Punktes λ_1, μ_1.

Ist die Linie u endlich Wendetangente, so wird:

$$\frac{\lambda^3}{\mu^3} = -1, \quad \text{oder} \quad \lambda^3 + \mu^3 = 0,$$

d. h. $x_3 = 0$, wie es sein muss. Die Gleichungen (10*) geben, da sich die beiden Werthe von $\lambda_1 : \mu_1$ nur durch das Vorzeichen unterscheiden, unmittelbar den folgenden Satz:

*Wenn man die Berührungspunkte der beiden an die Curve von einem Punkte derselben zu legenden Tangenten mit dem Doppelpunkte verbindet, so liegen diese Verbindungslinien harmonisch zu den Tangenten im Doppelpunkte. Alle diese Strahlenpaare bilden also die quadratische Involution der ersten Polaren der durch die Linien nach den Wendepunkten dargestellten binären cubischen Form.**)

Hierdurch entspricht jedem Punkte der Curve ein zweiter; je zwei zusammengehörige Punkte haben denselben Tangentialpunkt, bilden also ein *Polepaar*, wenn wir dieses Wort, wie bei der allgemeinen Curve dritter Ordnung, gebrauchen wollen (vgl. p. 527). Beim Auftreten eines Doppelpunktes gibt es aber auf der Curve nur noch *eine* Schaar solcher Polepaare; und in der That lässt sich eine Curve dritter Ordnung des Büschels (5) nur für *eine* andere Curve desselben als Hesse'sche Curve auffassen, denn die Coëfficienten von $\Delta_{\varkappa\lambda}$ werden durch Absonderung eines gemeinsamen quadratischen Factors linear in $\varkappa$, λ. Die Verbindungslinie der Punkte eines solchen Polepaares umhüllt die Cayley'sche Curve (vgl. p. 516); in Folge dessen können wir die Gleichung derselben leicht aufstellen. Die Gleichung einer solchen Verbindungslinie ist nämlich nach (10*):

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \lambda^2\mu & -\lambda\mu^2 & \lambda^3+\mu^3 \\ \lambda^2\mu & \lambda\mu^2 & \mu^3-\lambda^3 \end{vmatrix} = 0,$$

---

*) Vgl. p. 208. Dass die quadratischen Polaren einer binären cubischen Form in der That eine Involution bilden, deren Doppelelemente durch die betreffende Hesse'sche Form gegeben sind, ist sofort ersichtlich.

oder ausgerechnet:

$$\lambda\mu\,(\mu^4 x_1 - \lambda^4 x_2 - \lambda^2\mu^2 x_3) = 0.$$

Die Cayley'*sche Curve zerfällt also in den Doppelpunkt und in einen Kegelschnitt, dessen Tangenten gegeben sind durch:*

$$\varrho u_1 = -\mu^4, \quad \varrho u_2 = \lambda^4, \quad \varrho u_3 = \lambda^2\mu^2,$$

dessen Gleichung also ist:

$$u_1 u_2 + u_3^2 = 0.$$

Derselbe berührt somit die Tangenten des Doppelpunktes in ihren Schnittpunkten mit der Wendepunktslinie. Dieses Resultat lässt sich auch ganz allgemein nachweisen, denn wir werden sehen, dass die zugehörige Form:

$$\mathsf{P} = T\mathsf{T} - \tfrac{1}{6} S^2 \Sigma$$

identisch verschwinden muss, wenn die Form $f = a_x^3$ in einen quadratischen und einen linearen Factor zerfallen soll; und man findet*):

$$(11) \qquad \mathsf{P}^{(\varkappa\Pi + \lambda P)} = -\tfrac{1}{486} R^7 S_{\varkappa\lambda}^2 \left(\frac{\partial S_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa}\Delta - \frac{\partial S_{\varkappa\lambda}}{\partial\lambda} f\right),$$

also für $\varkappa = -\frac{T}{R}$, $\lambda = \frac{S}{R}$ aus der Formel für $S_{\varkappa\lambda}$:

$$\tfrac{1}{4} R^3 \frac{\partial S_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa} = 2\,TS\,.\,R, \quad \tfrac{1}{4} R^3 \frac{\partial S_{\varkappa\lambda}}{\partial\lambda} = (\tfrac{1}{2} S^3 - T^2)\,.\,R,$$

und es erhält $\mathsf{P}^{(\Sigma)}$ in der That den Factor R, verschwindet also identisch beim Auftreten eines Doppelpunktes. —

Wir wollen die Relation (10) noch zur Betrachtung gewisser der Curve eingeschriebenen Polygone benutzen. Wir gehen von einem beliebigen Curvenpunkte (λ_0) aus (es ist λ_0 für $\frac{\lambda_0}{\mu_0}$ gesetzt), ziehen von ihm eine Tangente an die Curve, deren Berührungspunkt λ_1 sei; von letzterem ziehen wir wieder eine Tangente, die in λ_2 berührt, u. s. f. Es fragt sich, wie muss der Punkt λ_0 liegen, damit sich das Polygon schliesst, d. h. damit die n^{te} Seite eines so construirten Polygons wieder durch ihn hindurchgeht.**) Es ist nun nach (10):

---

*) Vgl. Gleichung (108) in dem Aufsatze von Clebsch und Gordan, Math. Annalen, Bd. 6.

**) Diese Polygone sind von Clebsch an einer Curve dritter Klasse mit Doppeltangente angegeben; vgl. dessen Note zu der Abhandlung des Hrn. Cremona „sur l'hypocycloïde à trois rebroussements", Crelle's Journal, Bd. 64, ferner Ausführlicheres (insbesondere auch in Rücksicht auf das Reelle und Imaginäre) bei Durège: Math. Annalen, Bd. 1, p. 509, und Rosenow (a. a. O.) — Die *Hypocykloïde* entsteht aus einer allgemeinen Curve 3ter Klasse, 4ter Ordnung, wenn man als Doppeltangente die unendlich ferne Gerade, als deren Berührungspunkte die imaginären Kreispunkte wählt. Aus den früheren Sätzen

$$\lambda_1{}^2 = -\frac{1}{\lambda_0}, \quad \lambda_2{}^2 = -\frac{1}{\lambda_1}, \quad \lambda_3{}^2 = -\frac{1}{\lambda_2}, \ldots \lambda_n{}^2 = -\frac{1}{\lambda_{n-1}};$$

und also sind die Parameter dieser Punkte in umgekehrter Reihenfolge:

$$\lambda_n, \quad \lambda_{n-1} = \lambda_n{}^{-2}, \quad \lambda_{n-2} = \lambda_n{}^4, \ldots \lambda_{n-r} = \lambda_n{}^{(-2)^r}, \ldots \lambda_0 = \lambda_n{}^{(-2)^n}.$$

Zur Bestimmung der Punkte, von denen aus sich in der angegebenen Weise ein geschlossenes Polygon ($\lambda_0 = \lambda_n$) *construiren lässt, hat man also die Gleichung*:

$$\lambda_0{}^{(-2)^n - 1} = 1. \tag{12}$$

Aber nur dann erhält man für *jede* Lösung dieser Gleichung ein wirkliches n-Eck, wenn n eine Primzahl ist. Ist dagegen etwa $n = m \cdot p$, wo p eine Primzahl ist, so ist $(-2)^n - 1$ durch $(-2)^p - 1$ theilbar und also entsteht die Gleichung (12) aus der Gleichung:

$$\lambda^{(-2)^p - 1} = 1,$$

wenn man beide Seiten der letzteren in die α^{te} Potenz erhebt, wo $\alpha = \frac{(-2)^n - 1}{(-2)^p - 1}$. Wir erhalten daher nur ein p-Eck, welches α-mal durchlaufen wird, um ein n-Eck zu liefern. Man erkennt, dass eine genauere Behandlung dieser Aufgabe zahlentheoretische Ueberlegungen erfordert, mit Hülfe derselben sich dann aber leicht erledigt.*)

Wir behandeln noch ein ähnliches Problem, dessen Lösung (für Curven ohne Doppelpunkt) Steiner zuerst gegeben hat. Auf der Curve seien zwei feste Punkte mit den Parametern $\frac{\lambda}{\mu} = p$, $\frac{\lambda}{\mu} = q$ gegeben. Wir ziehen durch p eine beliebige Gerade, welche noch in den Punkten λ_1, λ_2 schneiden möge. Wir verbinden λ_2 mit q, erhalten als dritten Schnittpunkt dieser Linie λ_3, seine Verbindungslinie mit p schneide in λ_4 u. s. f. Wir construiren also *ein Polygon, dessen ungerade Seiten alle durch p, dessen gerade alle durch q gehen*, von dessen Ecken also immer zwei auf einander folgende mit p oder q in gerader Linie liegen. Wir fragen nach den Bedingungen der Möglichkeit, dass sich ein solches Polygon schliesst, d. h. dass eine Gerade desselben wieder durch λ_1 geht. Die Gleichung (9) gibt uns nun die Bedingungen:

des Textes folgt dann, dass zwei Tangenten der Hypocykloïde, deren Berührungspunkte auf einer dritten Tangente derselben liegen, zu einander senkrecht stehen, und dass die Schnittpunkte je zweier solcher Tangenten einen Kreis beschreiben, welcher zusammen mit der unendlich fernen Geraden die Cayley'sche Curve der Hypocykloïde bildet.

*) In ähnlicher Weise erledigt sich auch die Frage nach den Polygonen, welche der Curve 3. Ordnung, betrachtet als Hesse'scher Curve einer anderen, eingeschrieben und der zugehörigen Cayley'schen umgeschrieben sind. Vgl. Rosenow, a. a. O.

$$p\lambda_1\lambda_2 = -1, \quad p\lambda_3\lambda_4 = -1, \quad \ldots \quad p\lambda_{2n-1}\lambda_{2n} = -1,$$
$$q\lambda_2\lambda_3 = -1, \quad q\lambda_4\lambda_5 = -1, \quad \ldots \quad q\lambda_{2n}\lambda_1 \quad = -1.$$

Multipliciren wir alle Gleichungen, in denen p vorkommt, mit einander, und ebenso alle, in denen q vorkommt, so folgt:

$$p^n = q^n, \quad \text{oder} \quad p = q\sqrt[n]{1}.$$

Wenn p gegeben ist, so ist also q nicht mehr willkürlich; dagegen kann der Punkt λ_1 noch völlig beliebig gewählt werden: das Polygon schliesst sich immer, denn man kann aus den aufgestellten Gleichungen die Parameter seiner Ecken successive direct berechnen. Also:

Es gibt unendlich viele Polygone von $2n$ Seiten und $2n$ Ecken, deren Ecken auf einer gegebenen Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt liegen, deren ungerade Seiten sich in einem Punkte p der Curve treffen, und deren gerade Seiten durch einen zweiten Punkt q derselben gehen. Ist p gegeben, so ist q dadurch mehrdeutig bestimmt; zu zwei zusammengehörigen Punkten p, q gibt es aber unendlich viele Polygone, indem die erste Seite ganz beliebig gewählt werden kann.

Es ist jedoch auch hier zu bemerken, dass die Natur der Zahl n für die Anzahl der *eigentlichen* Lösungen des Problems von Bedeutung ist. Wir gehen jetzt nicht näher auf diese Fragen ein, da wir das gleiche Problem später bei den allgemeinen Curven dritter Ordnung mit Hülfe der elliptischen Functionen behandeln werden. Ueberhaupt sollen die hier angeführten Betrachtungen nur als einfache Beispiele für eine Methode zur Behandlung der Geometrie auf einer Curve dienen, welche wir später für beliebige Curven vom Geschlecht Null und im Anschlusse an die Abel'schen Integrale auch für solche von beliebigem Geschlechte entwickeln werden. —

Wir wenden uns zur Betrachtung der *Curven mit Rückkehrpunkt.* Für dieselben bestehen nach Salmon gleichzeitig die Bedingungen:

$$S = 0, \quad T = 0. \tag{13}$$

Denn S und T waren die beiden Invarianten der biquadratischen Form, welche durch die vier von einem Punkte der allgemeinen Curve dritter Ordnung an dieselbe möglichen Tangenten dargestellt wird (p. 579); und ihr Verschwinden sagt also aus, dass von den vier Tangenten drei zusammenfallen, wie es in der That nur beim Auftreten eines Rückkehrpunktes möglich ist. Zur Bestimmung der Coordinaten y des letzteren*) bemerken wir, dass T in Folge von (13) ein vollständiger Cubus wird; denn $\Theta^{(\varkappa\Pi + \lambda P)}$ gibt für $\varkappa = -\frac{1}{6}\frac{S^2}{R}$, $\lambda = \frac{T}{R}$:

*) Vgl. hier und für die weiter unten behandelten Fälle des Zerfallens der Curve 3. Ordnung: Gundelfinger, Ueber die Ausartungen einer Curve 3. Ordnung, Math. Annalen, Bd. 4.

$$\Theta^{(T)} = \tfrac{1}{36} S^2 \Theta + \tfrac{2}{3} T H - \tfrac{1}{6} S K .$$

Diese Form verschwindet sonach mit S und T, und das ist, wie wir sogleich sehen werden, die Bedingung dafür, dass T die dritte Potenz eines linearen Ausdruckes ist; und zwar wird

$$\mathsf{T} = u_t^2 = u_y^3 .$$

Um dies einzusehen, haben wir zu zeigen, dass die Gleichungen

$$a_x^3 = 0 , \quad (a b u)^2 a_x b_x = 0 ,$$

welche für $x_i = y_i$ unabhängig von den u_i erfüllt sind, ebenso für $x_i = t_i$ befriedigt werden.

Nun ist aber (s. Gleichung (29) p. 555 und (36) p. 557):

$$a_t^3 = T, \ (a b u)^2 a_t b_t u_t = \tfrac{1}{6} S . \Sigma ,$$

also beide Ausdrücke verschwinden in der That unabhängig von den u_i in Folge von (13); und wir haben den Satz:

Die hinreichenden und nothwendigen Bedingungen dafür, dass die Curve $f = 0$ einen Rückkehrpunkt besitze, sind $S = 0$ und $T = 0$. Die Coordinaten des Rückkehrpunktes bestimmen sich durch die laufende Proportion ($\mathsf{T} = u_t^3$):

$$y_1^3 : y_1^2 y_2 : y_1^2 y_3 : \ldots : y_1 y_2 y_3 = t_{111} : t_{112} : t_{113} : \ldots : t_{123} .$$

Die Hesse'sche Curve muss nach unseren allgemeinen Erörterungen (p. 327) im Rückkehrpunkte einen dreifachen Punkt haben, und zwar so, dass von ihren drei Tangenten in demselben zwei mit der Rückkehrtangente zusammenfallen. Sie besteht also in unserem Falle aus der Rückkehrtangente und der Verbindungslinie des Rückkehrpunktes mit dem *einen* noch vorhandenen Wendepunkte. Den letzteren kann man hiernach leicht algebraisch bestimmen, sobald die Coordinaten des Rückkehrpunktes bekannt sind. Denn man kann aus Δ den Factor $a_y a_x^2$ absondern; der andere lineare Factor gibt dann unmittelbar die Gleichung der erwähnten Verbindungslinie mit dem Rückkehrpunkte. — Ein *eigentliches* Wendepunktsdreieck ist in dem Büschel $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ nicht vorhanden. Denn auf der linken Seite der Gleichung $G(\varkappa, \lambda) = 0$ bleibt, wenn $S = 0$ und $T = 0$, nur das Glied $\varkappa^4$; dieselbe hat also vier gleiche Wurzeln $\varkappa = 0$; das eine dadurch bestimmte Dreieck ist somit die Curve $\Delta = 0$ selbst. Ein naturgemässes Coordinatensystem zur Herstellung einer *kanonischen Form* ist uns jedoch durch die folgenden Linien gegeben (vgl. unten Fig. 68):

die Verbindungslinie von Rückkehr- und Wendepunkt, $x_2 = 0$,
die Rückkehrtangente, $x_1 = 0$,
die Wendetangente, $x_3 = 0$.

Unter Zugrundelegung desselben wird die Gleichung der Curve von der Form (vgl. p. 327):

(14) $$x_2^3 - 3x_1^2x_3 = 0,$$

und, wie es sein muss, die Gleichung der Hesse'schen Curve:

$$\frac{1}{6}\Delta = \begin{vmatrix} x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & x_2 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -x_1^2x_2 = 0.$$

Die Cayley'sche Curve wird von den ersten Polaren der Punkte der Hesse'schen Curve umhüllt. Es ist aber die Polare eines auf $x_1 = 0$ gelegenen Punktes z:

$$x_2^2z_2 + x_1^2z_3 = 0,$$

also ein Linienpaar, dessen Scheitel im Rückkehrpunkte liegt, und die Polare eines Punktes z auf $x_2 = 0$:

$$x_1(2x_3z_1 + x_1z_3) = 0,$$

also ein Linienpaar bestehend aus der festen Rückkehrtangente und einer beweglichen Linie durch ihren Schnittpunkt mit der Wendetangente. Da nun jeder Punkt von $x_2 = 0$ als Punkt der Hesse'schen Curve doppelt zählt, so *besteht die* Cayley'*sche Curve aus dem doppelt zählenden Rückkehrpunkte und dem Schnittpunkte der Wende- und Rückkehrtangente.*

Aus Gleichung (14) erkennt man sofort, dass sich die Punkte der Curve auf folgende Weise in Function eines Parameters $\frac{\lambda}{\mu}$ darstellen lassen:

(15) $$\varrho x_1 = \mu^3, \quad \varrho x_2 = \mu^2\lambda, \quad \varrho x_3 = \lambda^3.$$

Mit Hülfe dieser Darstellung wollen wir, wie bei den Curven mit Doppelpunkt, einige Probleme über die Geometrie auf der Curve behandeln. — Dieselbe wird von einer Geraden u in drei Punkten geschnitten, bestimmt durch die Gleichung:

$$u_1\mu^3 + u_2\mu^2\lambda + u_3\lambda^3 = 0.$$

In ihr fehlt das Glied mit dem Factor $\lambda^2\mu$; *für die Parameter von drei auf einer Geraden gelegenen Punkten besteht daher immer die Relation:*

(16) $$\frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} + \frac{\lambda_3}{\mu_3} = 0.$$

Dieselbe ist von wesentlich anderer Natur als die entsprechende (9) bei den Curven mit Doppelpunkt. Wir werden später bei den allgemeinen Untersuchungen über die Curven vom Geschlechte $p = 0$ erkennen, wie die Gleichung (16) durch einen Grenzprocess aus der Gleichung (9) hervorgeht, indem wir letztere zunächst in der Form voraussetzen:

$$\log\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right) + \log\left(\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right) + \log\left(\frac{\lambda_3}{\mu_3}\right) = 0 \quad (\text{mod. } 2\pi i).$$

Ziehen wir nun von einem Punkte $\lambda_0 \left(= \frac{\lambda_0}{\mu_0}\right)$ die eine noch mögliche Tangente an die Curve, welche in λ_1 berühren möge, von λ_1 wiederum die Tangente mit dem Berührungspunkte λ_2, u. s. f., so haben wir:

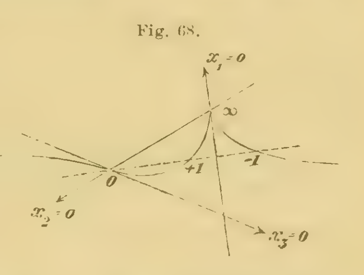
$$\lambda_0 + 2\lambda_1 = 0, \; \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \; \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \ldots \lambda_{r-1} + 2\lambda_r = 0, \ldots$$

oder:

$$\lambda_1 = -\tfrac{1}{2}\lambda_0, \quad \lambda_2 = \tfrac{1}{4}\lambda_0, \; \lambda_3 = -\tfrac{1}{8}\lambda_0, \ldots \lambda_r = (-\tfrac{1}{2})^r\lambda_0, \ldots$$

Die Parameter werden also immer kleiner, nähern sich bei Fortsetzung des Verfahrens unbegrenzt dem Werthe 0, welcher dem Wendepunkte entspricht. *Bei fortgesetztem Tangentenziehen an unsere Curve dritter Ordnung von einem beliebigen Punkte aus, nähert sich daher der Berührungspunkt ohne Aufhören dem Wendepunkte.* Es ist klar, dass man dabei niemals zum Ausgangspunkte zurückgelangt; man kann also in dieser Weise keine geschlossenen Polygone construiren. Mit Hülfe des letzten Satzes kann man die Vertheilung der reellen Parameterwerthe über die Curve leicht anschaulich darstellen, wie es Fig. 68 zeigt. Dabei kann der Punkt $\lambda_0 = 1$ noch beliebig auf der Curve gewählt werden; von ihm ausgehend kann man die Punkte $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{8}$, u. s. f. nach unserem Satze leicht construiren. Der Parameter durchläuft auf dem einen der beiden möglichen Wege zwischen Wende- und Rückkehrpunkt (d. i. zwischen 0 und ∞) alle positiven, auf dem anderen alle negativen Zahlenwerthe; und zwar folgt aus Gleichung (16), dass immer zwei Punkte, denen entgegengesetzt gleiche Parameterwerthe zukommen, mit dem Wendepunkte ($\lambda = 0$) in gerader Linie liegen.*)

Fig. 68.



Auch die Construction der Steiner'schen Polygone in angegebener Weise führt hier zu keinem Resultate. Gehen wir dabei

*) Es ist übrigens leicht, sich in ähnlicher Weise über die Parametervertheilung auf einer C_3 mit Doppelpunkt Rechenschaft zu geben. Aus (8) folgt, dass (für $\mu = 1$) dem Doppelpunkte, je nachdem er als auf dem einen oder auf dem andern Zweige der C_3 gelegen betrachtet wird, die Werthe $\lambda = 0$ oder $\lambda = \infty$ zukommen, während $\lambda = -1$ den einen reellen Wendepunkt bestimmt; aus (9) folgt dann, dass je zwei Punkte mit den Parameterwerthen λ und $\frac{1}{\lambda}$ mit dem Wendepunkte auf einer Geraden liegen. Der Werth $\lambda = +1$ gibt nach (10) den Berührungspunkt der einen vom Wendepunkte noch an die C_3 zu legenden Tangente, u. s. f.

nämlich von den Punkten p, q aus, so erhalten wir das System von Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} p + \lambda_1 \quad + \lambda_2 = 0 & q + \lambda_2 \quad + \lambda_3 = 0 \\ p + \lambda_3 \quad + \lambda_4 = 0 & q + \lambda_4 \quad + \lambda_5 = 0 \ . \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ p + \lambda_{2n-1} + \lambda_{2n} = 0 & q + \lambda_{2n} + \lambda_1 = 0 \ , \end{array}$$

und hieraus folgt $p = q$; dann erhält man aber keine eigentlichen Polygone. —

Weitere Singularitäten können neben einem Doppel- oder Rückkehrpunkte den Plücker'schen Formeln zufolge nicht vorkommen, ohne dass die Curve zerfällt. Es ist aber immerhin von Interesse die algebraischen Bedingungen für ein solches Zerfallen vollständig aufzustellen; und dies möge im Folgenden noch geschehen.

Soll die Curve zwei Doppelpunkte haben, so muss sie in einen Kegelschnitt $s_x{}^2 = 0$ und eine ihn in zwei getrennten Punkten schneidende Gerade zerfallen. Es wird also:

$$f = a_x{}^3 = r_x \,.\, s_x{}^2 = r_x \,.\, s'_x{}^2 \ldots \tag{17}$$

Wir sahen, dass beim Auftreten eines Doppelpunktes die Form Π in den Cubus der linken Seite der Gleichung dieses Doppelpunktes überging. Wenn noch ein zweiter Doppelpunkt hinzutritt, wird daher Π identisch verschwinden müssen; und dies wird durch die folgende Ueberlegung bestätigt.*) Die Invarianten S und T verschwinden in diesem Falle offenbar nicht einzeln, denn sonst müsste die Curve mit zwei Doppelpunkten aus der Curve mit Rückkehrpunkt durch einen Grenzprocess ableitbar sein, was nicht möglich ist (p. 596). Dagegen besteht, wie bei *einem* Doppelpunkte, die Relation:

$$\tfrac{1}{6}\, S^3 = T^2 .$$

Nun hat die Form $f = r_x \,.\, s_x{}^2$ nur noch die beiden Invarianten:

$$i = (r s s')^2 \quad \text{und} \quad j = (s s' s'')^2 .$$

Von diesen sagt das Verschwinden der zweiten aus, dass noch ein dritter Doppelpunkt vorhanden sei; mit j kann also S nicht proportional sein, da dieser Fall ($j = 0$) ebenfalls nicht aus dem Auftreten eines Rückkehrpunktes ableitbar ist. Wird dagegen $i = 0$, so berührt die Linie r den Kegelschnitt, d. h. die C_3 erhält einen Rückkehrpunkt, und es muss auch $S = 0$, $T = 0$ sein. Letztere Invarianten werden also mit Potenzen von i proportional, und zwar haben wir, weil S vom vierten Grade ist, nur die Möglichkeit:

*) Vgl. Gordan: Ueber Curven dritter Ordnung mit zwei Doppelpunkten, Math. Annalen, Bd. 3 und Gundelfinger a. a. O.

(18) $$S = c \cdot i^2,$$

wo c einen Zahlenfactor bedeutet, und also:

(19) $$T = \frac{1}{\sqrt{6}} c^{\frac{3}{2}} \cdot i^3 = \frac{1}{\sqrt{6}} c^{\frac{1}{2}} \cdot i \cdot S\,.$$

Da ferner Σ und T aus S und T durch den Differentiationsprocess $\Sigma \frac{\partial S}{\partial a_{ikh}} u_i u_k u_h$ entstehen (vgl. p. 547 und 556), indem:

$$\Sigma = \tfrac{1}{4} \Sigma \frac{\partial S}{\partial a_{ikh}} u_i u_k u_h\,, \qquad \mathrm{T} = \tfrac{1}{6} \Sigma \frac{\partial T}{\partial a_{ikh}} u_i u_k u_h\,,$$

so folgt auch, wenn wir diesen Process auf $R = 0$ anwenden:

(20) $$6\, T\mathrm{T} - S^2 \Sigma = 0, \quad \text{oder:} \quad \sqrt{6c}\, i \mathrm{T} = c i^2 \Sigma,$$

oder nach Multiplication mit $i\sqrt{c}$ auf beiden Seiten wegen (18) und (19):

(21) $$\Pi \equiv T\Sigma - S\mathrm{T} = 0\,.$$

Dass das identische Verschwinden von Π auch hinreichend ist, folgt daraus, dass es eintritt, ohne das Verschwinden von S und T vorauszusetzen und dass es, wie wir sehen werden, *nicht* hinreicht, um das Auftreten von drei Doppelpunkten zu bedingen, während doch der eine durch $R = 0$ bedingte Doppelpunkt unbestimmt wird.

Die Bestimmung des Zahlenfactors c führt man aus, indem man mit Hülfe der Gleichung:

$$3\, a_{ikh} = r_i s_{kh} + r_k s_{hi} + r_h s_{ik}\,,$$

die betreffenden Bedingungen direct berechnet. Wir theilen hier nur die Resultate mit, es wird:

(22) $$\begin{cases} 9\,\Theta = 9\,(abu)^2 a_x b_x = 4\, r_x^2 (ss'u)^2 - 2\, s_x^2 (s'ru)^2 \\ \qquad\qquad + i u_x^2 - 4 u_x r_x (rss')(ss'u) \\ 27\,\Delta = 27\,(abc)^2 a_x b_x c_x = 4\, r_x^3 \cdot j - 3\, i \cdot f \\ 9\,\Sigma = 9\,(\Theta c u)^2 c_\vartheta u_\vartheta = 2\,(rsu)^2 \cdot (ss'u)(rss') \\ 9\,\mathrm{T} = 9\,(\Theta a u)^2 \alpha_\vartheta u_\vartheta = -\, i \cdot \Sigma \\ 27\, S = 27\,(\Theta c d)^2 c_\vartheta d_\vartheta = 2\, i^2 \\ 243\, T = 243\,(\Theta \alpha d)^2 \alpha_\vartheta d_\vartheta = -\, 2\, i^3 .^{*)} \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen finden wir sofort $c = \frac{2}{27}$ und ferner:

(23) $$S\Delta - Tf = \tfrac{8}{729}\, j \cdot i^2 \cdot r_x^3,$$

und also haben wir den Satz:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Zerfallen einer Curve dritter Ordnung in einen Kegelschnitt und eine ihn schneidende

*) Hieraus folgt, dass man in (19) rechts das negative Vorzeichen der Wurzel zu nehmen hat.

Gerade ist das identische Verschwinden der Form $\Pi = T\Sigma - S\mathrm{T}$; *die Coordinaten der Geraden berechnen sich alsdann aus der Gleichung:*

$$r_1^3 : r_1^2 r_2 : r_1^2 r_3 : \ldots : r_1 r_2 r_3 = \sigma_{111} : \sigma_{112} : \sigma_{113} : \ldots : \sigma_{123} ,$$

wo $(\Delta = \alpha_x^3)$: $\qquad \sigma_{ikh} = S \,.\, \alpha_{ikh} - T a_{ikh}$;

die Coëfficienten der Kegelschnittgleichung findet man durch Division mit r_x *in* f. —

Eine weitere Specialisirung tritt ein, *wenn der Kegelschnitt von der Geraden berührt wird.* Dann ist

$$i = (s s' r)^2 = 0 ;$$

es verschwinden also nach (22) die Invarianten S und T, wie es sein muss, da dieses Vorkommniss auch aus dem Falle des Rückkehrpunktes durch Degeneration entsteht. Aber auch T ist nach (22) identisch Null, wenn i verschwindet, und es wird:

$$(24) \qquad 27\, \alpha_x^3 = 27\, \Delta = 4\, r_x^3 \,.\, j \,.$$

Andererseits folgt aus dem Verschwinden von T wegen der Relationen:

$$T = \Sigma' \frac{\partial^3 \mathrm{T}}{\partial u_i \partial u_k \partial u_h} a_{ikh} , \quad \delta T = S^2$$

immer, dass S und T Null sind, und wegen der Gleichung*):

$$-\tfrac{1}{2} \mathrm{K} = \tfrac{1}{12} S\Theta + \tfrac{1}{6} T u_x^2 - \tfrac{1}{9} \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u_i}$$

immer, dass $\mathrm{K} = \Theta_\Delta$ identisch Null ist, d. h. (vgl. unten) dass Δ ein vollständiger Cubus ist. Ferner sehen wir aus (22), dass Σ bis auf einen Zahlenfactor gleich u_y^3 wird, wenn y_i die Coordinaten des Berührungspunktes von r sind; denn das Verschwinden von $(r s u)^2$ sagt aus, dass der Schnittpunkt von r und u auf $s_x^2 = 0$ liegt, und

$$(s s' u)\,(r s s') = 0$$

ist die Gleichung des Poles y von r, welcher hier mit jenem Schnittpunkte zusammenfällt. Wir haben somit:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Curve dritter Ordnung aus einem Kegelschnitte und einer ihn berührenden Geraden besteht, ist das identische Verschwinden von T. *Die Coordinaten* y_i *des Berührungspunktes bestimmen sich aus der laufenden Proportion* $(\Sigma = u_s^3)$:

$$y_1^3 : y_1^2 y_2 : y_1^2 y_3 : \ldots : y_1 y_2 y_3 = s_{111} : s_{112} : s_{113} : \ldots : s_{123} \,.$$

und die Coordinaten r_i *der Tangente aus* $(\Delta = \alpha_x^3)$:

$$r_1^3 : r_1^2 r_2 : r_1^2 r_3 : \ldots : r_1 r_2 r_3 = \alpha_{111} : \alpha_{112} : \alpha_{113} : \ldots : \alpha_{123} \,. \text{ —}$$

---

*) Vgl. Gleichung (46) in dem Aufsatze von Clebsch und Gordan.

Wenn die Curve dritter Ordnung drei Doppelpunkte haben soll, so muss der Kegelschnitt s_x^2 in dem durch $\Pi = 0$ charakterisirten Falle in ein Linienpaar zerfallen, d. h. es ist:

$$j = 0$$

und: $$s_x^2 = p_x \cdot q_x\,, \quad f = r_x \cdot p_x \cdot q_x\,.$$

Hier ist jeder Punkt der Curve ein Wendepunkt; es muss daher Δ zu f proportional werden, und in der That folgt aus (22) und (23) wegen $j = 0$:

(25) $$9\,\Delta = -\,if \quad \text{und} \quad S\Delta - Tf = 0\,.$$

Für das Zerfallen einer Curve dritter Ordnung in drei Gerade ist es daher nothwendig und hinreichend, dass f zu Δ proportional wird, d. h. dass die Zwischenform (vgl. p. 571)

$$N = (a\,\alpha\,u)\,a_x^2\,\alpha_x^2$$

identisch verschwinde. Die Coordinaten der drei Geraden p_i, q_i, r_i bestimmen sich aus den Gleichungen:

$$\varrho\,(p_i q_k r_h + p_k q_h r_i + p_h q_i r_k) = 3\,a_{ikh}\,.$$

Um diese Gleichungen wirklich aufzulösen kann man folgendermassen verfahren. Es seien y und z zwei beliebige Punkte der Ebene; man bestimme die Schnittpunkte $y + \lambda z$ ihrer Verbindungslinie mit der Curve $f = a_x^3 = 0$ mittelst der cubischen Gleichung:

$$a_y^3 + 3\,\lambda\,a_y^2 a_z + 3\,\lambda^2 a_y a_z^2 + \lambda^3 a_z^3 = 0\,.$$

Die Coordinaten dieser Punkte mögen mit ξ, ξ', ξ'' bezeichnet sein, so dass, wenn λ, λ', λ'' die Wurzeln der letzten Gleichung sind:

$$\xi_i = y_i + \lambda z_i\,, \quad \xi_i' = y_i + \lambda' z_i\,, \quad \xi_i'' = y_i + \lambda'' z_i\,.$$

Die Tangenten von $f = 0$ in den Punkten ξ, ξ', ξ'' fallen dann mit den drei Geraden zusammen, in welche $f = 0$ zerfällt, d. h. die p_i, q_i, r_i sind durch folgende linearen Gleichungen bestimmt*):

$$\varrho\,p_i = a_\xi^2 a_i\,, \quad \varrho\,q_i = a_{\xi'}^2 a_i\,, \quad \varrho\,r_i = a_{\xi''}^2 a_i\,. \;-$$

Insbesondere kann es ferner vorkommen, dass die drei geraden Linien durch einen Punkt gehen, d. h. dass die Determinante $(p\,q\,r)$ verschwinde. Wir haben dann auch:

$$i^2 = (p\,q\,r)^2 = 0 \quad \text{und} \quad j = 0\,,$$

und somit nach (22):

$$\mathsf{T} = 0\,, \quad S = 0\,, \quad T = 0\,,$$

wie vorauszusehen war; denn dieser Fall entsteht, wenn in dem durch $\mathsf{T} = 0$ bedingten der Kegelschnitt $s_x^2 = 0$ in ein Linienpaar zerfällt,

*) Ein ganz analoges Verfahren ist natürlich, wenn eine Form n^{ter} Ordnung in n lineare Factoren zerfällt, zur Bestimmung dieser Factoren anwendbar.

dessen Scheitel auf $r_x = 0$ liegt. Ferner folgt aus (23): $\Delta \equiv 0$, und in der That besteht die Polare eines *jeden* beliebigen Punktes nach unseren allgemeinen Gesetzen aus einem Linienpaare, dessen Scheitel im dreifachen Punkte von $f = 0$ liegt; und hieraus erkennt man geometrisch die Umkehrbarkeit unserer letzten Behauptung.*)

---

*) Es gilt überhaupt allgemein der Satz:

Wenn die Hesse'*sche Form einer ternären Form n^{ter} Ordnung identisch verschwindet, so stellt letztere, gleich Null gesetzt, n durch einen Punkt gehende Gerade vor.*

Derselbe wurde von Hesse (Crelle's Journal, Bd. 56, p. 263) aufgestellt; einen genaueren Beweis gab Sylvester: Philosophical Magazine 1853. Einen solchen kann man auch in folgender Weise führen. Setzt man;

$$(1) \qquad \alpha_x^{n-1} = a_x^{n-1} a_1, \qquad \beta_x^{n-1} = a_x^{n-1} a_2, \qquad \gamma_x^{n-1} = a_x^{n-1} a_3,$$

so ist bekanntlich $\Delta \equiv (abc)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-2} = 6 (\alpha\beta\gamma) \alpha_x^{n-2} \beta_x^{n-2} \gamma_x^{n-2}$ (vgl. p. 312). Wegen der Identität:

$$(\alpha\beta\gamma) u_x = (\alpha\beta u) \gamma_x + (\alpha u \gamma) \beta_x + (u\beta\gamma) \alpha_x$$

folgt nun für beliebige Grössen u_i aus der Bedingung $\Delta \equiv 0$ die andere (vgl. p. 304 und 377 Anmk.):

$$(2) \qquad N_{\alpha\beta} \cdot \gamma_x^{n-1} = N_{\alpha\gamma} \cdot \beta_x^{n-1} + N_{\beta\gamma} \cdot \alpha_x^{n-1},$$

wo $N_{\alpha\beta} = (\alpha\beta u) \alpha_x^{n-2} \beta_x^{n-2}$ u. s. f. Die Curve $\gamma = 0$ muss daher durch alle einfachen Schnittpunkte von $\beta = 0$, $\alpha = 0$ gehen, denn die u_i können immer so gewählt werden, dass $N_{\alpha\beta} = 0$ durch diese Punkte nicht hindurchgeht. Für einen gemeinsamen vielfachen Punkt von α und β verschwindet allerdings auch $N_{\alpha\beta}$, aber in einem solchen Punkte hat γ immer einen gleich vielfachen Punkt, denn man kann die Ecken des Coordinatendreiecks, deren Polaren doch α, β, γ sind, stets so wählen, dass diese Polaren keine anderen vielfachen Punkte haben, als die durch die Singularitäten von f in bekannter Weise bedingten. In Folge dessen kann man zwei Constante $\varkappa$, λ so bestimmen, dass: $\gamma = \varkappa\alpha + \lambda\beta$, oder wenn wir die Coordinatenecken durch drei beliebige Punkte y, z, t ersetzen, dass:

$$(3) \qquad a_x^{n-1} a_t = \varkappa a_x^{n-1} a_y + \lambda a_x^{n-1} a_z.$$

Andererseits kann man, wenn ξ ein beliebiger Punkt ist, immer Constante $\varkappa'$, λ', μ so bestimmen, dass: $t_i = \varkappa' y_i + \lambda' z_i + \mu \xi_i$, und also auch:

$$(4) \qquad a_x^{n-1} a_t = \varkappa' a_x^{n-1} a_y + \lambda' a_x^{n-1} a_z + \mu a_x^{n-1} a_\xi.$$

Soll aber diese Gleichung mit (3) zusammenbestehen, so muss

$$(\varkappa' - \varkappa) a_x^{n-1} a_y + (\lambda' - \lambda) a_x^{n-1} a_z + \mu a_x^{n-1} a_\xi = 0$$

sein. Es gibt also einen Punkt η, bestimmt durch:

$$\eta_i = (\varkappa' - \varkappa) y_i + (\lambda' - \lambda) z_i + \mu \xi_i,$$

für welchen die Gleichung $a_x^{n-1} a_\eta = 0$ unabhängig von x besteht, welcher sonach n-facher Punkt von f ist; oder mit anderen Worten: *$f = 0$ zerfällt in n durch η gehende Gerade*, q. e. d. — Die hier angewandte Schlussweise bleibt auch gültig, wenn man annimmt, dass f unendlich viele Doppelpunkte, d. i. einen mehrfach zählenden Zweig, besitzt. Das Verschwinden von Δ sagt dann aus, dass dieser Zweig aus einer mehrfach zählenden, durch η gehenden Geraden besteht.

Die hinreichende und nothwendige Bedingung für das Zerfallen der Curve in drei Gerade eines Büschels ist daher durch das identische Verschwinden von Δ *gegeben. Die Coordinaten des dreifachen Punktes* y *berechnen sich aus der Gleichung:*

$$F \equiv (abu)^2 (cdu)^2 (acu)(bdu) = u_y^6.$$

Hat man dieselben gefunden, so führt man zur Bestimmung der p_i, q_i, r_i neue Veränderliche ein mittelst der Gleichungen:

$$\varrho x_1 = y_1 \xi_1 + a_1 \xi_2 + b_1 \xi_3$$
$$\varrho x_2 = y_2 \xi_1 + a_2 \xi_2 + b_2 \xi_3$$
$$\varrho x_3 = y_3 \xi_1 + a_3 \xi_2 + b_3 \xi_3,$$

wo die a_i, b_i völlig willkürlich sind. Alsdann geht f in eine binäre Form in ξ_2, ξ_3 über und lässt sich nach der Theorie der binären cubischen Formen bei gehöriger Bestimmung der a_i und b_i in der Form

$$\xi_2^3 + \xi_3^3$$

darstellen. — Man erkennt übrigens auch leicht, dass in diesem Falle die Form Σ, da sie den Factor (pqr) erhält, identisch Null ist. —

Fallen auch noch zwei der Geraden p *und* q *zusammen,* d. h. ist

$$f = r \cdot q_x^2,$$

so wird die Curve $f = 0$ von *jeder* Linie u in zwei zusammenfallenden Punkten geschnitten, und *also verschwindet die Form* F *identisch.* Wir können dann in den Gleichungen (22) $s = s' = q$ setzen, und haben also:

$$9\,\Theta = -2\,q_x^2\,(qru)^2, \tag{26}$$

und *hieraus kann man gleichzeitig die Doppelgerade* q *und den Schnittpunkt von* q *und* r *bestimmen.* Letzteres geschieht in anderer Weise, wie im Falle $N \equiv 0$, nur dass die betreffende cubische Gleichung hier zwei gleiche Wurzeln hat. —

Fallen endlich alle drei Gerade zusammen, so wird in (26) $q_i = r_i$, und also identisch:

$$\Theta \equiv (abu)^2 a_x b_x = 0.^{*)}$$

*) Dies Resultat lässt sich zu folgendem Satze verallgemeinern: *Wenn für eine ternäre Form* $f = a_x^n$ *die Zwischenform* $\Theta = (abu)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2}$ *identisch verschwindet, so ist* f *die* n^{te} *Potenz eines linearen Ausdrucks.* Nach dem Uebertragungsprincipe (p. 276) nämlich sagt die Bedingung $\Theta \equiv 0$ aus, dass *jede* Gerade die Curve $f = 0$ in einer Punktgruppe trifft, für welche, aufgefasst als binäre Form, die Hesse'sche Covariante identisch Null ist. Dies sagt aber aus, dass die binäre Punktgruppe aus einem n-fach zählenden Punkte besteht, q. e. d. Den Beweis für letztere Behauptung führt man ganz analog, wie den entsprechenden für das ternäre Gebiet in der Anmerk. auf p. 598.

Aus der Bedingung $f = q_x^3$ finden wir ferner unmittelbar *zur Berechnung der* q_i die fortlaufende Proportion:

$$q_1^3 : q_1^2 q_2 : q_1^2 q_3 : \ldots : q_1 q_2 q_3 = a_{111} : a_{112} : a_{113} : \ldots : a_{123}.$$

Die so gewonnenen Resultate stellen wir schliesslich in der folgenden Tabelle übersichtlich zusammen, indem wir jeder Curvenart zugleich die Zahl der in ihr noch willkürlichen Constanten beifügen*):

Curven dritter Ordnung.

1) *Allgemeine Curve*, 9 Constante, mit Doppelverhältniss α, wenn:

$$\frac{S^3}{T^2} = 24 \frac{(1 - \alpha + \alpha^2)^3}{(1 + \alpha)^2 (2 - \alpha)^2 (1 - 2\alpha)^2}$$

a) *Aequianharmonische Curve*, 8 Constante.

$$S = 0; \quad 1 - \alpha + \alpha^2 = 0$$

b) *Harmonische Curve*, 8 Constante.

$$T = 0; \quad \alpha = -1, 2, \tfrac{1}{2}$$

2) *Curve mit Doppelpunkt*, 8 Constante.

$$R \equiv T^2 - \tfrac{1}{6} S^3 = 0; \quad \alpha = 1, 0, \infty.$$

3) *Kegelschnitt und Gerade* 7 Constante.

$$\Pi \equiv S\mathsf{T} - T\Sigma = 0$$

4) *Drei einzelne Gerade* 6 Constante.

$$N \equiv (a \alpha u)\, a_x^2 \alpha_x^2 = 0$$

5) *Curve mit Rückkehrpunkt* 7 Constante.

$$S = 0, \quad T = 0$$

6) *Kegelschnitt und Tangente* 6 Constante.

$$\mathsf{T} = 0$$

7) *Drei Gerade durch einen Punkt*, 5 Constante.

$$\alpha_x^3 \equiv \Delta = 0$$

8) *Einfache und Doppel-Gerade*, 4 Constante.

$$F = 0$$

9) *Dreifache Gerade*, 2 Constante.

$$\Theta \equiv (a b u)^2 a_x b_x = 0.$$

Zwischen 8) und 9) könnten wir noch eine von 3 Constanten abhängige Curve einschieben, bestehend aus einer dreifachen Geraden nud einem auf ihr gelegenen Punkte (sommet, Scheitel). Eine solche ist aber nicht durch *eine* Gleichung $f = 0$ in Punktcoordinaten dar-

*) Vgl. die entsprechende Tabelle für Kegelschnitte auf p. 119. — Die nachstehende Tabelle ist so gehalten, dass jede C_3 derselben aus der nächst vorhergehenden durch Grenzprocess abgeleitet werden kann.

stellbar, und deshalb hier zunächst übergangen. Betrachtet man hingegen Systeme von Curven 3. Ordnung, so hat man bei den Ausartungen die auftretenden Klassenscheitel mitzuzählen, obgleich dieselben durch eine Punktgleichung allein nicht mit dargestellt werden. Alsdann erhält man auch für die Fälle 8) und 9) fünf Constante; denn in 8) wird dann der Schnittpunkt der beiden unendlich benachbarten Geraden, welche sich zu der Doppelgeraden vereinigen, bei Verfolgung des Grenzüberganges vollkommen bestimmt sein, so dass auf der Doppelgeraden noch ein Klassenscheitel liegt. Ebenso können auf der dreifachen Geraden in 9) noch drei Klassenscheitel auftreten, wenn man sie aus drei einzelnen Geraden entstanden denkt, dagegen nur zwei solche Scheitel (von denen dann einer doppelt zählt), wenn man sie aus dem Falle 8) ableitet (vgl. die Anmk. auf p. 417).

Wenn man in der angedeuteten Weise die Entstehung einer Ausartung aus einer allgemeinen Curve verfolgt, so werden auch Wende- und Rückkehrtangenten für die Grenzcurve noch bestimmte Lagen haben, welche aber andere und andere sein können, je nach dem Systeme von C_3, in dem die betrachtete Ausartung vorkommt. Zerfällt die C_3 z. B. in einen Kegelschnitt und eine Tangente desselben (ein Fall, der nach Fig. 58 p. 410*) aus dem Falle einer C_3 mit Rückkehrpunkt abzuleiten ist), so besteht die Curve als Tangentengebilde aus dem Kegelschnitte und dem Berührungspunkte. In letzterem sind Rückkehr- und Wendepunkt vereinigt, während Rückkehr- und Wendetangente in die Tangente des Kegelschnittes zusammenfallen. Artet nun aber die C_2 noch in eine Doppellinie aus, so können Rückkehr- und Wendetangente in diesem Grenzfalle durch zwei getrennte Gerade dargestellt werden, welche durch den Schnittpunkt der Doppelmit der einfachen Geraden gehen, doch so, dass zwischen diesen vier Linien und der Geraden, welche in der Grenze an Stelle der Verbindungslinie von Wende- und Rückkehrpunkt tritt, noch Relationen bestehen.**) Zählt man auch die so zu der Curve, insofern sie einem Systeme allgemeinerer Curven angehört, hinzutretenden Geraden als zu ihr wesentlich gehörig mit, so wird die Zahl der Constanten, von denen die Ausartung abhängt, natürlich in entsprechender Weise erhöht.

---

*) Ebenso kann man übrigens auch die anderen Ausartungen leicht zeichnend veranschaulichen.

**) Diese Vorkommnisse sind von Schubert für die Ausartungen einer C_3 mit Rückkehrpunkt vollständig untersucht; vgl. Göttinger Nachrichten 1875, p. 359, sowie einen demnächst in den Math. Annalen erscheinenden Aufsatz desselben.

VII. Die Verwerthung der Theorie der elliptischen Functionen für die Geometrie auf einer Curve dritter Ordnung.

Bei Behandlung der Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkt haben wir gesehen, dass sich die Coordinaten der Punkte der Curve in Function eines Parameters rational darstellen lassen, und dass diese Darstellung für das Studium gewisser Punktsysteme auf der Curve von besonderem Vortheile ist. Es liegt nun die Frage nahe, ob ein ähnliches Verfahren auch bei einer allgemeinen Curve dritter Ordnung, und weiterhin bei einer beliebigen Curve n^{ter} Ordnung möglich sein wird. *Es zeigt sich dies bei näherer Untersuchung von dem Geschlechte der betreffenden Curve abhängig:* Jede Curve vom Geschlechte $p = 0$ ist rational durch einen Parameter darstellbar; bei einer Curve vom Geschlechte $p = 1$ dagegen sind elliptische Functionen für die Parameterdarstellung einzuführen. Diese Sätze werden wir später ganz allgemein beweisen; für allgemeine Curven 3ter Ordnung, welche ebenfalls $p = 1$ haben, können wir die Richtigkeit unserer Behauptung, sowie die aus ihr fliessenden Folgerungen auch leicht direct nachweisen; und damit wollen wir uns im Folgenden beschäftigen.

Wir gehen zunächst von einer speciellen Gleichungsform der Curve dritter Ordnung aus und zeigen an ihr den Charakter der vorliegenden Probleme. Dabei werden wir die möglichen Relationen zwischen den Schnittpunkten einer Geraden, die zu Fragen verschiedenster Art Veranlassung geben, ausführlicher studiren; insbesondere die Steiner'schen Polygone, wie bei den Curven mit Doppelpunkt. Für höhere Curven dagegen werden wir nur kurz die uns bekannten Sätze über ihre Schnittpunkte mit der C_3 neu begründen. Schliesslich mag dann noch gezeigt werden, wie die Einführung der elliptischen Functionen auch geschehen kann, wenn man die Gleichung der C_3 als in allgemeinster Form gegeben annimmt.

Die Gleichung einer jeden Curve dritter Ordnung kann in die Form gebracht werden:

$$F \equiv x_3^2 x_1 - x_2 (x_1 - x_2)(x_1 - k^2 x_2) = 0\,. \tag{1}$$

Denn wir können zeigen, dass das Doppelverhältniss dieser Curve eben von der Grösse k^2 abhängig ist, dass $F = 0$ also in der That die allgemeine Curve dritter Ordnung darstellt. Für $x_1 = 0$ geht die Gleichung (1) über in $x_2^3 = 0$; die Coordinatenaxe $x_1 = 0$ schneidet also die Curve in drei unendlich nahen Punkten, d. h. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ ist ein Wendepunkt und $x_1 = 0$ seine Wendetangente. Durch ihn gehen die drei Geraden

$$x_2 = 0\,, \quad x_1 - x_2 = 0\,, \quad x_1 - k^2 x_2 = 0\,, \tag{2}$$

für welche die Gleichung der Curve immer in $x_3^2 x_1 = 0$ übergeht. Jene drei Geraden sind also die vom Wendepunkte an die Curve zu legenden Tangenten und $x_3 = 0$ ist die Gerade, auf welcher ihre Berührungspunkte liegen, d. h. die zu dem Wendepunkte gehörige harmonische Gerade. Ferner erkennt man sofort, dass k^2 eines der sechs Doppelverhältnisse der drei Geraden (2) und der Wendetangente $x_1 = 0$ ist, d. h. das Doppelverhältniss der Curve dritter Ordnung, welches in bekannter Weise mit der absoluten Invariante derselben zusammenhängt (vgl. Gleichung (41) auf p. 580).

Um also die Gleichung einer beliebigen Curve dritter Ordnung in der Form (1) *zu erhalten, hat man die Constante* k^2 *aus der Gleichung* *)

$$\frac{S^3}{T^2} = 24 \frac{(1 - k^2 + k^4)^3}{(1 + k^2)^2 (2 - k^2)^2 (1 - 2k^2)^2} \tag{3}$$

zu berechnen, wenn S *und* T *die Invarianten der Curve sind.*

Die Gleichung (1) nun wird identisch erfüllt, wenn wir setzen:

$$\varrho x_1 = \mu^3, \quad \varrho x_2 = \mu, \quad \varrho x_3 = \sqrt{(1 - \mu^2)(1 - k^2\mu^2)};$$

und damit ist die Einführung der elliptischen Functionen von selbst gegeben. Nehmen wir nämlich $\mu = \sin \operatorname{am} u$, oder

$$u = \int_0^\mu \frac{d\lambda}{\sqrt{(1 - \lambda^2)(1 - k^2\lambda^2)}}, \tag{4}$$

so wird unmittelbar:

$$\sqrt{1 - \mu^2} = \cos \operatorname{am} u, \qquad \sqrt{1 - k^2\mu^2} = \Delta \operatorname{am} u,$$

wo nun die Wurzeln links immer mit bestimmtem Vorzeichen (also eindeutig) zu nehmen sind, und wo die bekannten Relationen erfüllt sind:

$$\sin^2 \operatorname{am} u + \cos^2 \operatorname{am} u = 1$$
$$k^2 \sin^2 \operatorname{am} u + \Delta^2 \operatorname{am} u = 1.$$

Die Coordinaten der Curve (1) $F = 0$ *sind daher eindeutig als elliptische Functionen eines Parameters* u *dargestellt durch die Gleichungen:*

---

*) Die sechs Wurzeln dieser Gleichung lassen sich rational durch eine von ihnen (k^2) darstellen; sie sind bekanntlich (vgl. p. 39):

$$k^2, \quad \frac{1}{k^2}, \quad 1 - k^2, \quad \frac{1}{1 - k^2}, \quad \frac{k^2 - 1}{k^2}, \quad \frac{k^2}{k^2 - 1}.$$

Die Gleichung (3) ist daher algebraisch auflösbar; und in der That geht sie mittelst der Substitution $\frac{p}{q} = \frac{(k^2 - 1)^2}{(k^2 + 1)^2}$ aus der cubischen Gleichung:

$$\frac{S^3}{T^2} = \frac{2}{3} \frac{(3p + q)^3}{q(\frac{1}{3}q - 3p)^2}$$

hervor; vgl. oben die Theorie der binären biquadratischen Formen, p. 238 f.

$$
(5) \qquad \begin{aligned} \varrho x_1 &= \sin^3 \operatorname{am} u \\ \varrho x_2 &= \sin \operatorname{am} u \\ \varrho x_3 &= \cos \operatorname{am} u \,.\, \Delta \operatorname{am} u \,. \end{aligned}
$$

Jedem Werthe von u ist dadurch ein ganz bestimmter Punkt x der Curve zugeordnet

Aber nicht entspricht umgekehrt jedem Punkte x auch *ein* Werth von u, wie aus den Periodicitätseigenschaften der elliptischen Functionen hervorgeht. Das Integral (4) nämlich hat bekanntlich zwei Periodicitätsmodeln Ω und Ω', definirt als die Werthe des Integrals genommen über die beiden Querschnitte der zugehörigen Riemann'schen Fläche, und welche für die Normalform des Integrals erster Gattung in folgender Weise durch geradlinige Integrale gegeben werden*):

$$
(6) \qquad \Omega = 4 \int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}}, \qquad \Omega' = 2 \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}} - 2 \int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}},
$$

wo $R(\lambda) = (1 - \lambda^2)(1 - k^2\lambda^2)$. Ist nun u ein Werth des Integrals (4), so unterscheiden sich alle anderen Werthe desselben von u um ganzzahlige Vielfache von Ω und Ω', d. h. sie sind von der Form:

$$
u + p\Omega + q\Omega',
$$

wenn p, q ganze Zahlen bedeuten. Diese Periodicitätsmoduln sind nun gleichzeitig Perioden für die Function sin am, d. h. es bestehen die Gleichungen:

$$
\sin \operatorname{am}(u \pm \Omega) = \sin \operatorname{am}(u \pm \Omega') = \sin \operatorname{am} u,
$$

während erst Ω und $2\Omega'$ gleichzeitig für die drei Functionen $\sin \operatorname{am} u$, $\cos \operatorname{am} u$, $\Delta \operatorname{am} u$ Perioden liefern. Für die Verhältnisse der x_i erhält man aber aus (5) schon dieselben Werthe, wenn man das Argument u nur um $\frac{1}{2}\Omega$ oder um Ω' wachsen lässt; denn es ist auch:

$$
\begin{aligned}
\sin \operatorname{am}(u \pm \Omega') &= \sin \operatorname{am} u, & \sin \operatorname{am}\left(u \pm \frac{\Omega}{2}\right) &= -\sin \operatorname{am} u, \\
\cos \operatorname{am}(u \pm \Omega') &= -\cos \operatorname{am} u, & \cos \operatorname{am}\left(u \pm \frac{\Omega}{2}\right) &= -\cos \operatorname{am} u, \\
\Delta \operatorname{am}(u \pm \Omega') &= -\Delta \operatorname{am} u, & \Delta \operatorname{am}\left(u + \frac{\Omega}{2}\right) &= \Delta \operatorname{am} u.
\end{aligned}
$$

Jedem Punkte x der Curve entsprechen daher unendlich viele Argument-Werthe; dieselben setzen sich aus einem von ihnen (u) *in der Form*

$$
u + \frac{p}{2}\Omega + q\Omega'
$$

*) Vgl. z. B. Königsberger: Theorie der elliptischen Functionen, Leipzig 1874, Bd. 1, p. 277 ff.

zusammen, wenn p, q ganze Zahlen sind. Oder wie wir uns ausdrücken wollen: *Die Curve hat die Perioden*

$$\omega = \tfrac{1}{2}\Omega \quad \text{und} \quad \omega' = \Omega'. \tag{7}$$

Dass das elliptische Integral erster Gattung u hier in der bekannten Normalform auftritt, ist die Folge der speciellen Lage unseres Coordinatendreiecks; im Allgemeinen wird dies nicht der Fall sein. Alle anderen elliptischen Integrale erster Gattung jedoch kann man auf *eines* von ihnen zurückführen, und in der That ist es aus der Theorie der elliptischen Functionen bekannt, dass alle Integrale mit gleichem Modul k linear in einander transformirt werden können. Es hängt dies, wie später allgemeinere Untersuchungen lehren werden, damit zusammen, dass die Curve dritter Ordnung vom Geschlechte $p = 1$ ist und nur *eine* absolute Invariante besitzt.

Unter Zugrundelegung der Normalform (4) können wir die Vertheilung der Werthe des Integrals über die Punkte der Curve leicht im Einzelnen verfolgen, wie wir weiterhin sehen werden. Es führen dazu die folgenden Ueberlegungen, welche uns gleichzeitig zur Behandlung weiterer an sich wichtiger Fragen Veranlassung bieten werden.

Sind u_1, u_2, u_3 die Parameterwerthe für drei auf einer Geraden liegende Punkte, und setzen wir zur Abkürzung:

$$\sin \operatorname{am} u_i = s_i, \quad \cos \operatorname{am} u_i = c_i, \quad \Delta \operatorname{am} u_i = \Delta_i,$$

so besteht wegen (5) die Relation:

$$\begin{vmatrix} s_1^3 & s_2^3 & s_3^3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ c_1\Delta_1 & c_2\Delta_2 & c_3\Delta_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Diese Gleichung sagt aber nichts anderes aus, als dass die Summe der Agrumente u_1, u_2, u_3 verschwindet, resp. gleich einem ganzen Vielfachen der Perioden unserer Curve ist. Man erkennt dies am einfachsten, wenn man die Gleichungen für das Additionstheorem der elliptischen Functionen in der von Hermite gegebenen Form zu Grunde legt.*) Man hat dann:

$$\sin \operatorname{am}(u_1 + u_2 + \dots + u_{2n}) = \frac{\pm\varphi(0)}{s_1 \cdot s_2 \cdots s_{2n}}, \tag{9}$$

wo $\varphi(u)$ die folgende Function von $s = \sin \operatorname{am} u$, $c = \cos \operatorname{am} u$, $\Delta = \Delta \operatorname{am} u$ ist:

$$\begin{aligned} \varphi(u) = {} & s\,(s^{2n} + p_1 s^{2n-2} + p_2 s^{2n-4} + \dots + p_n) \\ & + c \cdot \Delta\,(q_1 s^{2n-2} + q_2 s^{2n-4} + \dots + q_n). \end{aligned} \tag{10}$$

*) Hermite: Note sur le calcul différentiel et le calcul intégral; extrait de la 6e édition du calcul diff. et int. de Lacroix, Paris 1862, p. 68. Vgl. auch Königsberger: Theorie der elliptischen Functionen, 2. Th., Leipzig 1874, p. 16.

Die hierin vorkommenden $2n$ Constanten p_i, q_i bestimmen sich aus den $2n$ linearen Gleichungen:

(11) $\quad \varphi(u_1) = 0, \quad \varphi(u_2) = 0, \quad \varphi(u_3) = 0, \ldots \varphi(u_{2n}) = 0.$

Das Vorzeichen des in (9) rechts stehenden Ausdruckes wird durch einen speciellen Fall bestimmt, etwa indem man $u_2 = u_3 = \ldots = u_{2n} = 0$ nimmt, wodurch derselbe in $+\sin\operatorname{am} u_1$ übergehen muss.

Setzen wir nun insbesondere $n = 2$ und $u_{2n} = 0$, so gibt Gleichung (9) den Werth von

$$\sin\operatorname{am}(u_1 + u_2 + u_3),$$

und die Gleichungen (10), (11) zur Bestimmung der Function $\varphi(u)$ geben $q_2 = 0$ und:

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &= s^5 + p_1 s^3 + p_2 s + c\;.\,\Delta\, q s^2 \\
0 &= s_1^5 + p_1 s_1^3 + p_2 s_1 + c_1 \,.\, \Delta_1 q s_1^2 \\
0 &= s_2^5 + p_1 s_2^3 + p_2 s_2 + c_2 \,.\, \Delta_2 q s_2^2 \\
0 &= s_3^5 + p_1 s_3^3 + p_2 s_3 + c_3 \,.\, \Delta_3 q s_3^2,
\end{aligned}$$

also durch Auflösung, da die Determinante des Nenners nicht verschwindet:

$$\frac{\varphi(u)}{s} = \frac{\begin{vmatrix} s^4 & s^2 & 1 & c\,\Delta\, s \\ s_1^4 & s_1^2 & 1 & c_1\Delta_1 s_1 \\ s_2^4 & s_2^2 & 1 & c_2\Delta_2 s_2 \\ s_3^4 & s_3^2 & 1 & c_3\Delta_3 s_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_1^2 & 1 & c_1\Delta_1 s_1 \\ s_2^2 & 1 & c_2\Delta_2 s_2 \\ s_3^2 & 1 & c_3\Delta_3 s_3 \end{vmatrix}}.$$

Setzen wir hierin, um die Gleichung (9) zu bilden $u = 0$, so kommt wegen $\sin\operatorname{am} 0 = 0$, $\cos\operatorname{am} 0 = \Delta\operatorname{am} 0 = 1$ links $\frac{\varphi(0)}{0}$, und wir erhalten, da auch $u_{2n} = u_4 = 0$ war:

$$\sin\operatorname{am}(u_1 + u_2 + u_3) = \frac{\begin{vmatrix} s_1^3 & s_1 & c_1\Delta_1 \\ s_2^3 & s_2 & c_2\Delta_2 \\ s_3^3 & s_3 & c_3\Delta_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_1^2 & 1 & c_1\Delta_1 s_1 \\ s_2^2 & 1 & c_2\Delta_2 s_2 \\ s_3^2 & 1 & c_3\Delta_3 s_3 \end{vmatrix}}.$$

Hier steht aber im Zähler die Determinante, deren Verschwinden nach (8) aussagt, dass die drei Punkte mit den Parametern u_1, u_2, u_3 in gerader Linie liegen. Da nun der rechts stehende Nenner nur für besondere Werthe der Argumente u_1, u_2, u_3 zugleich mit dem Zähler

verschwinden kann, während unsere Gleichung für ganz beliebige Argumente derselben gilt, so folgt aus (8):

$$\sin \operatorname{am} (u_1 + u_2 + u_3) = 0,$$

oder:

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0,$$

wo das Zeichen $\equiv$ andeuten soll, dass die links stehende Summe entweder gleich Null selbst oder nur um einen Ausdruck der Form $p\omega + q\omega'$ von Null verschieden sein soll; p, q als ganze Zahlen vorausgesetzt und unter ω, ω' die beiden durch (6) und (7) definirten Perioden unserer Curve verstanden.

Dies Resultat sprechen wir in dem Satze aus:

Stellt man die Punkte einer Curve dritter Ordnung mittelst der Gleichungen (5) *als elliptische Functionen eines Parameters dar*), so ist für die Schnittpunkte einer Geraden mit der Curve immer die Summe der Argumente congruent Null:*

$$(12) \qquad u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0 \pmod{\omega, \omega'}.$$

An diese Gleichung knüpfen wir die Lösung einer Reihe von Aufgaben, die wir früher zum Theil schon in anderer Weise behandelt haben. Lassen wir zunächst zwei der Punkte zusammenfallen, die Gerade also zur Tangente werden, so ist

$$(13) \qquad 2u_1 + u_2 \equiv 0,$$

oder:

$$u_1 = -\frac{u_2}{2} + \frac{p\omega + q\omega'}{2},$$

wo p, q ganze Zahlen sind. Wir brauchen aber nur p, q gleich 0 und 1 zu nehmen, da dann jede höhere Zahl durch Addition ganzer Vielfacher von Perioden entstehen kann. Also:

Die Argumente der Berührungspunkte der vier von einem Punkte u der Curve an dieselbe zu legenden Tangenten sind:

$$(14) \qquad -\frac{u}{2}, \quad -\frac{u+\omega}{2}, \quad -\frac{u+\omega'}{2}, \quad -\frac{u+\omega+\omega'}{2};$$

und umgekehrt ist der Tangentialpunkt u eines Punktes v der Curve bestimmt durch:

$$u \equiv -2v \pmod{\omega, \omega'}.$$

Wenn wir die Beziehungen der vier Berührungspunkte zu den drei auf der Curve vorhandenen Systemen von Polepaaren berücksichtigen (vgl. p. 530), so können wir den ersten Theil dieses Satzes auch in der folgenden Form aussprechen:

---

*) Dieser Satz ist übrigens, wie später gezeigt wird, unabhängig von der Form der Gleichungen (5). Die Darstellung muss nur so eingerichtet sein, dass dem Parameter $u = 0$ ein Wendepunkt entspricht; andernfalls würde auf der rechten Seite von (12) statt Null eine Constante stehen (vgl. p. 630 f.).

Die Argumente der drei Punkte, welche einen Punkt u der Curve in den drei Systemen von Polepaaren zu einem solchen Paare ergänzen, sind:

$$u + \frac{\omega}{2}, \quad u + \frac{\omega'}{2}, \quad u + \frac{\omega + \omega'}{2}. \tag{15}$$

Verbinden wir nun den Punkt u mit einem beliebigen Punkte v, so ist das Argument w des dritten Schnittpunktes dieser Verbindungslinie bestimmt durch: $w \equiv -u - v$. Dasselbe Argument ergibt sich aber auch für den dritten Schnittpunkt der Verbindungslinie von $u + \frac{\omega}{2}$ mit $v + \frac{\omega}{2}$, während sich die Verbindungslinien von u mit $v + \frac{\omega}{2}$ und von v mit $u + \frac{\omega}{2}$ in dem Punkte mit dem Argumente $w + \frac{\omega}{2}$ schneiden. Somit folgt der bekannte Satz (p. 528):

Die Verbindungslinien von nicht entsprechenden Punkten zweier Polepaare desselben Systems schneiden sich auf der Curve in zwei Punkten, welche ein drittes Polepaar desselben Systems bilden.

Wir erkennen ferner aus (14) wieder die für die Realität der drei Systeme von Polepaaren früher gemachten Bemerkungen (p. 530). Ist die Curve nämlich zweitheilig, so sind die vier Tangenten und somit auch ihr Doppelverhältniss k^2 reell; und letzteres kann immer kleiner als 1 angenommen werden, da andernfalls doch einer der fünf übrigen Werthe des Doppelverhältnisses kleiner als 1 sein würde. Dann ist aber bekanntlich nach (6) Ω reell und Ω' rein imaginär $(i = \sqrt{-1})$:

$$2\omega = \Omega = 4K, \quad \omega' = \Omega' = 2iK',$$

wo für $k'^2 = 1 - k^2$:

$$K = \int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}}, \qquad K' = \int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k'^2\lambda^2)}}.$$

Das erste der Argumente (15) ist also selbst reell; aber auch die Einsetzung der andern Argumente in die Werthe der Coordinaten in (5) gibt für letztere reelle Grössen, denn es ist für $k'^2 = 1 - k^2$:

$$\sin \operatorname{am}\left(u \pm \frac{\omega}{2}\right) = \pm \frac{\cos \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} u}, \qquad \sin \operatorname{am}\left(u \pm \frac{\omega'}{2}\right) = \frac{1}{k \sin \operatorname{am} u},$$

$$\cos \operatorname{am}\left(u \pm \frac{\omega}{2}\right) = \mp \frac{k' \sin \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} u}, \qquad \cos \operatorname{am}\left(u \pm \frac{\omega'}{2}\right) = \mp \frac{i\Delta \operatorname{am} u}{k \sin \operatorname{am} u},$$

$$\Delta \operatorname{am}\left(u \pm \frac{\omega}{2}\right) = \frac{k'}{\Delta \operatorname{am} u}, \qquad \Delta \operatorname{am}\left(u + \frac{\omega'}{2}\right) = \mp \frac{i \cos \operatorname{am} u}{\sin \operatorname{am} u},$$

$$\sin \operatorname{am}\left(u + \frac{\omega + \omega'}{2}\right) = \pm \frac{\Delta \operatorname{am} u}{k \cos \operatorname{am} u},$$

$$\cos \operatorname{am}\left(u + \frac{\omega + \omega'}{2}\right) = - \frac{ik'}{k \cos \operatorname{am} u},$$

$$\Delta \operatorname{am}\left(u + \frac{\omega + \omega'}{2}\right) = \pm \frac{ik' \sin \operatorname{am} u}{\cos \operatorname{am} u}.$$

Ist dagegen die Curve eintheilig, so wird das Doppelverhältniss k^2 complex (mit dem absoluten Betrage Eins), und man erkennt aus diesen Gleichungen, dass nur der eine Punkt mit dem Argumente $u + \frac{\omega}{2}$ reelle Coordinaten erhält. —

Lassen wir ferner in (12) alle drei Argumente einander gleich werden, so erhalten wir die Bedingung für einen Wendepunkt:

$$3u \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \omega,\ \omega'),$$

oder, wenn p, q ganze Zahlen sind:

$$u \equiv \frac{p\omega + q\omega'}{3}. \tag{16}$$

Das Problem der Bestimmung der Wendepunkte ist sonach, wenn ein Wendepunkt ($u \equiv 0$) *bekannt ist, identisch mit dem Probleme der sogenannten speciellen Dreitheilung der elliptischen Functionen.* Dasselbe hängt also von einer Gleichung 4ten Grades ab; und letztere ist keine andere, als eben die Gleichung $G(\varkappa, \lambda) = 0$, mittelst deren wir früher die Wendepunkte bestimmten, wie wir später noch sehen werden.*) *Die Argumente der 9 Wendepunkte sind daher:*

$$0,\ \frac{\omega}{3},\ \frac{\omega'}{3},\ \frac{\omega+\omega'}{3},\ \frac{2\omega}{3},\ \frac{2\omega'}{3},\ \frac{\omega+2\omega'}{3},\ \frac{2\omega+\omega'}{3},\ \frac{2\omega+2\omega'}{3}.$$

Auf einer geraden Linie liegen dann immer die Wendepunkte, für deren Argumente die Summe der p sowohl, als die Summe der q durch 3 theilbar ist. Ordnet man also die Werthepaare p, q wie die Elemente einer Determinante in das Schema:

$$\begin{matrix} 0,\,0 & 0,\,1 & 0,\,2 \\ 1,\,0 & 1,\,1 & 1,\,2 \\ 2,\,0 & 2,\,1 & 2,\,2, \end{matrix}$$

so liegen je auf einer Geraden solche Punkte, die derselben Horizontalreihe oder derselben Verticalreihe angehören, und endlich solche, die in der Determinante mit einander multiplicirt erscheinen würden. Wir haben sonach für die Gruppirung der Wendepunkte ohne weitere Ueberlegung dieselben Regeln, welche wir früher auf anderem Wege ableiteten (vgl. p. 507); und in der That stimmt unser Schema ganz mit dem damals aufgestellten überein: die in demselben benutzten Zahlen haben aber durch unsere jetzige Betrachtung eine unmittelbare Bedeutung gewonnen; es sind die Werthe der Zahlen p, q in (16). Man erkennt ferner, dass nur drei und immer drei reelle Wendepunkte auf einer reellen Curve vorhanden sind, nämlich diejenigen, welche durch die Parameterwerthe 0, $\frac{1}{3}\omega$, $\frac{2}{3}\omega$ gegeben werden. Hieraus kann man schliessen, dass die Argumente der Punkte

*) Vgl. den Schluss dieses und des folgenden Abschnittes.

des mit drei Wendepunkten versehenen Zuges alle in der Form $\frac{p}{q}\omega$ dargestellt werden können, wo p, q reelle Zahlen bedeuten; man kann auch direct die Vertheilung dieser Argumentwerthe durch fortgesetztes Tangentenziehen verfolgen. Zunächst sind die Berührungspunkte der von einem Wendepunkte $\frac{p\omega + q\omega'}{3}$ ausgehenden Tangenten nach (14) gegeben durch

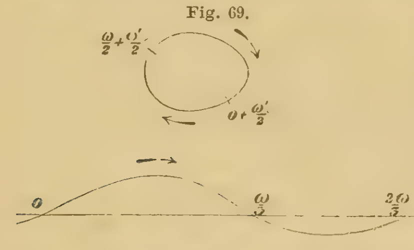
$$(17)\quad -\frac{p\omega + q\omega'}{6},\ -\frac{(p+3)\omega + q\omega'}{6},\ -\frac{p\omega + (q+3)\omega'}{6},\ -\frac{(p+3)\omega + (q+3)\omega'}{6}.$$

Setzt man hierin die Werthe von p, q ein, so erkennt man, dass einer dieser Punkte in den betreffenden Wendepunkt zurückfällt; z. B. für $p = 1$, $q = 0$ erhält man, wenn man alle Argumente um die Perioden ω und ω' vermehrt:

$$\tfrac{5}{6}\omega,\ \ \tfrac{1}{3}\omega,\ \ \tfrac{5}{6}\omega + \tfrac{1}{2}\omega',\ \ \tfrac{1}{3}\omega + \tfrac{1}{2}\omega'.$$

Von den drei Berührungspunkten liegt also nur einer ($\frac{5}{6}\omega$) mit dem Wendepunkte $\frac{1}{3}\omega$ auf demselben Zuge; die beiden anderen dagegen auf dem Ovale. Wir können hieraus schliessen, dass die Argumente der Punkte des letzteren immer von der Form $m\omega + \frac{1}{2}\omega'$ sind, wo m eine reelle Zahl ist, und so überhaupt durch fortgesetztes Tangentenziehen ein Urtheil über die Vertheilung der Argumentenwerthe auf den reellen Zügen der Curve gewinnen, wie dies Fig. 69 veranschaulicht. *Auf den Zug mit den drei Wendepunkten fallen, wie erwähnt, die Werthe $u = 0$ bis $u = \omega$, auf das Oval die Werthe $u = 0 + \frac{1}{2}\omega'$ bis $u = \omega + \frac{1}{2}\omega'$.*

Fig. 69.



Damit ist aber nur die Vertheilung der Parameter für die reellen Punkte der Curve gegeben; es fragt sich, ob für die imaginären Punkte eine ähnliche Versinnlichung derselben möglich wird. Letzteres ist nun in der That der Fall, wenn man sich der von Klein eingeführten Vorstellungsweise bedient.*) Diese Darstellung der imaginären Elemente der Curve schliesst sich an die Auffassung derselben als Umhüllungsgebilde ihrer Tangenten an; wir werden daher im Folgenden statt der Curve dritter Ordnung eine Curve dritter Klasse zu Grunde legen.

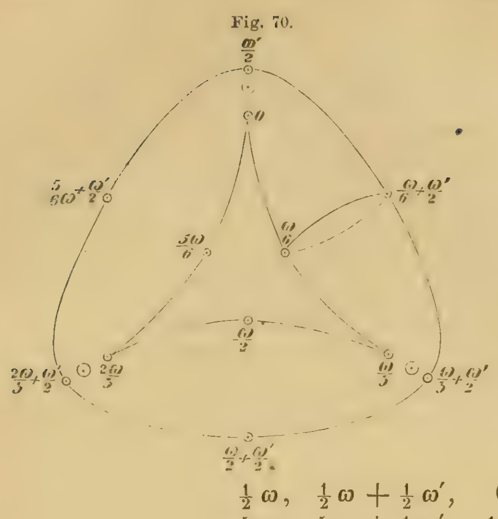
Zuvor betrachten wir jedoch das Entsprechende an einem Kegelschnitte. Jeder Tangente eines solchen, wie überhaupt einer alge-

*) F. Klein: Ueber eine neue Art der Riemann'schen Flächen; Math. Annalen, Bd. 7, p. 558.

braischen Curve, mag die Tangente reell oder imaginär sein, kann man im Allgemeinen *einen* reellen Punkt der Ebene zuordnen. Ist die Tangente reell, so wählen wir als ihr entsprechenden Punkt den Berührungspunkt; ist sie imaginär, so wählen wir den einen reellen Punkt, den sie überhaupt besitzt. Beide Festsetzungen stimmen insofern mit einander überein, als die auf reelle Tangenten bezügliche aus der anderen durch Grenzübergang hervorgeht. Denn der reelle Punkt einer imaginären Tangente ist ihr Schnittpunkt mit der conjugirt imaginären Geraden; und, wenn diese beiden conjugirten Linien in eine reelle zusammenfallen, so geht ihr Schnittpunkt eben in den Berührungspunkt der letzteren über. Es sei nun zunächst ein reeller Kegelschnitt gegeben, den wir als *Ellipse* voraussetzen. Von jedem Punkte ausserhalb derselben kann man zwei reelle Tangenten an sie legen, dagegen von jedem Punkte im Innern der Ellipse zwei conjugirt imaginäre. Es gibt also immer *zwei* imaginäre Tangenten, welchen derselbe reelle Punkt zugehört: *Die reellen Punkte, welche den imaginären Tangenten der Ellipse entsprechen, erfüllen das Innere derselben doppelt, sie bilden eine Fläche von der Gestalt eines ellipsoidischen Doppelblattes.* Wenn wir dabei von einem Doppelblatte sprechen, so denken wir uns alle Punkte des Innern einmal zu einem Blatte vereinigt, insofern sie einer Tangente $G + iH = 0$ zugeordnet sind, und einmal, insofern sie zu einer Tangente $G - iH = 0$ gehören. Dieses Doppelblatt nun repräsentirt uns die Gesammtheit der imaginären Tangenten der Ellipse, d. h. die Vertheilung der complexen Werthe eines Parameters, von dem jene Tangenten rational abhängen. Beide Blätter sind durch die reellen Punkte der Ellipse mit einander verbunden.

Ganz analoge Ueberlegungen können wir nun auch an einer *Curve dritter Klasse* anstellen. Eine solche besteht bekanntlich entweder aus zwei geschlossenen Zweigen, von denen der eine drei Spitzen, der andere eine ovale Form hat, oder allein aus einem dreispitzigen Zuge (vgl. p. 514). Wir betrachten hier nur den ersten Fall. Die Tangenten einer Curve der beregten Art können wir ebenso als elliptische Functionen eines Parameters darstellen, als die Punkte einer zweitheiligen Curve dritter Ordnung; d. h. die eine Periode des betreffenden elliptischen Integrals erster Gattung ist reell, die andere rein imaginär (vgl. p. 608); und also ist die Parametervertheilung für die reellen Tangenten der beiden Züge dieselbe (nur dualistisch übertragen), wie in Fig. 69.

Setzen wir also einem Punkte der Curve dritter Klasse den Argumentwerth seiner Tangente bei, so erhalten wir die in Fig. 70 dargestellte Parametervertheilung: Längs des Zuges mit drei Spitzen



sind die reellen Zahlen von 0 bis ω in der Weise vertheilt, dass den drei Spitzen die Argumente 0, $\frac{1}{3}\omega$, $\frac{2}{3}\omega$ zukommen; und die entsprechenden drei Rückkehrtangenten schneiden die Curve noch in drei Punkten, welche den von einem Wendepunkte der Curve dritter Ordnung ausgehenden Tangenten entsprechen, und also bez. die folgenden Argumente haben:

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{2}\omega, & \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{2}\omega', & 0 \ + \frac{1}{2}\omega', \\ \frac{5}{6}\omega, & \frac{5}{6}\omega + \frac{1}{2}\omega', & \frac{1}{3}\omega + \frac{1}{2}\omega', \\ \frac{1}{6}\omega, & \frac{1}{6}\omega + \frac{1}{2}\omega', & \frac{2}{3}\omega + \frac{1}{2}\omega'. \end{array}$$

Für die Punkte des umschliessenden Ovals hat der imaginäre Theil des Arguments überhaupt gleichmässig den constanten Werth $\frac{1}{2}\omega'$, während er für die Punkte des dreispitzigen Zuges verschwindet.

In Betreff der *imaginären* Tangenten der Curve gilt das Folgende. Von jedem Punkte ausserhalb des Ovals, sowie von jedem Punkte innerhalb des dreispitzigen Zuges kann man, wie ein Blick auf die Figur lehrt, drei reelle Tangenten an die Curve legen; die reellen Punkte dagegen, welche conjugirt imaginären Tangenten der Curve entsprechen, von denen also nur noch eine reelle Tangente ausgeht, erfüllen den Raum zwischen beiden Curvenzügen doppelt. Denken wir uns demgemäss diese Punkte wie bei der Ellipse auf zwei verschiedene, über die Ebene zwischen beiden Curvenzügen ausgebreitete Blätter vertheilt, die längs der beiden reellen Curvenzüge an einander geheftet sein mögen, *so bilden sie eine Art Ringfläche*, d. h. eine Fläche, die durch continuirliche Deformation in einen gewöhnlichen Ring übergeführt werden kann.*) Jedem Punkte dieser Fläche gehört nun

*) Die von uns construirte Fläche hat also auch denselben *Zusammenhang*, wie eine Ringfläche, und somit auch wie die zum Studium der elliptischen Functionen zu benutzende Riemann'sche Fläche. Man kann nun überhaupt die letztere direct durch unsere Ringfläche ersetzen und auf dieser die Integrationswege des elliptischen Integrals verfolgen; es ist dies in mancher Beziehung bequemer und anschaulicher. Die beiden Perioden dieses Integrals entstehen dann dadurch, dass man dem zwischen bestimmten Grenzen geführten Integrationswege beliebig Meridiancurven und Breitencurven hinzufügen kann. — Aus der Zahl für den Zusammenhang der Ringfläche kann man ferner in Riemann'scher Weise schliessen, dass die Curve dritter Klasse vom Geschlechte 1 ist. Aehnliches gilt auch bei höheren Curven. Vgl. Klein a. a. O.

ein complexer Werth des Arguments u zu und dem gerade über ihm liegenden des andern Blattes der conjugirt imaginäre Werth. Insbesondere finden sich etwa an den drei Stellen, welche in Fig. 70 durch kleine Kreise bezeichnet sind, diejenigen Punkte der Fläche, welche die 6 paarweise conjugirt imaginären Rückkehrtangenten der Curve repräsentiren, denen also bez. die folgenden Argumente zukommen:

$$0 \pm \tfrac{1}{3}\omega', \quad \tfrac{1}{3}\omega \pm \tfrac{1}{3}\omega', \quad \tfrac{2}{3}\omega \pm \tfrac{1}{3}\omega';$$

denn diese Punkte müssen bez. zwischen den Punktepaaren 0 und $0 + \frac{1}{2}\omega'$, $\frac{1}{3}\omega$ und $\frac{1}{3}\omega + \frac{1}{2}\omega'$, $\frac{2}{3}\omega$ und $\frac{2}{3}\omega + \frac{1}{2}\omega'$ symmetrisch liegen.

Auf der Fläche sind nun besonders zwei Curvensysteme von Wichtigkeit, die wir als *Breitencurven* und *Meridiancurven* unterscheiden wollen; sie sind dadurch definirt, dass auf ihnen bez. der imaginäre und der reelle Theil des Arguments einen constanten Werth hat. Die Meridiancurven werden, wie hier nur kurz bemerkt werden mag, durch die Tangenten des dreispitzigen Zuges gebildet, d. h. auf der Ringfläche durch eine Ebene ausgeschnitten, welche durch eine solche Tangente, etwa senkrecht zur Ebene der Zeichnung, gelegt wird. Eine Curve der Art ist in Fig. 70 durch Verbindung der Punkte $\frac{1}{6}\omega$ und $\frac{1}{6}\omega + \frac{1}{2}\omega'$ angedeutet. Die Breitencurven, auf denen immer der imaginäre Theil des Arguments constant ist, verlaufen gewissermassen senkrecht zu den Meridiancurven; zu ihnen gehören insbesondere die beiden reellen Züge der Curve selbst, indem auf dem Ovale der imaginäre Theil stets gleich $\frac{1}{2}\omega'$, auf dem dreispitzigen Zuge stets gleich Null ist. Eine nähere Untersuchung ergibt weiter, dass je zwei Breitencurven, für welche die constanten imaginären Werthe um $\frac{1}{2}\omega'$ differiren, zusammen die beiden reellen Züge einer algebraischen Curve vom Geschlechte $p = 1$ bilden.*) —

*) Diese Curven sind ferner durch die in folgenden Sätzen ausgesprochenen Eigenschaften charakterisirt:

Das Doppelverhältniss der vier reellen Schnittpunkte jeder Curve mit den Tangenten am dreispitzigen Zuge der Grundcurve ist constant. Die Breitencurven bilden einen Theil eines Curvensystems, welches dadurch erhalten wird, dass man auf jeder Tangente der Curve dritter Klasse zu der binären biquadratischen Form f, gebildet durch ihre Schnittpunkte mit der Curve, die Hesse*'sche Form H und den Büschel $\varkappa f + \lambda H$ construirt.*

Für die Breiten- und Meridiancurven erwähnen wir schliesslich noch die Relation, *dass die beiden von jedem Punkte der Ringfläche ausgehenden conjugirt imaginären Tangenten harmonisch zu den Richtungen dieser Curven liegen.* Diese Beziehung gibt dann weiter einen bemerkenswerthen Zusammenhang des Systems der Breitencurven mit der zur Grundcurve gehörigen Zwischenform Q. — Vgl. Näheres über diese Verhältnisse bei Harnack: Ueber die Verwerthung der elliptischen Functionen für die Geometrie der Curven dritten Grades, Math. Annalen, Bd. 9; ferner unten p. 622.

Wir wollen nun mit Hülfe der Gleichung (12) einige weitere Probleme behandeln. Zunächst stellen wir eine Frage, auf deren Beantwortung wir schon bei Gelegenheit der Grassmann'schen Erzeugungsweise der Curve dritter Ordnung geführt wurden, nämlich (vgl. p. 539):

Es sind auf der Curve drei Punkte mit den Argumenten a, b, c gegeben, es sollen durch dieselben drei Gerade gelegt werden, welche sich auf der Curve schneiden.

Bezeichnen wir mit u, v, w diese drei Schnittpunkte, so haben wir die drei Bedingungen:

$$a + v + w \equiv 0,$$
$$b + w + u \equiv 0,$$
$$c + u + v \equiv 0,$$

und hieraus durch Addition:

$$u + v + w \equiv -\frac{a+b+c}{2} + \frac{p\omega + q\omega'}{2},$$

also schliesslich ($P = p\omega + q\omega'$):

$$u \equiv \frac{a-b-c}{2} + \frac{P}{2},$$
$$(18)\qquad v \equiv \frac{b-c-a}{2} + \frac{P}{2},$$
$$w \equiv \frac{c-a-b}{2} + \frac{P}{2}.$$

Hier haben wir für p und q nur 0 oder 1 zu setzen und erhalten so wieder den bekannten Satz:

Es gibt vier Dreiecke, deren Ecken einzeln auf der Curve liegen, und deren Seiten durch drei gegebene Punkte der Curve gehen.

Ferner ergibt der Vergleich der Ausdrücke (18) mit (15) das uns ebenfalls bereits bekannte Resultat:

Wenn man zu den Ecken eines dieser Dreiecke die correspondirenden Punkte in den drei Systemen von Polepaaren construirt, so erhält man die Ecken der drei anderen Dreiecke.

Man leitet hieraus ferner leicht die früher gegebene Construction der vier Dreiecke ab. — Wenn die Punkte a, b, c in gerader Linie liegen, so ist:

$$a + b + c \equiv 0,$$

und es gibt eine Periode $\Pi = \pi\omega + \varkappa\omega'$, so dass:

$$\tfrac{1}{2}(a + b + c) = \tfrac{1}{2}\Pi.$$

In Folge dessen gehen die Gleichungen (18) über in:

$$u \equiv a + \frac{P - \Pi}{2},\quad v \equiv b + \frac{P - \Pi}{2},\quad w \equiv c + \frac{P - \Pi}{2}.$$

Von den vier oben gefundenen Lösungen wird demnach eine ($P = \Pi$) uneigentlich, indem das entsprechende Dreieck in die Verbindungslinie der drei gegebenen Punkte übergeht.*)

Es lassen sich also einer Curve dritter Ordnung nur drei Dreiecke einschreiben, deren Seiten durch drei auf der Curve gegebene, in einer Geraden liegende Punkte gehen. Ihre Ecken sind die drei Punktetripel, welche den gegebenen Punkten als conjugirte Pole in den drei Systemen entsprechen. (Man kann auf diese Dreiecke noch sechs Grassmann*sche Erzeugungsweisen der Curve begründen.)* —

Wir können ferner mit Hülfe der Gleichung (12) die Steiner-schen Polygone**) behandeln, die wir auch schon bei Curven mit Doppelpunkt betrachtet haben, wie denn überhaupt der Satz von dem Verschwinden der Integralsumme an Stelle des bei Curven mit Doppelpunkt geltenden vom Verschwinden der Summe der Logarithmen zu treten hat (vgl. Gleichung (9) auf p. 586 und p. 593).

Zur Construction eines Steiner'schen Polygons ziehen wir durch einen festen Punkt a der Curve eine beliebige Gerade, welche noch in zwei Punkten mit den Argumenten u_1, u_2 schneidet, u_2 verbinden wir mit einem beliebigen festen Punkte b der Curve durch eine Linie, welche noch durch u_3 geht, u_3 wieder mit a durch eine in u_4 schneidende Gerade, u. s. f.: Wir fragen, wie b liegen muss, damit ein *geschlossenes* Polygon von $2n$ Seiten entsteht, d. h. damit die $2n^{\text{te}}$ Seite wieder durch den Punkt u_1 geht. Diese Construction gibt uns nun unmittelbar die folgenden Bedingungsgleichungen:

$$(19)\qquad \begin{cases} a + u_1 + u_2 = 0, & b + u_2 + u_3 = 0, \\ a + u_3 + u_4 = 0, & b + u_4 + u_5 = 0, \\ a + u_5 + u_6 = 0, & b + u_6 + u_7 = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a + u_{2n-1} + u_{2n} = 0, & b + u_{2n} + u_1 = 0. \end{cases}$$

Durch Addition folgt also:

$$n \,.\, a + \Sigma u_i = 0, \quad n \,.\, b + \Sigma u_i = 0,$$

oder:

$$(20)\qquad a = b + \frac{1}{n}(p\omega + q\omega').$$

Mittelst dieser Gleichung ist b mehrdeutig bestimmt, wenn a gegeben ist. Alsdann lassen sich aus (19) alle Ecken des Polygons

---

*) Vgl. Clebsch: Math. Annalen, Bd. 5, p. 425, und für den besonderen Fall, dass a, b, c in gerader Linie liegen: Hesse, Crelle's Journal, Bd. 36.

**) Vgl. Steiner, Crelle's Journal, Bd. 32, p. 182, und Clebsch, ib. Bd. 63: Ueber einen Satz von Steiner und einige Punkte der Theorie der Curven dritter Ordnung. In letzterem Aufsatze wurden überhaupt zuerst die elliptischen Functionen für die Curven 3. Ordnung verwerthet.

successive berechnen, sobald eine, etwa u_1, willkürlich gewählt ist; und somit liegt in (20) der Beweis des Steiner'schen Satzes:

Es gibt unendlich viele Polygone von $2n$ Seiten und $2n$ Ecken, deren Ecken auf einer allgemeinen Curve dritter Ordnung liegen, deren ungerade Seiten sich in einem Punkte a der Curve treffen und deren gerade Seiten durch einen zweiten Punkt b der Curve gehen. Ist a gegeben, so ist b dadurch mehrdeutig bestimmt; zu zwei zusammengehörigen Punkten a, b, „einem zur Zahl n gehörigen Steiner'*schen Punktepaare", gibt es aber unendlich viele Polygone, indem die erste (durch a gehende) Seite ganz willkürlich ist.*

Was die Bestimmung von a aus b (oder b aus a) betrifft, so zeigt die Gleichung (20), dass dieselbe durch das Problem der n-Theilung der elliptischen Functionen geschieht; in der That hat man, um die Coordinaten des Punktes a anzugeben, nach (5) für $b = \frac{\beta}{n}$ die Aufgabe

$$\sin \operatorname{am} \left(\frac{\beta + p\omega + q\omega'}{n} \right) \quad \text{aus} \quad \sin \operatorname{am} \beta$$

zu finden. Dieselbe hat bekanntlich n^2 Lösungen, wenn n eine ungerade Primzahl ist, und diese lassen sich mit Hülfe von Wurzelzeichen durch die Wurzeln einer einzigen Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades darstellen. Unter jenen n^2 Lösungen ist aber eine für uns unbrauchbare enthalten, nämlich diejenige, wo $a = b$ wird.

Ist daher n eine Primzahl, so gibt es $n^2 - 1$ Punkte b, welche mit einem gegebenen Punkte a ein Steiner'*sches Punktepaar bilden.* Diese Punkte ordnen sich in $n+1$ Gruppen, entsprechend den Wurzeln jener Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades; und jede Gruppe besteht aus $n-1$ Punkten. Aus den später anzugebenden Beziehungen zwischen verschiedenen Steiner'schen Punktepaaren wird man ferner sehr einfache Beziehungen zwischen den Punkten einer solchen Gruppe ableiten.

Ist jedoch n keine Primzahl, so wird es vorkommen können, dass die Zahlen p, q in dem Ausdrucke

$$\varepsilon = \frac{p\omega + q\omega'}{n},$$

welche die Werthe $0, 1, 2, \ldots n-1$ annehmen können, mit n gleichzeitig denselben Factor gemein haben; und dann entsteht das $2n$-Eck offenbar durch wiederholte Umgänge eines Polygons von geringerer Seitenzahl.*) Man hat also allgemein den Satz:

Zu jedem Punkte a der Curve gehören so viele Punkte b, als Zahlenpaare p, q ($< n$) existiren, welche mit n keinen Factor gemein haben.

*) Vgl. die entsprechenden Ueberlegungen bei Curven mit Doppelpunkt auf p. 589.

Zu besonders ausgezeichneten Polygonen geben die Wendepunkte Veranlassung. Man erkennt nämlich aus (16), dass je zwei Wendepunkte ein Steiner'sches Punktepaar für $n = 3$, und aus (17), dass je zwei Berührungspunkte der von verschiedenen Wendepunkten ausgehenden Tangenten ein solches Punktepaar für $n = 6$ bilden. Man hat also den Satz, dessen ersten Theil schon Steiner angab:

Je zwei Wendepunkte können die Schnittpunkte der geraden und ungeraden Seiten eines Steiner'*schen Sechsecks und je zwei Berührungspunkte der von zweien unter ihnen ausgehenden Tangenten dergleichen Punkte für ein* Steiner'*sches Zwölfeck sein.*

Ferner können wir in folgender Weise Punktsysteme auf der Curve angeben, die für einen speciellen Fall ($n = 3$) auf die Wendepunkte zurückführen. Wir stellen die Forderung, dass von dem Systeme der zu einem Punkte a gehörigen Punkte b immer auf der Verbindungslinie zweier noch ein dritter liege. Sind zwei solche Punkte (b, b') durch die Gleichungen:

$$a \equiv b + \frac{p\omega + q\omega'}{n}, \quad a \equiv b' + \frac{p'\omega + q'\omega'}{n}$$

gegeben, so müssen sich alsdann zwei Zahlen p'', q'' angeben lassen, so dass

$$a \equiv b'' + \frac{p''\omega + q''\omega'}{n},$$

und $b + b' + b'' \equiv 0$, d. h.:

$$3a - \frac{1}{n}\left\{(p + p' + p'')\,\omega + (q + q' + q'')\,\omega'\right\} \equiv 0;$$

oder es muss sein, wenn r, s *ganze Zahlen sind:*

$$(21) \qquad a \equiv \frac{r\omega + s\omega'}{3} + \frac{1}{3n}\left\{(p + p' + p'')\,\omega + (q + q' + q'')\,\omega'\right\}.$$

Da nun der erste Theil der rechten Seite das Argument eines Wendepunktes ist, so hat man folgenden Satz:

Alle und nur diejenigen Punkte a, welche mit einem Wendepunkte ein zur Zahl $3n$ gehöriges Steiner'*sches Punktepaar bilden können, haben die Eigenschaft, dass die Verbindungslinie von irgend zwei Punkten, die mit a ein zur Zahl n gehöriges Punktepaar bilden, die Curve in einem dritten Punkte schneiden, welcher a zu einem ebensolchen Punktepaare ergänzt.*

Das nähere Studium der so definirten Punktsysteme a, b, welche von den Wendepunkten abhängen, und als deren speciellster Fall das System der Wendepunkte selbst erscheint, bietet grosses Interesse. Dieselben sind verschieden je nach der Natur der Zahlen

$$n, \quad p_0 = p + p' + p'', \quad q_0 = q + q' + q'',$$

und zwar in folgender Weise. Genügt a der Relation (21), so wollen wir einen Punkt, welcher mit a ein zur Zahl n gehöriges Punktepaar bildet, dessen Argument also von der Form $a+\frac{r\omega+s\omega'}{n}$ ist, kurz einen Punkt r, s nennen. Sollen dann also die Punkte r, s; r', s'; r'', s'' auf einer Geraden liegen, so muss man haben:

$$r+r'+r''\equiv p_0\,,\quad s+s'+s''\equiv q_0 \qquad (\text{mod. } n)\,.$$

Wenn nun erstlich n durch 3 theilbar ist, aber nicht p_0 und q_0, so können die Punkte r, s; r', s'; r'', s'' nie in *einen* Punkt zusammenfallen. *Ist dagegen n nicht durch 3 theilbar*, so kann man, und zwar auf *eine* Art

$$3\,r\equiv p_0\,,\quad 3\,s\equiv q_0 \qquad (\text{mod. } n)$$

machen; *dann gehört also ein Wendepunkt zu dem Systeme.* Ist endlich jede der Zahlen n, p_0, q_0 durch 3 theilbar, so gehört jeder der 9 Wendepunkte zu dem Systeme.

Ist ferner n ungerade, so bestehen die Congruenzen

$$r'+2\,r\equiv p_0\,,\quad s'+2\,s\equiv q_0 \qquad (\text{mod. } n)$$

so zusammen, dass jedem Punkte r', s' ein Punkt r, s entspricht, und umgekehrt. In diesem Falle also kann man von jedem Punkte des Systems *eine* Tangente ziehen, deren Berührungspunkt dem Systeme angehört, und die Tangente in *jedem* Punkte des Systems geht noch durch einen anderen desselben. *Ist dagegen n gerade*, so gehört zwar zu jedem Punkte r, s ein Punkt r', s'; aber umgekehrt gehört zu einem Punkte r', s' nur dann ein Punkt r, s, wenn die Zahlen p_0-r', q_0-s' gerade sind; dann aber gehören zu demselben auch noch die Punkte

$$r+\frac{n}{2},\ s;\quad r,\ s+\frac{n}{2};\quad r+\frac{n}{2},\quad s+\frac{n}{2}\,.$$

Es geht also zwar noch die Tangente in jedem Punkte des Systems durch einen andern, aber immer vier durch denselben, so dass überhaupt nur durch den vierten Theil aller Punkte Tangenten anderer Punkte hindurchgehen.*) —

Die Untersuchung der Steiner'schen Punktepaare gibt uns noch zu einigen allgemeineren Erörterungen Veranlassung, insofern durch dieselben auf der Curve eine paarweise Zuordnung der Punkte (Correspondenz) gegeben wird. Ein solches zur Zahl n gehöriges Punktepaar ist durch die Relation (20) definirt, nämlich:

$$a-b\equiv\frac{1}{n}\,(p\omega+q\omega'),\quad (=\varepsilon)\,. \tag{22}$$

*) Vgl. noch Näheres über diese Punktsysteme bei Clebsch a. a. O.

Lassen wir nun a die Curve durchlaufen und suchen zu jedem a den entsprechenden Punkt b, indem wir den Zahlen p, q bestimmte, constante Werthe beilegen, so werden wir alle auf der Curve denkbaren zur Zahl n gehörigen Paare erhalten, für welche die Zahlen p, q diese bestimmten Werthe haben; und es ist klar, dass alle diese Punktepaare a', b' aus dem einen gegebenen a, b durch Aenderung dieser Argumente um die gleiche Constante hervorgehen, so dass immer die Bedingung $a' - b' \equiv a - b$ erfüllt bleibt. Letzteres gibt die folgende geometrische Construction dieser Paare: Wir verbinden die Punkte a, b mit einem beliebigen Punkte c der Curve, so dass letztere von den Linien ac, $\overline{bc}$ in den Punkten b', a' getroffen wird, wo:

$$a' \equiv -(b+c), \quad b' \equiv -(a+c).$$

Dann folgt aber:

$$a' - b' \equiv a - b \equiv \varepsilon. \tag{23}$$

Um den Inhalt dieser Gleichung einfach auszusprechen, wollen wir nun die Punktepaare (22) in verschiedene *Klassen* eintheilen, indem wir zu derselben Klasse alle diejenigen vereinigen, für welche die Zahlen p, q dieselben Werthe haben. Die Gleichung (23) gibt dann den Satz:

Verbindet man ein Steiner'*sches Punktepaar mit irgend einem Punkte der Curve, so schneiden die Verbindungslinien die Curve in neuen Punktepaaren derselben Klasse, so dass man alle Punktepaare einer Klasse aus einem derselben erhält, indem man den willkürlichen Punkt sich über die ganze Curve bewegen lässt.*

Die verschiedenen Klassen von Punktepaaren ordnen sich nun weiter in *Gruppen*, insofern man alle Klassen zu einer Gruppe vereinigt, für welche die Grösse $\varepsilon = \frac{1}{n}(p\omega + q\omega')$ sich nur um ganzzahlige Factoren unterscheidet, für welche also:

$$a - b \equiv \varepsilon, \quad 2\varepsilon, 3\varepsilon, \ldots (n-1)\varepsilon.$$

Es ist aber zu bemerken, dass die zu $h\varepsilon$ und $(n-h)\varepsilon$ gehörigen Klassen einer Gruppe nicht von einander verschieden sind, indem dieselben durch blosse Vertauschung von a mit b in einander übergehen. Jede Gruppe umfasst also nur $\frac{1}{2}(n-1)$ Klassen; und es gibt $(n+1)$ solche Gruppen entsprechend den Wurzeln der Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades, von welcher die n-Theilung abhängt.*) Ferner sind in jeder Gruppe, wenn n keine Primzahl ist, Klassen uneigentlicher Polygone enthalten, wie man durch ähnliche Ueberlegungen, wie oben, erschliesst;

*) Diese Gruppen entsprechen also den verschiedenen, nicht äquivalenten Klassen, welche man bei einer Transformation n^{ten} Grades unterscheidet.

doch gehen wir auf diese Fälle nicht weiter ein. Wir erwähnen nur noch einen Satz, mittelst dessen in Verbindung mit dem vorigen man, wie sofort ersichtlich ist, *auch alle Punktepaare einer Gruppe aus einem einzigen Paare linear ableiten kann.*

Bestehen nämlich die Gleichungen:

$$a - b \equiv h\varepsilon, \quad a' - b' \equiv h'\varepsilon$$

und sind die Punkte a'', b''; a''', b''' definirt durch:

$$a + b' + a'' \equiv 0, \quad b + a' + b'' \equiv 0,$$
$$a + a' + a''' \equiv 0, \quad b + b' + b''' \equiv 0,$$

so ist auch:

$$a'' - b'' \equiv (h' - h)\,\varepsilon, \quad a''' - b''' \equiv -(h + h')\,\varepsilon.$$

Sind also zwei Paare a, b; a', b' derselben Gruppe gegeben, und verbindet man dieselben über Kreuz, so schneiden diese Verbindungslinien auf der Curve zwei neue Punktepaare aus, welche derselben Gruppe angehören. Nur wenn beide Paare auch von derselben Klasse sind ($h = h'$), *fällt eines der neuen Paare in einen Punkt der Curve zusammen, während das zweite einer anderen Klasse angehört.* Die letztere Bemerkung führt dazu, aus zwei Paaren derselben Klasse Paare anderer Klassen derselben Gruppe zu finden. Da aber nach dem vorhergehenden Satze alle Paare einer Klasse wieder durch ein Paar derselben gegeben sind, so kann man in der That auch alle Paare einer Gruppe aus einem Paare construiren.

Dagegen ist es nicht möglich, Punktepaare *verschiedener* Gruppen zu construiren, wenn ein einziges Paar gegeben ist. Vielmehr sind dazu zwei Paare nöthig,

$$a - b \equiv \varepsilon, \quad a' - b' \equiv \varepsilon',$$

welche nicht derselben Gruppe angehören. Wendet man nämlich auf sie dieselbe Construction an, so kommt man auf zwei Paare, für die:

$$a'' - b'' \equiv \varepsilon' - \varepsilon, \quad a''' - b''' \equiv -(\varepsilon + \varepsilon').$$

Wir haben also den Satz:

Sind zwei Steiner'*sche Punktepaare verschiedener Gruppen gegeben* (a, b, ε; a', b', ε'), *und verbindet man a mit b', a' mit b oder a mit a', b mit b', so erhält man ein drittes Paar, welches einer anderen Gruppe angehört. Aus zwei gegebenen Paaren verschiedener Gruppen kann man überhaupt alle Paare construiren, welche einer Zahl n zugehören, wenn:*

$$\varepsilon = \frac{1}{n}(p\omega + q\omega'), \quad \varepsilon' = \frac{1}{n}(p'\omega + q'\omega'),$$

und wenn weder p, q noch p', q' einen Factor mit n gemein haben.

Man kann nun ferner nach Beziehungen zwischen Punktepaaren

fragen, die zu verschiedenen Zahlen n gehören; wir unterlassen jedoch die weitere Ausführung dieser Theorien, um an das Vorstehende Untersuchungen anderen Charakters anzuknüpfen, indem wir die Beziehungen zwischen verschiedenen Punkten auf der Curve mit anderen geometrischen Gebilden der Ebene in Verbindung setzen. Legt man nämlich den Zahlen p, q in (22) constante Werthe bei, so werden die Verbindungslinien je zweier einander entsprechenden Punkte a, b eine bestimmte Curve umhüllen: und *diese Curve ist von der sechsten Klasse.**) Einem Punkte b entspricht nämlich vermöge (22) der Punkt $a \equiv b + \varepsilon$, wo ε eine Constante, und der dritte Schnittpunkt u der Verbindungslinie von a und b ist bestimmt durch:

$$2b + \varepsilon + u = 0.$$

Die Punkte b, deren Verbindungslinien mit dem entsprechenden $b + \varepsilon$ durch denselben Punkt u gehen, sind also bestimmt durch

$$b \equiv -\frac{\varepsilon + u}{2} + \frac{p\omega + q\omega'}{2}; \tag{24}$$

d. h. ihre Zahl ist gleich 4, entsprechend den 4 Werthepaaren, welche p, q beizulegen sind; ausserdem aber geht noch durch u die Verbindungslinie von u (als Punkt b) mit dem entsprechenden Punkte $u + \varepsilon$ und die Verbindungslinie von u (als Punkt a) mit dem entsprechenden Punkte $u - \varepsilon$; so dass wir im Ganzen 6 Tangenten durch u haben. Die Relation (24) gibt durch Vergleichung mit (15) beiläufig den Satz:

Geht die Verbindungslinie des Punktes a mit dem ihm zugeordneten $a + \varepsilon$ durch u, so gehen auch die Verbindungslinien der drei Punkte, welche a zu einem Polepaare ergänzen, mit den ihnen zugeordneten Punkten durch u.

Nimmt man nun insbesondere in (22) $n = 2$, also $\varepsilon = \frac{1}{2}\omega$, oder $= \frac{1}{2}\omega'$ oder $= \frac{1}{2}(\omega + \omega')$, so bilden je zwei einander zugeordnete Punkte a, b ein Polepaar, und die Beziehung zwischen ihnen wird eine wechselseitige, das Umhüllungsgebilde ihrer Verbindungslinien daher nur noch von der dritten Klasse. Die drei so entstehenden Curven sind aber nach bekannten Sätzen (p. 516) keine anderen, als die drei Cayley'schen Curven bez. zu den drei Curven dritter Ordnung, denen die gegebene Grundcurve als Hesse'sche zugehört. *Unter den soeben definirten Curven 6ter Klasse sind also für $n = 2$ insbesondere die drei* Cayley'*schen Curven, je doppelt zählend, enthalten, welche der Grundcurve in bekannter Weise zugehören.*

Das Vorstehende kann man übrigens von der Betrachtung der Steiner'schen Punktepaare ganz unabhängig machen, indem man ε

*) Vgl. im Folgenden Harnack a. a. O., wo man insbesondere auch das Verhalten dieser Curven in Bezug auf Reell und Imaginär näher erörtert findet.

als continirlich veränderlichen Parameter auffasst ohne Rücksicht darauf, ob derselbe in der Form $\frac{1}{n}(p\omega + q\omega')$ erscheint. Jedem Werthe von ε ist dann eine Curve 6[ter] Klasse in angegebener Weise zugeordnet; *und zwar wird jede Tangente der Ebene von drei Curven des durch Variation von ε entstehenden Systems berührt.* Denn man kann die drei Schnittpunkte einer beliebigen Geraden mit der Grundcurve offenbar auf dreierlei Weisen zu je zweien als zugeordnete combiniren.*)

Statt durch die Relation $a - b \equiv \varepsilon$ kann man natürlich auch jedem Punkte a einen Punkt b durch die Bedingung $a + b \equiv \varepsilon$ zuordnen. *Dann geht die Verbindungslinie je zweier entsprechenden Punkte immer durch denselben Punkt $-\varepsilon$;* diese Art der Zuordnung ist daher von der vorhin besprochenen wesentlich verschieden. Von besonderem Interesse sind hier die Fälle, wo der Punkt $-\varepsilon$ in einem der neun Wendepunkte liegt. Jede durch einen solchen gehende Gerade wird nämlich von der Curve und der harmonischen Geraden des betreffenden Wendepunktes harmonisch getheilt. *Die durch die Relation $a + b = \frac{1}{3}(p\omega + q\omega')$ auf der Curve gegebene paarweise Zuordnung ihrer Punkte wird also algebraisch durch eine Collineation in der Ebene dargestellt, und zwar durch eine perspectivische Transformation, deren Collineationscentrum in einem Wendepunkte liegt und deren Collineationsaxe mit der betreffenden harmonischen Geraden zusammenfällt.***)

Man kann endlich die allgemeinere Beziehung:

$$ma - nb \equiv \varepsilon$$

zwischen Punkten a, b auf der Curve untersuchen. *Jedem Punkte a entsprechen dann n^2 Punkte b und jedem b umgekehrt m^2 Punkte a,* wenn m und n ungerade Primzahlen sind. *Die Verbindungslinien entsprechender Punkte umhüllen hier eine Curve der Klasse* $2(m^2 + mn + n^2)$, was man leicht in analoger Weise beweist, wie das Entsprechende im Falle $m = n = 1$. Man wird dagegen nicht mehr zu algebraischen Curven der Art als Umhüllungsgebilden geführt, wenn man zwei Punkte a, b durch die noch allgemeinere Relation

$$a = \varrho b + \varepsilon$$

*) Dies System von Curven ist dasselbe (nur in dualistisch übertragenem Sinne), welches bei einer Curve mit zwei reellen Zügen auf der Ringfläche die Breitencurven liefert; vgl. die Anmk. auf p. 613. Auf den Zusammenhang desselben mit dem Connexe $Q = (abu)^2 (cau)\, c_x^2 b_x$ werden wir in der VII. Abtheilung dieser Vorlesungen noch zurückkommen.

**) Ausser diesen 9 gibt es 9 andere Collineationen der C_3 in sich, von denen jede durch Combination je zweier der ersteren entsteht; vgl. die Anmerkung auf p. 508. — Von den Wendepunkten ausgehend wird man mit Hülfe der elliptischen Functionen auch einfach zur Betrachtung der sogenannten *Inflexionstripel* geführt; vgl. darüber Gent: Schlömilch's Zeitschrift, Bd. 17.

in Verbindung setzt, wo ϱ eine *beliebige* Constante bedeutet. In jedem dieser Fälle kann man übrigens die Tangenten u_i der entstehenden Enveloppen leicht als elliptische Functionen eines Parameters darstellen; man hat nur aus (5) die Coordinaten x_i und y_i der Punkte mit den Argumenten u und $\varrho u + \varepsilon$ zu berechnen und dann $u_i = (xy)_i$ zu setzen. —

Wir wenden uns nunmehr zu wichtigen Verallgemeinerungen des Vorhergehenden, welche sich auf die Schnittpunkte der C_3 mit beliebigen anderen Curven beziehen Es seien zunächst $u_1, u_2 \ldots u_6$ die Argumente der 6 Schnittpunkte der C_3 mit einem Kegelschnitte. Die Verbindungslinien von u_1 und u_2, u_3 und u_4, u_5 und u_6 mögen die Curve noch in v_1, v_2, v_3 schneiden: Dann müssen nach unserem Fundamentalsatze über Schnittpunktsysteme (vgl. p. 428) die Punkte v_1, v_2, v_3 auf einer Geraden liegen; denn wir haben drei Curven dritter Ordnung, welche 8 Punkte gemein haben und sich also noch in einem 9[ten] Punkte schneiden müssen, und zwar sind dies:

1) die vorliegende C_3
2) die drei Linien $\overline{12}$, $\overline{34}$, $\overline{56}$
3) der Kegelschnitt und die Verbindungslinie von v_1 und v_2.

Demnach besteht wegen (12) die Relation:

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0;$$

und aus unserer Construction der Punkte v_i folgt:

$$u_1 + u_2 + v_1 = 0,$$
$$u_3 + u_4 + v_2 = 0,$$
$$u_5 + u_6 + v_3 = 0,$$

folglich durch Addition:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = 0 \qquad (\text{mod. } \omega, \omega'). \tag{25}$$

Also: *Die Summe der Argumente der sechs Schnittpunkte eines Kegelschnittes mit einer Curve dritter Ordnung ist congruent Null (bei der von uns benutzten Parameterdarstellung).*

In derselben Weise kann man nun weiter fortfahren, und man gelangt so unter fortgesetzter Anwendung der Sätze über Schnittpunktsysteme zu dem Resultate, dass für die Argumente der Schnittpunkte unserer C_3 mit einer C_n die Gleichung besteht:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{3n} = 0.$$

Dies Resultat folgt aber auch direct aus dem Additionstheoreme der elliptischen Functionen, wie wir es in Gleichung (9) ausgesprochen haben. Wir können nämlich die Gleichung einer Curve n^{ter} Ordnung

$\Phi = 0$, insofern es uns nur auf ihre Schnittpunkte mit der C_3 $f = 0$ ankommt, durch eine jede Curve

$$\Phi + Mf = 0$$

ersetzen, wenn M eine homogene Function $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung in x_1, x_2, x_3 ist (vgl. p. 426). Die $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ willkürlichen Coëfficienten von M können wir dann so wählen, dass eben so viele Coëfficienten des Ausdrucks $\Phi + Mf$ Null werden, dass letzterer also nur noch

$$\tfrac{1}{2}(n+1)(n+2) - \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) = 3n$$

Glieder enthält. Nehmen wir zunächst an, dass n gerade, $= 2m$ sei, so können wir insbesondere in $\Phi + Mf$ alle mit $x_3^3, x_3^4, x_3^5 \ldots x_3^n$ multiplicirten Glieder verschwinden lassen; denn die Zahl aller der hier bezeichneten Coëfficienten ist eben gleich $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. Setzen wir dann nach (5):

$$x_1 = s^3, \quad x_2 = s, \quad x_3 = c \,.\, \Delta,$$

wo wieder:

$$s = \sin \operatorname{am} u, \quad c = \cos \operatorname{am} u, \quad \Delta = \Delta \operatorname{am} u,$$

und berücksichtigen, dass:

$$c^2 = 1 - s^2, \quad \Delta^2 = 1 - k^2 s^2,$$

so wird $\Phi + Mf$ von der Form:

$$\begin{aligned}\Phi + Mf = s^{6m} + a_1 s^{6m-2} + a_2 s^{6m-4} + \ldots + a_{3m} \\ + c\Delta \,.\, (b_1 s^{6m-3} + b_2 s^{6m-5} + \ldots + b_{3m-1});\end{aligned}$$

und die Coëfficienten a_i, b_i dieses Ausdrucks setzen sich aus den Coëfficienten von Φ, f und dem Quadrate des Moduls k unserer C_3 zusammen.

Die Form $\Phi + Mf$ muss nun verschwinden, sobald man für u eines der Argumente $u_1, u_2 \ldots u_{3n}$ der $3n$ Schnittpunkte einsetzt. Dies gibt $3n = 6m$ homogene Gleichungen mit $3n$ Coëfficienten. Setzen wir also wieder:

$$s_i = \sin \operatorname{am} u_i, \quad c_i = \cos \operatorname{am} u_i, \quad \Delta_i = \Delta \operatorname{am} u_i,$$

so muss die Gleichung $R = 0$ bestehen, wenn R die folgende Determinante bedeutet: $R =$

$$\begin{vmatrix} s_1^{3n}, & s_1^{3n-2}, & \ldots & 1, & c_1\Delta_1 s_1^{3n-3}, & c_1\Delta_1 s_1^{3n-5}, & \ldots & c_1\Delta_1 \\ s_2^{3n}, & s_2^{3n-2}, & \ldots & 1, & c_2\Delta_2 s_2^{3n-3}, & c_2\Delta_2 s_2^{3n-5}, & \ldots & c_2\Delta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ s_{3n}^{3n}, & s_{3n}^{3n-2}, & \ldots & 1, & c_{3n}\Delta_{3n} s_{3n}^{3n-3}, & c_{3n}\Delta_{3n} s_{3n}^{3n-5}, & \ldots & c_{3n}\Delta_{3n} \end{vmatrix}$$

Bildet man andererseits mit Hülfe der Gleichung (8) und (9) den Ausdruck

$$\sin \operatorname{am} (u_1 + u_2 + \ldots + u_{3n}) = \frac{\pm \varphi(0)}{s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_{3n}},$$

so tritt in dessen Zähler gerade die Determinante R; es wird:

$$\varphi(0) = \frac{R}{S} s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \ldots s_{3n},$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist: $S =$

$$\left| \begin{array}{cccccccc} s_1^{3n-1}, & s_1^{3n-3}, & \ldots & s_1, & c_1 \Delta_1 s_1^{3n-2}, & c_1 \Delta_1 s_1^{3n-4}, & \ldots & c_1 \Delta_1 \\ s_2^{3n-1}, & s_2^{3n-3}, & \ldots & s_2, & c_2 \Delta_2 s_2^{3n-2}, & c_2 \Delta_2 s_2^{3n-4}, & \ldots & c_2 \Delta_2 \\ . & . & \ldots & . & . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . & . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . & . & . & \ldots & . \\ s_{3n}^{3n-1}, & s_{3n}^{3n-3}, & \ldots & s_{3n}, & c_{3n} \Delta_{3n} s_{3n}^{3n-2}, & c_{3n} \Delta_{3n} s_{3n}^{3n-4}, & \ldots & c_{3n} \Delta_{3n} \end{array} \right| .$$

Man überzeugt sich nun leicht (wie in dem Falle $n = 1$), dass die Determinante S im Allgemeinen in Folge der $3n$ Gleichungen $\Phi + Mf = 0$ nicht verschwinden kann; und somit folgt aus (9):

$$\sin \operatorname{am} (u_1 + u_2 + \ldots + u_{3n}) = 0.$$

oder endlich:

$$(26) \qquad u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{3n} = 0 \qquad (\text{mod. } \omega, \omega').$$

In ganz ähnlicher Weise lässt sich die Betrachtung für ein ungerades n durchführen, wie schon das Beispiel der Geraden zeigt, und wie daher hier nicht ausgeführt zu werden braucht. So kommt man zu dem fundamentalen Satze:

Stellt man die Punkte einer Curve dritter Ordnung als elliptische Functionen eines Argumentes dar, der Art, dass dem Argumentenwerthe Null ein Wendepunkt entspricht, so ist die Summe der Argumente für die $3n$ Schnittpunkte mit einer Curve n^{ter} Ordnung immer congruent Null.

Durch diesen Satz wird gleichzeitig der uns schon bekannte bestätigt, dass von den Schnittpunkten einer C_3 mit einer C_n immer einer durch die übrigen bestimmt ist (p. 430); denn das Argument dieses einen drückt sich eben wegen (26) linear durch die der übrigen $3n - 1$ aus.

Wir wollen das letzte Theorem nur noch zur Ableitung einiger auf Berührungskegelschnitte bezüglichen Sätze verwerthen, die uns ebenfalls schon auf anderem Wege bekannt geworden sind (vgl. p. 533).

Soll zunächst ein Kegelschnitt die C_3 in 3 Punkten u_1, u_2, u_3 berühren, so fallen je zwei Schnittpunkte zusammen, und wir haben:

$$2(u_1 + u_2 + u_3) = 0,$$

oder:

$$(27) \qquad u_1 + u_2 + u_3 = \tfrac{1}{2}(p\omega + q\omega').$$

Der Fall $p = 0$, $q = 0$ gibt die Bedingung, dass die drei Punkte auf einer Geraden liegen, und in der That kann eine solche, doppelt zählend, auch als ein berührender Kegelschnitt aufgefasst werden. *Es gibt also nur drei Systeme von eigentlichen Berührungskegelschnitten, und sie unterscheiden sich dadurch, dass zwischen den Argumenten ihrer drei Berührungspunkte bez. die Gleichungen gelten:*

$$(28)\quad u_1 + u_2 + u_3 \equiv \tfrac{1}{2}\omega,\ u_1 + u_2 + u_3 \equiv \tfrac{1}{2}\omega',\ u_1 + u_2 + u_3 \equiv \tfrac{1}{2}(\omega + \omega').$$

Mit Hülfe dieser Relationen verificirt man auch leicht unter Berücksichtigung von (15) die früher für den dritten Berührungspunkt abgeleitete Construction, wenn die beiden anderen gegeben sind. Legt man durch u_1, u_2, u_3 einen anderen Kegelschnitt, der die C_3 noch in v_1, v_2, v_3 schneiden möge, so ist:

$$u_1 + u_2 + u_3 + v_1 + v_2 + v_3 \equiv 0,$$

also wegen (28):

$$v_1 + v_2 + v_3 \equiv \tfrac{1}{2}\omega,\ \tfrac{1}{2}\omega',\ \tfrac{1}{2}(\omega + \omega');$$

und es folgt der von Hesse herrührende Satz:

Legt man durch die drei Berührungspunkte eines Kegelschnittes einen neuen Kegelschnitt, so schneidet derselbe die Curve noch in drei Punkten, in denen ein weiterer demselben Systeme angehöriger Kegelschnitt berührt.

Soll der Kegelschnitt zweimal (in u_1 und u_2) zweipunktig berühren, so haben wir:

$$3(u_1 + u_2) \equiv 0,$$

oder:

$$u_1 + u_2 \equiv \tfrac{1}{3}(p\omega + q\omega').$$

Die beiden Berührungspunkte liegen also nach (16) *stets mit einem Wendepunkte in gerader Linie.*

Wir erwähnen schliesslich noch als letztes Beispiel die Bestimmung des vier Punkten (u_1, u_2, u_3, u_4) der Curve „gegenüberliegenden" Punktes v (vgl. p. 535). Wir nehmen u_1, u_2, u_3, u_4 als Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels, dessen einzelne Curven die C_3 noch in den beweglichen Punkten u_5, u_6 schneiden mögen, dann ist:

$$u_5 + u_6 \equiv -(u_1 + u_2 + u_3 + u_4).$$

Setzen wir also $v \equiv u_1 + u_2 + u_3 + u_4$, so besteht immer die Gleichung

$$u_5 + u_6 + v \equiv 0,$$

d. h. die Verbindungslinien der beweglichen Schnittpunkte gehen alle durch denselben Punkt mit dem Argumente v. In derselben Weise lassen sich überhaupt alle auf Schnittpunktsysteme bezüglichen Untersuchungen, insbesondere also der Restsatz hier durchführen, worauf wir um so weniger eingehen wollen, als uns die entsprechenden

Erörterungen bei höheren Curven noch beschäftigen werden. — Es sei nur noch bemerkt, dass die Sätze über Steiner'sche Polygone eine leichte *Verallgemeinerung* zulassen, indem man die geraden Linien durch Curven n^{ter} Ordnung ersetzt, welche die C_3 in drei beweglichen Schnittpunkten schneiden und also $3n-3$ feste Schnittpunkte mit ihr gemein haben. Man kann also insbesondere statt der Polygonseiten, wie es schon Steiner gethan hat, Kegelschnitte wählen, welche durch drei feste Punkte der Curve hindurchgehen. —

Die Einführung der elliptischen Functionen in die Theorie einer Curve dritter Ordnung knüpften wir oben der Einfachheit wegen an eine kanonische Form ihrer Gleichung; man ist jedoch in der Lage, die betreffenden Rechnungen auch ganz unabhängig vom Coordinatensysteme durchzuführen, wie wir weiterhin noch sehen werden.*) Es soll hier zunächst nur kurz der Gang der dazu führenden Ueberlegungen bezeichnet werden. Wir legen das Coordinatendreieck so, dass die Ecke $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ auf der Curve liegt, was die Kenntniss eines *beliebigen* Punktes derselben (nicht mehr eines Wendepunktes) voraussetzt. Die Gleichung der Curve wird dann von der Form:

$$\varphi_3 + \psi_2 x_3 + \chi_1 x_3^2 = 0,$$

wo φ_3, ψ_2, χ_1 homogene Functionen in x_1, x_2 bez. von der Ordnung ihres Index sind. Wir suchen die Coordinaten der Schnittpunkte eines Strahles des Büschels $x_1 - \lambda x_2 = 0$ mit der Curve. Setzen wir in φ_3, ψ_2, χ_1 demgemäss $x_1 = \lambda x_2$ und lassen die Indices fort, so geht unsere Gleichung über in:

$$x_3^2 \chi + x_1 x_3 \psi + x_1^2 \varphi = 0,$$

und also wird:

$$\frac{x_3}{x_1} = \frac{-\psi \pm \sqrt{\psi^2 - 4\varphi\chi}}{2\chi},$$

oder, wenn ϱ einen willkürlichen Factor bezeichnet:

$$(29) \qquad \begin{cases} \varrho x_1 = 2\chi, \qquad \varrho x_2 = 2\lambda\chi, \\ \varrho x_3 = -\psi \pm \sqrt{\psi^2 - 4\varphi\chi}. \end{cases}$$

Transformiren wir nun die Curve auf ein beliebiges anderes Coordinatendreieck, so werden die neuen Coordinaten lineare Functionen von x_1, x_2, x_3, folglich die Coordinaten eines Punktes der Curve lineare Combinationen der in (29) rechts stehenden Ausdrücke. *Diese Coordinaten sind daher im Allgemeinen ganze Functionen zweiten Grades eines Parameters λ, vermehrt um die Quadratwurzel aus einem Ausdrucke vierten Grades.* Bezeichnen wir also letzteren mit M und

*) Vgl. den folgenden Abschnitt dieser Abtheilung.

jene ganzen Functionen mit G_1, G_2, G_3, so wird für einen Punkt x der Curve:

$$\rho x_i = G_i \pm \alpha_i \sqrt{M}\,; \tag{30}$$

wo die α_i Constante bedeuten. Dass die Function M in allen drei Ausdrücken dieselbe sein muss, ergibt sich auch daraus, dass die Bedingung $u_x = 0$ nur auf eine cubische Gleichung führen darf, was sonst nicht der Fall sein würde. Allerdings erhalten wir auch aus (30) die biquadratische Gleichung:

$$(u_1 G_1 + u_2 G_2 + u_3 G_3)^2 = M\,(u_1 \alpha_1 + u_2 \alpha_2 + u_3 \alpha_3)^2\,;$$

die Gleichungen (30) werden daher, wenn G_1, G_2, G_3 und M von einander unabhängig sind, eine Curve vierter Ordnung darstellen*), welche sich nur (durch Absonderung einer Geraden durch den Scheitel des obigen Strahlbüschels) auf eine Curve dritter Ordnung reducirt, wenn diese biquadratische Gleichung eine von den u_i unabhängige Lösung zulässt. Letzteres ist aber hier in Folge der Gleichungen (29) der Fall; denn setzen wir in ihnen $\chi = 0$ und nehmen das Vorzeichen der Wurzel positiv, so werden die x_i unbestimmt, und die Coëfficienten der u_i in u_x verschwinden identisch.

Um nun elliptische Functionen einzuführen, denken wir uns für λ einen neuen Parameter $\frac{\alpha + \beta\lambda}{\gamma + \delta\lambda}$ gesetzt und die Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ so bestimmt, dass die Function M abgesehen von einem constanten Factor in $\lambda\,(1-\lambda)\,(1-k^2\lambda)$ übergeht. Dann sind $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$, $\lambda = 1$, $\lambda = \frac{1}{k^2}$ die vier Wurzeln von $M = 0$; d. h. in dem Strahlbüschel $x_1 - \lambda x_2 = 0$ sind für die Strahlen $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ zwei der vom Büschelscheitel an die Curve gehenden Tangenten gewählt; denn den Werthen $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ entspricht dann vermöge (29) oder (30) nur je *ein* Punkt der Curve. Dies vorausgesetzt, sei nun:

$$\sqrt{\lambda} = \sin\operatorname{am} u\,, \quad \sqrt{1-\lambda} = \cos\operatorname{am} u\,, \quad \sqrt{1-k^2\lambda} = \Delta\operatorname{am} u\,,$$

so dass die Gleichungen (30) übergehen in:

$$\rho x_i = \varphi_i\,(\sin^2\operatorname{am} u) + \beta_i \frac{d\sin^2\operatorname{am} u}{du}\,, \tag{31}$$

wo jetzt die β_i Constante, die φ_i ganze rationale Functionen zweiten Grades ihres Arguments sind, während das zu einem Punkte x gehörige Argument selbst definirt ist durch:

$$u = \tfrac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\lambda}} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda\,(1-\lambda)\,(1-k^2\lambda)}} = \int_0^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{(1-\mu^2)\,(1-k^2\mu^2)}}\,. \tag{32}$$

*) Jedoch eine solche mit zwei Doppelpunkten ($p = 1$), wie wir später sehen werden.

In den Gleichungen (31) ist gleichzeitig die Willkürlichkeit verschwunden, welche früher in dem zweifelhaften Vorzeichen der Wurzel lag; ein Paar auf demselben Strahle des Büschels $x_1 - \lambda x_2 = 0$ gelegener Punkte wird jetzt durch die Argumente u und $-u$ unterschieden.

Ausgehend von den Gleichungen (31) weist man man nun *die Identität der früheren Sätze über Schnittpunktsysteme auf einer Curve dritter Ordnung mit dem Additionstheoreme der elliptischen Functionen* am einfachsten nach, indem man statt der Functionen s, c, Δ die sogenannten H-Functionen einführt und dann für letztere ein Theorem benutzt, aus dem das früher verwendete Additionstheorem für sin am wieder als specieller Fall abgeleitet werden kann. Ersteres geschieht mit Hülfe des aus der Theorie jener Functionen bekannten Satzes von Hermite*):

Jede doppelt periodische Function von der Form $F(s^2) + c\Delta f(s^2)$, wo F und f ganze Functionen bez. vom Grade n und $n-2$ in s^2 sind, lässt sich darstellen als Quotient eines Productes von H*-Functionen, dividirt durch eine Potenz einer* Θ*-Function; und zwar ist:*

$$F(s^2) + \frac{d \sin^2 \operatorname{am} u}{du} f(s^2) = C \cdot \frac{\mathrm{H}(u-\alpha_1) \, . \, \mathrm{H}(u-\alpha_2) \ldots \mathrm{H}(u-\alpha_{2n})}{\Theta^{2n}(u)},$$

wo C eine Constante bedeutet und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n}$ die Verschwindungswerthe des Argumentes für die links stehende Function sind. Zwischen letzteren besteht dabei immer die Relation:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2n} \equiv 0 .$$

Selbstverständlich hätten wir auch schon bei unserer früheren Darstellung die Einführung von s, c, Δ ganz vermeiden und dafür direct H-Functionen benutzen können, wodurch die Berechnung von $\sin \operatorname{am}(u_1 + u_2 + \ldots + u_{3n})$ erspart wäre; immerhin ist jedoch in den einfachsten Fällen das Rechnen mit den gebräuchlicheren Functionen s, c, Δ übersichtlicher.

Unter Benutzung des angeführten Satzes erhalten wir nun statt der Gleichungen (31), wenn wir für $\varrho \Theta^1(u)$ wieder ϱ schreiben, Formeln der folgenden Art:

$$\varrho x_i = C_i \, . \, \mathrm{H}(u-\xi_i) \, . \, \mathrm{H}(u-\eta_i) \, . \, \mathrm{H}(u-\zeta_i) \, . \, \mathrm{H}(u-\vartheta_i),$$

wobei:
$$\xi_i + \eta_i + \zeta_i + \vartheta_i \equiv 0 .$$

Es sind hier drei der Grössen $\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \vartheta_i$, sagen wir die drei ersteren, die Argumentwerthe u für die Schnittpunkte der Linie $x_i = 0$ mit der Grundcurve. Nach unsern früheren Ueberlegungen muss es aber einen Werth von u geben, für den die drei Grössen ϱx_i unbestimmt werden; und deshalb können wir setzen:

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3 = \vartheta .$$

---

*) Vgl. Hermite a. a. O. p. 66.

Lassen wir dann auch den Factor $\mathrm{H}(u - \vartheta)$ in ϱ eingehen, so wird:

(33) $$\varrho x_i = C_i \mathrm{H}(u - \xi_i) \,.\, \mathrm{H}(u - \eta_i) \,.\, \mathrm{H}(u - \zeta_i),$$

wo nun:

$$\xi_1 + \eta_1 + \zeta_1 = \xi_2 + \eta_2 + \zeta_2 = \xi_3 + \eta_3 + \zeta_3 \equiv - \vartheta .$$

Durch eine lineare Transformation des Arguments:

(34) $$u = v + \tfrac{1}{3} \vartheta$$

können wir aber immer erreichen, dass auf der rechten Seite dieser Relationen Null statt $-\vartheta$ steht; denn alsdann sind die Verschwindungswerthe der x_i gegeben durch die Werthe

$$v = \xi_i - \tfrac{1}{3}\vartheta = \xi_i', \quad v = \eta_i - \tfrac{1}{3}\vartheta = \eta_i', \quad v = \zeta_i - \tfrac{1}{3}\vartheta = \zeta_i';$$

und nach dem Hermite'schen Satze ist wieder:

(35) $$\xi_i' + \eta_i' + \zeta_i' \equiv 0 .$$

— Wir haben nun die Schnittpunkte der Curve dritter Ordnung mit einer Curve n^{ter} Ordnung:

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0$$

zu betrachten. Führen wir in Φ mittelst der Gleichungen (33) die H-Functionen ein, so erhalten wir einen Ausdruck, der durch Multiplication mit $\left(\frac{\mathrm{H}(u-\vartheta)}{\Theta^4(u)}\right)^n$ zu einer doppelt periodischen Function werden muss, da jedes Product ϱx_i nach (33) durch Multiplication mit $\frac{\mathrm{H}(u-\vartheta)}{\Theta^4(u)}$ in eine solche übergeht; und diese doppelt periodische Function hat $3n$ Verschwindungswerthe:

$$u = u_1, \quad u = u_2, \ldots u = 3n,$$

entsprechend den $3n$ Schnittpunkten von $\Phi = 0$ mit der Grundcurve, und einen n-fachen Verschwindungswerth $u = \vartheta$, entsprechend dem Factor $(\mathrm{H}(u - \vartheta))^n$. Wenden wir also wieder den Hermite'schen Satz an, so muss sich Φ in folgender Form darstellen lassen:

$$\varrho^n \,.\, \Phi(x_1, x_2, x_3) \left(\frac{\mathrm{H}(u-\vartheta)}{\Theta^4(u)}\right)^n = \frac{C' \,.\, \mathrm{H}(u-u_1) \,.\, \mathrm{H}(u-u_2) \ldots \mathrm{H}(u-u_3\;) \,.\, \mathrm{H}^n(u-\vartheta)}{\Theta^{4n}(u)},$$

wo wieder:

(36) $$u_1 + u_2 + \ldots + u_{3n} \equiv - \vartheta n .$$

Die letztere Relation erscheint wieder, wie in Gleichung (35) in der Form:

(37) $$v_1 + v_2 + \ldots + v_{3n} \equiv 0,$$

wenn wir mittelst (34) ein neues Argument v statt u einführen. Es ist übrigens leicht zu sehen, dass *die wirkliche Ausführung letzterer Transformation, d. i. die Bestimmung der Constanten ϑ auf die Bestimmung*

eines Wendepunktes der Grundcurve zurückkommt. Für die Schnittpunkte einer beliebigen Geraden mit der letzteren nämlich folgt aus (36):

$$u_1 + u_2 + u_3 = -\vartheta,$$

und hieraus für einen Wendepunkt u:

$$3u = -\vartheta \quad \text{oder} \quad u = -\tfrac{1}{3}\vartheta + \tfrac{1}{3}P,$$

wenn P eine lineare Combination von Vielfachen der Perioden bedeutet. Die Argumente der Wendepunkte sind also bekannt, sobald der Werth der Constanten ϑ bekannt ist. Gleichzeitig erkennt man, dass durch die Transformation (34) einem Wendepunkte der Argumentwerth $v \equiv 0$ beigelegt ist, was mit unseren obigen Festsetzungen bei Benutzung der kanonischen Form übereinstimmt (p. 609). Wie man nun in der That die Grösse ϑ ganz allgemein in ihrer Abhängigkeit von den Coëfficienten der Gleichung der Grundcurve und von dem Scheitel des bei der Parameterdarstellung benutzten Strahlbüschels bestimmen kann, werden wir erst später sehen.*)

Wir sind somit, unabhängig von einer kanonischen Form, wieder zu folgendem Satze geführt:

Die Coordinaten der Punkte einer Curve dritter Ordnung ohne Doppelpunkt lassen sich als elliptische Functionen eines Arguments darstellen; und dann ist die Summe der Argumente ihrer Schnittpunkte mit einer beliebigen anderen Curve congruent Null, vorausgesetzt, dass dem Argumente Null ein Wendepunkt zugehört. —

Durch diesen Satz ist eine Eigenschaft der Curven dritter Ordnung ausgesprochen, welche in gleicher Weise allen Curven vom Geschlechte $p = 1$ zukommt, wie spätere allgemeinere Untersuchungen lehren werden. Wir werden dann auch weiterhin erkennen, dass jede Curve vom Geschlechte $p = 1$ eindeutig in eine Curve dritter Ordnung durch algebraische Substitutionen übergeführt werden kann.

VIII. Die typische Darstellung einer ternären cubischen Form und die allgemeine Parameterdarstellung der Curve dritter Ordnung.

Die allgemeinste Herstellung der Parameterdarstellung für die Curven dritter Ordnung, die im Vorstehenden nicht wirklich durchgeführt wurde, erfordert speciellere Untersuchungen aus der Theorie der ternären cubischen Formen, die hier nur noch so weit mitgetheilt sein mögen, als es zur Aufstellung der Schlussformeln erforderlich ist. Es sind dabei etwas weitläufigere Rechnungen nöthig, welche wir hier zuerst zusammenstellen, und welche die Erreichung der sogenannten typischen Darstellung der ternären Grundform $f = a_x^3$ zum Zwecke

*) Vgl. den Schluss des folgenden Abschnittes, p. 650 ff.

haben; unter Benutzung der aufzustellenden Formeln gestaltet sich dann jedoch die Einführung der elliptischen Functionen sehr einfach.

Wir knüpfen zunächst wieder an die Zwischenform:

$$(1) \qquad N = (a\alpha u)\, a_x^2 \alpha_x^2 = N_x^4 u_n ,$$

an, welche wir als Combinante des Systems $\varkappa f + \lambda \Delta$ erkannten. Man ersieht sofort (unter Berücksichtigung von Gleichung (22) auf p. 552), dass die sogleich zu benutzende Relation besteht:

$$(2) \qquad \delta N = 0 ,$$

wenn mit dem Buchstaben δ wieder der bekannte durch $\delta f = \Delta$ definirte Process bezeichnet wird (p. 551). Die Gleichung (2) ist aber auch eine Folge des allgemeinen Satzes, dass *für jede Combinante* Π *identisch* $\delta \Pi = 0$ *ist.* Eine Combinante Π ist nämlich definirt durch die Bedingung

$$(3) \qquad \Pi(\varkappa a + \lambda \alpha) = M \,.\, \Pi(a) .$$

Es sei nun nach Potenzen von $\varkappa$, λ geordnet:

$$(4) \qquad M = M_0 \varkappa^\nu + M_1 \varkappa^{\nu - 1} \lambda + \ldots ,$$

so hat man zunächst für $\lambda = 0$, $\varkappa = 1$:

$$(5) \qquad \Pi(a) = M_0 \,.\, \Pi(a) ,$$

also $M_0 = 1$. Vergleicht man aber beiderseits die Coëfficienten von $\varkappa^{\nu-1}\lambda$, so erhält man nach dem Taylor'schen Satze:

$$\Sigma \frac{\partial \Pi(a)}{\partial a_{ikh}} \alpha_{ikh} = M_1 \Pi(a) \quad \text{oder} \quad \delta \Pi = M_1 \Pi .$$

Nun ist $\delta\Pi$ nur um zwei Grade höher in den Coëfficienten von f als Π, daher muss M_1 eine Invariante von f sein, welche vom zweiten Grade in den a ist. Eine solche gibt es aber nicht (p. 546); daher hat man $M_1 = 0$, und also auch $\delta \Pi = 0$. Der somit bewiesene Satz ist umkehrbar, d. h. es besteht auch der folgende:

Jede Form Π, *für welche die Form* $\delta \Pi$ *verschwindet, ist eine Combinante.*

Ist nämlich $\delta \Pi = 0$, so verschwindet auch die entsprechende Bildung $(\delta \Pi)_{\varkappa\lambda}$, d. h. die Form $\delta\Pi$ gebildet für $\varkappa f + \lambda \Delta$ statt für f. Es ist aber (nach p. 560):

$$(\delta \Pi)_{\varkappa\lambda} = G_1 \frac{\partial \Pi_{\varkappa\lambda}}{\partial \lambda} - G_2 \frac{\partial \Pi_{\varkappa\lambda}}{\partial \varkappa} ,$$

und man hat daher für $\Pi_{\varkappa\lambda}$ die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial G}{\partial \varkappa} \frac{\partial \Pi_{\varkappa\lambda}}{\partial \lambda} - \frac{\partial G}{\partial \lambda} \frac{\partial \Pi_{\varkappa\lambda}}{\partial \varkappa} = 0 .$$

Dieselbe gibt integrirt:

$$(6) \qquad \Pi_{\varkappa\lambda} = F(G) ,$$

wo F eine willkürliche Function bedeutet. Da aber $\Pi_{\varkappa\lambda}$ eine ganze homogene rationale Function von $\varkappa$, λ ist, so kann man nur haben: $\Pi_{\varkappa\lambda} = C \,.\, G^\varrho$, wo ϱ eine ganze Zahl, C eine von $\varkappa$, λ unabhängige Grösse ist. Setzt man nun $\varkappa = 1$, $\lambda = 0$, so wird $G = 1$, also $C = \Pi$. Die Gleichung (6) verwandelt sich daher in:

$$\Pi_{\varkappa\lambda} = G^\varrho \,.\, \Pi, \tag{7}$$

d. h. Π ist eine Combinante, q. e. d. Zugleich erkennt man hieraus, dass *der Factor M in* (3) *stets eine Potenz des Ausdrucks* $G = \varkappa^4 - S\varkappa^2\lambda^2 - \frac{4}{3}T\varkappa\lambda^3 - \frac{1}{12}S^2\lambda^4$ *ist.* Der Umstand, dass in der Entwicklung (4) das zweite Glied fehlen muss, wird hier dadurch bestätigt, dass in G, mithin auch in jeder Potenz von G, das zweite Glied fehlt. —

Neben N betrachten wir nun die beiden folgenden Zwischenformen, welche ebenfalls von der vierten Ordnung und der ersten Klasse sind:

$$(8)\quad \begin{aligned} L &= b_n\, N_x{}^3 b_x\, (bNu) = L_x{}^4 u_l \\ M &= \beta_n N_x{}^3 \beta_x\, (\beta N u) = M_x{}^4 u_m \,. \end{aligned}$$

Wegen (2) und wegen $\delta\Delta = \frac{1}{2} Sf$ stehen dieselben offenbar in der Beziehung zu einander, dass:

$$\delta L = M, \quad \delta M = \tfrac{1}{2} S \,.\, L \,. \tag{9}$$

Drücken wir nun L und M in Symbolen von f und Δ aus. Es entsteht L aus

$$N_x{}^3 N_y u_n = \tfrac{1}{2}(a\alpha u)\, a_x\alpha_x\, (a_x\alpha_y + a_y\alpha_x)\,,$$

wenn man die y durch die Determinanten der u und b, u aber durch b ersetzt und mit b_x multiplicirt. Demnach ist:

$$L = \tfrac{1}{2}(a\alpha b)\, a_x\alpha_x b_x \left\{ a_x (b\alpha u) + \alpha_x (bau) \right\}\,.$$

Von den beiden Theilen rechts kommt der erste auf den zweiten zurück, wenn man a, b vertauscht und die halbe Summe des alten und neuen Ausdrucks bildet. Dann ist:

$$\begin{aligned} (a\alpha b)(b\alpha u)\, a_x{}^2\alpha_x b_x &= \tfrac{1}{2}(a\alpha b)\, a_x\alpha_x b_x \left\{(b\alpha u)\, a_x - (a\alpha u)\, b_x\right\} \\ &= \tfrac{1}{2}(a\alpha b)\, a_x\alpha_x b_x \left\{(bau)\, \alpha_x - (a\alpha b)\, u_x\right\} \\ &= \tfrac{1}{2}(ab\alpha)(abu)\, \alpha_x{}^2 a_x b_x - \tfrac{1}{12} u_x \,.\, Sf, \end{aligned}$$

denn nach p. 552 ist $(ab\alpha)^2 a_x b_x \alpha_x = \frac{1}{3}\delta\Delta = \frac{1}{6}Sf$. Tragen wir dies in den obigen Ausdruck für L ein, so wird:

$$L = \tfrac{3}{4}(abu)(ab\alpha)\, a_x b_x \alpha_x{}^2 - \tfrac{1}{24} Sf \,.\, u_x \,. \tag{10}$$

Ganz ebenso ist: $M = \frac{1}{2}(a\alpha\beta)\, a_x\alpha_x\beta_x \left\{(\beta\alpha u)\, a_x + (\beta a u)\, \alpha_x\right\}$; aber wenn man hier mit dem zweiten Gliede ähnlich verfährt, wie soeben mit dem ersten von L, so hat man:

$$(a\alpha\beta)(\beta a u)a_x\alpha_x^2\beta_x = -\tfrac{1}{2}(a\alpha\beta)(u\alpha\beta)a_x^2\alpha_x\beta_x + \tfrac{1}{2}u_x(a\alpha\beta)^2 a_x\alpha_x\beta_x.$$

Der Factor von u_x ist der bei der Entwicklung von $\Delta_{\varkappa\lambda}$ mit Δ_3 bezeichnete (p. 558), und hat also den Werth $\frac{1}{12}S^2 f - \frac{1}{3}T\Delta$. Trägt man alles in den Ausdruck von M ein, so wird:

$$(11) \qquad M = -\tfrac{3}{4}(\alpha\beta a)(\alpha\beta u)a_x^2\alpha_x\beta_x + \tfrac{1}{24}u_x(2Tf - S\Delta).$$

Wir müssen nun zunächst gewisse simultane Bildungen aus den Formen f, Δ, L, M, N berechnen, die zu verschiedenen Gruppen von Gleichungen Veranlassung geben. Zur Abkürzung wollen wir dabei gelegentlich die Zwischenformen nur durch die betreffenden kleinen Buchstaben bezeichnen, d. h. die symbolischen Factoren L_x^4, M_x^4, N_x^4 fortlassen, so dass wir schreiben

$$u_l \text{ statt } L_x^4 u_l, \quad u_m \text{ statt } M_x^4 u_m, \quad u_n \text{ statt } N_x^4 u_n,$$

wo dann die l, m, n wirkliche Grössen sind, indem:

$$l_i = \frac{\partial L}{\partial u_i}, \qquad m_i = \frac{\partial M}{\partial u_i}, \qquad n_i = \frac{\partial N}{\partial u_i}.$$

Die zu berechnenden Bildungen sind dann folgende*):

1) $a_x^2 a_l$, $\alpha_x^2\alpha_l$, $a_x^2 a_m$, $\alpha_x^2\alpha_m$, $a_x^2 a_n$, $\alpha_x^2\alpha_n$;
2) $a_x a_l^2$, $\alpha_x\alpha_l^2$, $a_x a_m^2$, $\alpha_x\alpha_m^2$, $a_x a_n^2$, $\alpha_x\alpha_n^2$;
3) $a_x a_l a_m$, $a_x a_m a_n$, $a_x a_n a_l$, $\alpha_x\alpha_l\alpha_m$, $\alpha_x\alpha_m\alpha_n$, $\alpha_x\alpha_n\alpha_l$;
4) (lmx), (mnx), (nlx), (lmn).

Für das System 1) haben wir nach (10) und (11):

$$(12) \quad \begin{cases} c_x^2 c_l = \tfrac{3}{4}(abc)(ab\alpha)a_x b_x\alpha_x^2 c_x^2 - \tfrac{1}{24}Sf^2 \\ \gamma_x^2\gamma_l = \tfrac{3}{4}(ab\gamma)(ab\alpha)a_x b_x\alpha_x^2\gamma_x^2 - \tfrac{1}{24}S\Delta f \\ c_x^2 c_m = -\tfrac{3}{4}(\alpha\beta a)(\alpha\beta c)\alpha_x\beta_x a_x^2 c_x^2 + \tfrac{1}{24}f(2Tf - S\Delta) \\ \gamma_x^2\gamma_m = -\tfrac{3}{4}(\alpha\beta a)(\alpha\beta\gamma)\alpha_x\beta_x a_x^2\gamma_x^2 + \tfrac{1}{24}\Delta(2Tf - S\Delta). \end{cases}$$

Die ersten Glieder rechts in der zweiten und dritten Gleichung sind direct die früher bez. mit φ, φ'' bezeichneten Formen (p. 574), lassen sich also durch f, Δ und die Combinante ψ ausdrücken (p. 575). Das erste Glied rechts der ersten Gleichung ist wegen der Vertauschbarkeit von a, b, c:

$$= \tfrac{1}{4}(abc)\alpha_x^2 a_x b_x c_x \left\{(ab\alpha)c_x - (ac\alpha)b_x - (cb\alpha)a_x\right\}$$
$$= \tfrac{1}{4}(abc)^2 a_x b_x c_x \cdot \alpha_x^3 = \tfrac{1}{4}\Delta^2.$$

Ebenso findet man das erste Glied auf der rechten Seite der letzten Gleichung wegen der Vertauschbarkeit von α, β, γ gleich $-\frac{1}{4}\Delta_3 f$,

*) Vgl. im Folgenden: Clebsch und Gordan, Math. Annalen, Bd. 1, p. 56 ff. Hier sind die Zwischenformen L und M zuerst eingeführt und die Formeln für die typische Darstellung abgeleitet.

wo Δ_3 nach p. 559 gleich $\frac{1}{12} S^2 f - \frac{1}{3} T \Delta$ zu setzen ist. Die Gleichungen (12) gehen daher in folgende über:

$$\begin{aligned}
a_x^2 a_l &= \tfrac{1}{4}\Delta^2 - \tfrac{1}{24} S f^2 \\
\alpha_x^2 \alpha_l &= -\psi - \tfrac{1}{12} T f^2 + \tfrac{1}{12} S \Delta f \\
a_x^2 a_m &= \psi - \tfrac{1}{12} T f^2 + \tfrac{1}{12} S \Delta f \\
\alpha_x^2 \alpha_m &= \tfrac{1}{6} T \Delta f - \tfrac{1}{48} S^2 f^2 - \tfrac{1}{24} S \Delta^2 .
\end{aligned}$$

Die jetzt rechts stehenden Ausdrücke lassen sich aber sehr einfach durch die zweiten Differentialquotienten der binären biquadratischen Form $G(\varkappa, \lambda)$ ausdrücken, wenn man darin $\varkappa = \Delta$, $\lambda = -f$ setzt und die auf p. 560 gegebenen Werthe von G_{11}, G_{12}, G_{22} berücksichtigt. Setzt man zur Abkürzung:

$$\Gamma = G(\Delta, -f), \quad \Gamma_i = G_i(\Delta, -f), \quad \Gamma_{ik} = G_{ik}(\Delta, -f), \tag{13}$$

und fügt die evidenten Gleichungen $a_x^2 a_n = 0$, $\alpha_x^2 \alpha_n = 0$ hinzu, so hat man also *für die unter* 1) *genannten Bildungen die Werthe:*

$$\left\{\begin{aligned}
a_x^2 a_l &= \tfrac{1}{4}\Gamma_{11}, & \alpha_x^2 \alpha_l &= \tfrac{1}{4}\Gamma_{12} - \psi, \\
a_x^2 a_m &= \tfrac{1}{4}\Gamma_{12} + \psi, & \alpha_x^2 \alpha_m &= \tfrac{1}{4}\Gamma_{22}, \\
a_x^2 a_n &= 0, & \alpha_x^2 \alpha_n &= 0.
\end{aligned}\right. \tag{14}$$

Wir gehen zur Betrachtung der Bildungen 2) über. Es ist offenbar:

$$a_x a_n^2 = \Sigma\Sigma f_{ik} n_i n_k = \begin{vmatrix}
f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_1 & \Delta_1 \\
f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_2 & \Delta_2 \\
f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_3 & \Delta_3 \\
f_1 & f_2 & f_3 & 0 & 0 \\
\Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & 0 & 0
\end{vmatrix},$$

oder, wenn man die f_i zerstört:

$$= \begin{vmatrix}
f_{11} & f_{12} & f_{13} & 0 & \Delta_1 \\
f_{21} & f_{22} & f_{23} & 0 & \Delta_2 \\
f_{31} & f_{32} & f_{33} & 0 & \Delta_3 \\
0 & 0 & 0 & -f & -\Delta \\
\Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & -\Delta & 0
\end{vmatrix} = \tfrac{1}{2} f\varphi - \tfrac{1}{6}\Delta^3,$$

oder, wenn man wieder φ durch ψ, Δ, f ausdrückt (p. 575):

$$\begin{aligned}
a_x a_n^2 &= -\tfrac{1}{6}\Delta^3 + \tfrac{1}{2} f\left(-\tfrac{4}{3}\psi - \tfrac{1}{9} T f^2 + \tfrac{1}{6} S \Delta f\right) \\
&= -\tfrac{1}{6}\Gamma_1 - \tfrac{2}{3}\psi f,
\end{aligned} \tag{15}$$

wo wieder Γ_1 durch (13) definirt ist. Wendet man auf diese Gleichung den δ-Process an und berücksichtigt, dass nach obigem Satze über Combinanten (p. 632) $\delta N = 0$ und $\delta\psi = 0$, so findet man weiter:

$$\alpha_x \alpha_n^2 = -\tfrac{1}{6}\Gamma_2 - \tfrac{2}{3}\Delta\psi. \tag{16}$$

Bei der Berechnung von $a_x a_l^2$, $\alpha_x \alpha_l^2$, $a_x a_m^2$, $\alpha_x \alpha_m^2$, finden wir zugleich die Formen $a_x a_l a_m$ und $\alpha_x \alpha_l \alpha_m$, und zwar mittelst sehr einfacher symbolischer Rechnungen. Es ist nach (10) und nach (40), p. 559:

$$(17) \qquad a_x a_l^2 = \tfrac{3}{4}(bc\alpha)(bca)\, a_x b_x c_x \alpha_x^2 a_l - \tfrac{1}{4}\Delta_1 a_x^2 a_l .$$

Vertauschen wir im ersten Gliede rechts die Symbole a, c oder a, b und schreiben statt dieses Gliedes die Summe der entstehenden Ausdrücke, dividirt durch 3, so tritt an Stelle von $3(bc\alpha)\, a_l$ das Aggregat:

$$(bc\alpha)\, a_l - (ac\alpha)\, b_l - (ba\alpha)\, c_l = (abc)\, \alpha_l ,$$

und es ist also nach (14):

$$(18) \qquad a_x a_l^2 = -\tfrac{1}{4}\Delta\psi - \tfrac{1}{16}\Delta_1 \Gamma_{11} + \tfrac{1}{16}\Delta\Gamma_{12} .$$

Vertauscht man ferner in (17) die griechischen mit den lateinischen Buchstaben, so verwandelt sich l in $-m$, Δ_1 in Δ_2, f in Δ, und man hat also:

$$(19) \qquad \begin{aligned} \alpha_x \alpha_m^2 &= -\tfrac{3}{4}(\beta\gamma a)(\beta\gamma\alpha)\, \alpha_x \beta_x \gamma_x a_x^2 \alpha_m + \tfrac{1}{4}\Delta_2 \alpha_x^2 \alpha_m \\ &= -\tfrac{1}{4}\Delta_3 \,.\, a_x^2 a_m + \tfrac{1}{4}\Delta_2 \alpha_x^2 \alpha_m \\ &= -\tfrac{1}{4}\Delta_3 \psi - \tfrac{1}{16}\Delta_3 \Gamma_{12} + \tfrac{1}{16}\Delta_2 \Gamma_{22} . \end{aligned}$$

Aus (17) erhält man sogleich $a_x a_l a_m$, wenn man rechts l durch m ersetzt; man findet dann:

$$(20) \qquad \begin{aligned} a_x a_l a_m &= \tfrac{1}{4}\Delta \alpha_x^2 \alpha_m - \tfrac{1}{4}\Delta_1 a_x^2 a_m \\ &= -\tfrac{1}{4}\Delta_1 \psi - \tfrac{1}{16}\Delta_1 \Gamma_{12} + \tfrac{1}{16}\Delta\Gamma_{22} . \end{aligned}$$

Ersetzt man hingegen in (19) ein m durch l, so findet man:

$$(21) \qquad \begin{aligned} \alpha_x \alpha_l \alpha_m &= -\tfrac{1}{4}\Delta_3 a_x^2 a_l + \tfrac{1}{4}\Delta_2 \alpha_x^2 \alpha_l \\ &= -\tfrac{1}{4}\Delta_2 \psi - \tfrac{1}{16}\Delta_3 \Gamma_{11} + \tfrac{1}{16}\Delta_2 \Gamma_{12} . \end{aligned}$$

Um endlich $a_x a_m^2$, $\alpha_x \alpha_l^2$ zu finden, unterwirft man $a_x a_l^2$, $\alpha_x \alpha_m^2$ dem δ-Processe, wo dann neben den bekannten Functionen $a_x a_l a_m$, $\alpha_x \alpha_l \alpha_m$ die gesuchten entstehen. Dabei hat man die folgenden früher abgeleiteten Formeln zu benutzen (p. 552 ff.):

$$\delta f = \Delta, \quad \delta\Delta = 3\Delta_1 = \tfrac{1}{2} Sf, \quad \delta\Delta_1 = 2\Delta_2 + \tfrac{1}{2} S\Delta, \quad \delta\Delta_2 = \Delta_3 + S\Delta_1$$
$$\delta\Delta_3 = \tfrac{3}{2} S\Delta_2, \quad \delta S = T, \quad \delta T = S^2, \quad \delta\psi = 0 .$$

Man findet alsdann zunächst:

$$(22) \qquad \begin{cases} \delta\Gamma_{11} = \delta(\Delta^2 - \tfrac{1}{6} Sf^2) & = 2\,\Gamma_{12} \\ \delta\Gamma_{12} = \delta(\tfrac{1}{3} S\Delta f - \tfrac{1}{3} Tf^2) & = \Gamma_{22} + \tfrac{1}{2} S\Gamma_{11} \\ \delta\Gamma_{22} = \delta(-\tfrac{1}{6} S\Delta^2 + \tfrac{2}{3} T\Delta f - \tfrac{1}{12} S^2 f^2) & = S \,.\, \Gamma_{12} . \end{cases}$$

und also wegen (9):

$$\delta a_x a_l^2 = \alpha_x a_l^2 + 2 a_x a_l a_m$$
$$= -\tfrac{3}{4}\Delta_1\psi - \tfrac{1}{8}\Delta_2\Gamma_{11} + \tfrac{1}{16}\Delta_1\Gamma_{12} + \tfrac{1}{16}\Delta\Gamma_{22},$$
$$\delta \alpha_x \alpha_m^2 = \tfrac{1}{2} S a_x a_m^2 + S \alpha_x \alpha_l \alpha_m$$
$$= -\tfrac{3}{8} S\Delta_2\psi - \tfrac{1}{32} S\Delta_2\Gamma_{12} - \tfrac{1}{32}\Delta_1 S\Gamma_{11} + \tfrac{1}{16} S\Delta_1\Gamma_{22}.$$

In diesen Formeln wollen wir noch statt der Γ_{ik} die Formen Δ_i einführen (p. 559) mittelst der Gleichungen:

$$\Gamma_{11} = \Delta^2 - f\Delta_1, \quad \Gamma_{12} = \Delta\Delta_1 - f\Delta_2, \quad \Gamma_{22} = \Delta\Delta_2 - f\Delta_3;$$

dann geben dieselben wegen (20) und (21) die beiden gesuchten Bildungen bez. in der Gestalt:

$$(23)\quad \begin{aligned} \alpha_x \alpha_l^2 &= -\tfrac{1}{4}\Delta_1\psi + \tfrac{1}{16} f\,(\Delta_3\Delta - \Delta_1\Delta_2) + \tfrac{3}{16}\Delta\,(\Delta_1^2 - \Delta\Delta_2),\\ a_x a_m^2 &= -\tfrac{1}{4}\Delta_2\psi + \tfrac{1}{16}\Delta\,(\Delta_3\Delta - \Delta_1\Delta_2) + \tfrac{3}{16} f\,(\Delta_2^2 - \Delta\Delta_3).\end{aligned}$$

Diese Formen lassen sich übersichtlicher schreiben, wenn man noch die zweiten Differentialquotienten von $S_{\varkappa\lambda}$ nach $\varkappa$ und λ, dividirt durch 12, und die dritten Differentialquotienten von $G(\varkappa, \lambda)$, dividirt durch 24, für $\varkappa = \Delta$, $\lambda = -f$ einführt, d. h. die Ausdrücke (p. 561):

$$(24)\quad S_{11} = 6(\Delta_1^2 - \Delta\Delta_2), \quad S_{12} = 3(\Delta_1\Delta_2 - \Delta\Delta_3), \quad S_{22} = 6(\Delta_2^2 - \Delta_1\Delta_3).$$
$$(25)\quad \Gamma_{111} = \Delta, \quad \Gamma_{112} = \Delta_1, \quad \Gamma_{122} = \Delta_2, \quad \Gamma_{222} = \Delta_3.$$

Alsdann erhält man unter Hinzunahme der Gleichungen (15), (16), (18) und (19) *für die unter* 2) *genannten Formen folgende Darstellungen:*

$$(26)\quad \begin{cases} a_x a_n^2 = -\tfrac{1}{6}\Gamma_1 \quad -\tfrac{2}{3}\psi f, \qquad \alpha_x \alpha_n^2 = -\tfrac{1}{6}\Gamma_2 \quad -\tfrac{2}{3}\psi\Delta,\\ a_x a_l^2 = -\tfrac{1}{4}\Gamma_{111}\psi + \tfrac{1}{96} S_{11} f, \quad \alpha_x \alpha_m^2 = -\tfrac{1}{4}\Gamma_{222}\psi + \tfrac{1}{96} S_{22}\Delta,\\ \qquad a_x a_m^2 = -\tfrac{1}{4}\Gamma_{222}\psi + \tfrac{1}{32} S_{22} f - \tfrac{1}{48} S_{12}\Delta,\\ \qquad \alpha_x \alpha_l^2 = -\tfrac{1}{4}\Gamma_{112}\psi - \tfrac{1}{48} S_{12} f + \tfrac{1}{32} S_{11}\Delta.\end{cases}$$

Von den oben unter 3) genannten Bildungen haben wir schon zwei in den Gleichungen (20) und (21) gefunden. Von den vier übrigen bestimmt man zunächst $a_x a_n a_l$ dadurch, dass man in (10) die u_i durch c_i ersetzt und mit $c_x\,(c\,a\,\alpha)\,a_x^2\,\alpha_x^2 = c_x c_n$ multiplicirt. Hierdurch geht L in $a_x a_n a_l$ über; der aus u_x entstehende Ausdruck $(c\,a\,\alpha)\;c_x^2 a_x^2\,\alpha_x^2$ verschwindet, und es geht $(a\,b\,u)\;(a\,b\,\alpha)\;a_x b_x \alpha^{x2}$ über in:

$$(a b c)\,(a b \alpha)\,(c d \beta)\,a_x b_x c_x d_x^2 \alpha_x^2 \beta_x^2$$
$$= \tfrac{1}{3}\,(a b c) a_x b_x c_x d_x^2 \alpha_x^2 \beta_x^2\,\{(a b \alpha)(c d \beta) - (c b \alpha)\,(a d \beta) - (a c \alpha)\,(b d \beta)\}$$
$$= \tfrac{1}{3}\,(a b c)^2\,a_x b_x c_x\,.\,(a d \beta)\,\alpha_x^2 \beta_x^2 d_x^2 = 0;$$

und somit hat man die Formel:

$$(27)\qquad a_x a_n a_l = 0,$$

und hieraus durch wiederholte Anwendung des δ-Processes nach (9):

$$\alpha_x\alpha_n\alpha_l + a_x a_n a_m = 0\,, \tag{28}$$

$$\alpha_x\alpha_n\alpha_m = 0\,. \tag{29}$$

Die Ausdrücke $\alpha_x\alpha_n\alpha_l$ und $a_x a_n a_m$ selbst endlich, welche nach (28) einander gleich und entgegengesetzt sind, erhält man durch Betrachtung der aus $\varphi' = \varphi'^6_x$ zu bildenden ersten Polare (p. 574):

$$\begin{aligned}(30)\quad 6\varphi_x'^5\varphi_y' &= (a\beta b)(a\alpha\beta)\{\beta_x\alpha_x^2b_x^2a_y + \beta_y\alpha_x^2b_x^2a_x + 2\beta_x\alpha_x^2b_xb_ya_x \\ &\qquad + 2\beta_x\alpha_x\alpha_yb_x^2a_x\} \\ &= A + A' + 2B + 2B'\,.\end{aligned}$$

Die Bedeutung der Grössen A, A', B, B' wird hieraus leicht zu ersehen sein. Wegen der Vertauschbarkeit von α, β findet man nun:

$$\begin{aligned}(31)\quad A &= \tfrac{1}{2}a_yb_x^2\alpha_x\beta_x\,(a\alpha\beta)\,\{(a\beta b)\,\alpha_x - (a\alpha b)\,\beta_x\} \\ &= \tfrac{1}{2}a_yb_x^2\alpha_x\beta_x\,(a\alpha\beta)\,\{(\alpha\beta b)\,a_x - (a\alpha\beta)\,b_x\},\end{aligned}$$

oder wenn man den ersten Theil nach (11) umformt, und berücksichtigt, dass sich der Factor von $b_x^3 = f$ im zweiten Gliede nicht ändert, wenn man die x, y permutirt (was man leicht beweist) für $(\Delta_2)_x^3 = \Delta_2$:

$$A = -\tfrac{2}{3}a_ma_xa_y + \tfrac{1}{6}\Delta_2\,.\,a_x^2a_y - \tfrac{1}{2}(\Delta_2)_x^2(\Delta_2)_y\,.\,f$$

Der Term A' in (30) entsteht aus A, indem man die a, b mit den β, α vertauscht; dabei vertauscht sich f mit Δ, Δ_2 mit Δ_1, M mit $-L$; und es ist also:

$$A' = \tfrac{2}{3}\alpha_l\alpha_x\alpha_y + \tfrac{1}{6}\Delta_1\,.\,\alpha_x^2\alpha_y - \tfrac{1}{2}(\Delta_1)_x^2(\Delta_1)_y\,.\,\Delta\,.$$

Für den Ausdruck B finden wir durch Vertauschung von α, β:

$$\begin{aligned}B &= \tfrac{1}{2}\alpha_x\beta_xb_xb_ya_x\,(a\alpha\beta)\,\{(a\beta b)\,\alpha_x - (a\alpha b)\,\beta_x\} \\ &= \tfrac{1}{2}\alpha_x\beta_xb_xb_ya_x\,(a\alpha\beta)\,\{(\alpha\beta b)\,a_x - (a\alpha\beta)\,b_x\}\,.\end{aligned}$$

Hier ist der erste Theil gleich dem ersten Theile von A in (31), denn er geht durch Vertauschung von a mit b in denselben über, während der zweite Theil von B gleich $\frac{1}{2}\Delta_2b_x^2b_y$ ist. Es wird daher:

$$B = -\tfrac{2}{3}a_ma_xa_y - \tfrac{1}{3}\Delta_2a_x^2a_y\,.$$

Denkt man sich hierin wieder die a, b mit den β, α vertauscht, so erhält man:

$$B' = \tfrac{2}{3}\alpha_l\alpha_x\alpha_y - \tfrac{1}{3}\Delta_1\alpha_x^2\alpha_y\,.$$

Trägt man schliesslich die für A, A', B, B' gefundenen Werthe in (30) ein und drückt noch Δ_1, Δ_2 durch f, Δ aus, so kommt:

$$6\varphi_x'^5\varphi_y' = -2a_ma_xa_y + 2\alpha_l\alpha_x\alpha_y - \tfrac{1}{3}Tf\,a_x^2a_y\,.$$

Drückt man noch φ durch ψ aus (p. 575), so hebt sich auch der in T multiplicirte Term fort, und es bleibt:

(32) $$2\,\psi_x{}^5\psi_y = a_m a_x a_y - \alpha_l \alpha_x \alpha_y\,.$$

Aus dieser Formel ergibt sich endlich, wenn man $y_i = n_i = (a\alpha)_i\, a_x{}^2\alpha_x{}^2$ setzt und die auf p. 572 gegebene Definition der Combinante Ω beachtet:

(33) $$2\,\Omega = a_x a_m a_n - \alpha_x \alpha_n \alpha_l\,.$$

Unter Hinzunahme von (20), (21), (24), 25), (27), (28), (29) *findet man also für die unter 3) genannten Formen das folgende Gleichungssystem:*

(34) $$\begin{cases} a_x a_l a_m = -\frac{1}{4}\,\Gamma_{112}\psi + \frac{1}{48}\,S_{12}f - \frac{1}{96}\,S_{11}\Delta, \\ \alpha_x \alpha_l \alpha_m = -\frac{1}{4}\,\Gamma_{122}\psi - \frac{1}{96}\,S_{22}f + \frac{1}{48}\,S_{12}\Delta, \\ \quad a_x a_m a_n = \Omega\,, \qquad \alpha_x \alpha_m \alpha_n = 0\,, \\ \quad a_x a_n a_l = 0\,, \qquad \alpha_x \alpha_n \alpha_l = -\Omega\,. \end{cases}$$

Die Berechnung der unter 4) auf p. 634 genannten Formen gestaltet sich nunmehr sehr einfach. Aus (10) ergibt sich zunächst:

$$\begin{aligned}(l y x) &= \tfrac{3}{4}\,(a b \alpha)\, a_x b_x \alpha_x{}^2 \left\{a_y b_x - b_y a_x\right\} \\ &= \tfrac{3}{2}\,(a b \alpha)\, a_x b_x{}^2 \alpha_x{}^2 a_y = \tfrac{3}{2}\,a_n a_x a_y\,.\end{aligned}$$

Ersetzt man hierin die y_i bez. durch m_i und n_i, so findet man nach (26) und (34):

(35) $$\begin{aligned}(l n x) &= \tfrac{3}{2}\,a_x a_n{}^2 = -\tfrac{1}{4}\,\Gamma_1 - \psi f\,, \\ (l m x) &= \tfrac{3}{2}\,a_x a_m a_n = \tfrac{3}{2}\,\Omega\,;\end{aligned}$$

und aus der ersten dieser Gleichungen durch Anwendung des δ-Processes:

(36) $$(m n x) = \tfrac{3}{2}\,\alpha_x \alpha_n{}^2 = -\tfrac{1}{4}\,\Gamma_2 - \psi\Delta\,.$$

Zur Berechnung von $(l m n)$ benutzen wir die Identität:

$$\begin{aligned}(l m n)\, u_x &= (l m x)\, u_n + (m n x)\, u_l + (l x n)\, u_m \\ &= \tfrac{3}{2}\,\Omega N + \tfrac{1}{4}\,(\Gamma_1 M - \Gamma_2 L) + \psi\,(f M - \Delta L)\,.\end{aligned}$$

Nun ist aber nach (35) und (14):

$$\tfrac{3}{2}\,\Omega N = (l m x)\,.\,(a\alpha u)\, a_x{}^2\alpha_x{}^2 = \begin{vmatrix} u_x & L & M \\ f & a_x{}^2 a_l & a_x{}^2 a_m \\ \Delta & \alpha_x{}^2\alpha_l & \alpha_x{}^2\alpha_m \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} u_x & L & M \\ f & \frac{1}{4}\,\Gamma_{11} & \frac{1}{4}\,\Gamma_{12} + \psi \\ \Delta & \frac{1}{4}\,\Gamma_{12} - \psi & \frac{1}{4}\,\Gamma_{22} \end{vmatrix}$$

(37) $$= u_x\left\{\psi^2 - \tfrac{1}{96}\,S_{\Delta,-f}\right\} - \tfrac{1}{4}\,(\Gamma_1 M - \Gamma_2 L) - \psi\,(M f - L\Delta)\,;$$

denn nach Gleichung (49), p. 561 ist:

$$S_{\Delta,-f} = -6(\Gamma_{11}\Gamma_{22} - \Gamma_{22}{}^2)$$
$$(38) \qquad = S\Delta^4 - 4T\Delta^3 f + S^2\Delta^2 f^2 - \tfrac{2}{3}ST\Delta f^3 + (\tfrac{2}{3}T^2 - \tfrac{1}{12}S^3)f^4.$$

Trägt man den gefundenen Werth für ΩN in die Gleichung für $(lmn)\,u_x$ ein, so bleiben rechts auch nur in u_x multiplicirte Glieder, so dass man direct (lmn) findet. Nimmt man die Gleichungen (35) und (36) hinzu, so *hat man für die vier aus den vier linearen Zwischenformen L, M, N, u_x zu bildenden Functionaldeterminanten folgende Werthe:*

$$(39) \qquad \begin{cases} (lmx) = \tfrac{3}{2}\Omega, & (nlx) = \tfrac{1}{4}\Gamma_1 + \psi f, \\ (mnx) = -\tfrac{1}{4}\Gamma_2 - \psi\Delta, & (lmn) = \psi^2 - \tfrac{1}{96}S_{\Delta,-f}, \end{cases}$$

wo $S_{\Delta,-f}$ durch (38) *definirt ist.* — Damit hätten wir die für das Folgende nöthigen simultanen Bildungen aus f, Δ, L, M, N vollständig berechnet.

Die hier entwickelten Formeln geben noch ein bemerkenswerthes Resultat, welches wir mehrfach benutzen werden*), und daher sogleich noch ableiten wollen. Setzt man nämlich in (32) $y_i = l_i$ oder $y_i = m_i$ und wendet die Gleichungen (26) und (34) an, so erhält man:

$$(40) \qquad \psi_x{}^5\psi_l = \tfrac{1}{48}S_1, \quad \psi_x{}^5\psi_m = -\tfrac{1}{48}S_2,$$

wo S_1, S_2 die durch 4 dividirten Differentialquotienten von $S_{\varkappa\lambda}$ für $\varkappa = \Delta$, $\lambda = -f$ bedeuten. Setzt man nun in Gleichung (37) $u_i = \psi_x{}^5\psi_i$, so geht dieselbe über in:

$$\Omega^2 = \tfrac{2}{3}\psi(\psi^2 - \tfrac{1}{96}S_{\Delta,-f}) - \tfrac{1}{6}\psi_x{}^5\psi_m(\Gamma_1 + 4\psi f) + \tfrac{1}{6}\psi_x{}^5\psi_l(\Gamma_2 + 4\psi\Delta)$$
$$= \tfrac{2}{3}\psi(\psi^2 - \tfrac{1}{96}S_{\Delta,-f}) + \tfrac{1}{288}(\Gamma_1 S_2 - \Gamma_2 S_1) - \tfrac{1}{72}\psi(S_1\Delta - S_2 f).$$

Hier kann man endlich noch die Invariante $T_{\varkappa\lambda}$, genommen für $\varkappa = \Delta$, $\lambda = -f$, einführen; denn es ist (p. 561):

$$(41) \qquad T_{\Delta,-f} = \Gamma_1 S_2 - \Gamma_2 S_1.$$

Man erkennt so, *dass sich das Quadrat der Form Ω (d. i. der Functionaldeterminante von f, Δ und ψ, dividirt durch* 54) *durch die Formen f, Δ, ψ selbst ausdrücken lässt, und zwar mittelst der Gleichung**):*

$$(42) \qquad 24^2\,\Omega^2 = 384\,\psi^3 - 12\,\psi S_{\Delta,-f} + 2\,T_{\Delta,-f},$$

wo $S_{\Delta,-f}$ und $T_{\Delta,-f}$ bez. durch (38) *und* (41) *definirt sind.* —

Aus den Zwischenformen L, M und u_x, setzen wir nun eine neue Zwischenform erster Klasse und siebenter Ordnung zusammen, welche die Combinanteneigenschaft hat, nämlich:

$$(43) \qquad K = L\Delta - fM + 2\psi\,.\,u_x = u_k K_x{}^7.$$

---

*) Vgl. auch den unten folgenden Abschnitt über die zu einer Curve gehörigen algebraischen Integrale.

**) Vgl. Brioschi: Comptes rendus 1863, erste Hälfte, p. 305.

In der That wegen (9) $\delta K = 0$, wodurch nach Obigem *K als Combinante gekennzeichnet ist.**) Für diese neue Zwischenformen haben wir nun wegen des Folgenden wieder die Bildungen

$$a_x{}^2 a_k\,,\quad \alpha_x{}^2 \alpha_k\,,\quad a_x a_k{}^2,\quad \alpha_x \alpha_k{}^2,\quad a_x a_n a_k\,,\quad \alpha_x \alpha_n \alpha_k$$

zu berechnen. Dieselben findet man leicht, wenn man beachtet, dass nach der Definition von K:

$$(43^*)\qquad k_i = \frac{\partial K}{\partial u_i} = \Delta l_i - f m_i + 2\psi x_i\,.$$

Man findet hieraus sofort wegen (14):

$$(44)\qquad a_x{}^2 a_k = \tfrac{1}{4}\Gamma_1 + \psi f,\quad \alpha_x{}^2 \alpha_k = \tfrac{1}{4}\Gamma_2 + \psi\Delta\,,$$

ferner aus den letzten Gleichungen (34):

$$(45)\qquad a_x a_n a_k = -\Omega f,\quad \alpha_x \alpha_n \alpha_k = -\Omega\Delta\,,$$

und endlich:

$$\begin{aligned} a_x a_k{}^2 &= \Delta^2 a_x a_l{}^2 - 2\Delta f a_x a_l a_m + f^2 a_x a_m{}^2 \\ &\quad + 4\psi(\Delta a_x{}^2 a_l - f a_x{}^2 a_m) + 4\psi^2 f\,, \\ \alpha_x \alpha_k{}^2 &= \Delta^2 \alpha_x \alpha_l{}^2 - 2\Delta f \alpha_x \alpha_l \alpha_m + f^2 \alpha_x \alpha_m{}^2 \\ &\quad + 4\psi(\Delta \alpha_x{}^2 \alpha_l - f \alpha_x{}^2 \alpha_m) + 4\psi^2\Delta\,, \end{aligned}$$

oder wegen der letzten Gleichungen des Systems (26) und der ersten des Systems (34) unter Anwendung des Euler'schen Theorems über homogene Functionen:

$$(46)\quad a_x a_k{}^2 = \tfrac{3}{4}\psi\Gamma_1 + \tfrac{1}{32} f\cdot S_{\Delta,-f},\quad \alpha_x \alpha_k{}^2 = \tfrac{3}{4}\psi\Gamma_2 + \tfrac{1}{32}\Delta S_{\Delta,-f}.$$

— Die Elimination, welche schliesslich die gesuchte Parameterdarstellung der Grundcurve liefert, gestaltet sich nun sehr einfach, wenn wir ein neues Coordinatendreieck einführen, dessen Ecken durch einen festen Punkt x und durch die beiden (von x abhängenden) Punkte

$$N \equiv u_n = 0 \quad\text{und}\quad K \equiv u_k = 0$$

gegeben sind, deren geometrische Bedeutung wir sogleich erkennen werden. Bezeichnen wir die laufenden Veränderlichen mit y_i, so haben wir also statt derselben neue Veränderliche ξ, η, ζ einzuführen mittelst der Gleichungen:

$$(47)\qquad \begin{aligned} \Gamma y_1 &= \xi x_1 + \eta n_1 + \zeta k_1\,, \\ \Gamma y_2 &= \xi x_2 + \eta n_2 + \zeta k_2\,, \\ \Gamma y_3 &= \xi x_3 + \eta n_3 + \zeta k_3\,, \end{aligned}$$

---

*) Die Combinanteneigenschaft von K ergibt sich auch daraus, dass K aus N abgeleitet werden kann mittelst der Gleichung

$$K = 3\, N_n u_n N_x{}^3 N'_x{}^4;$$

vgl. Math. Annalen, Bd. 6, p. 483, Gleichung (71).

wo wieder $\Gamma = G(\Delta, -f)$. Die Transformationscoëfficienten hängen allein von der Curve $f(y) = 0$ und dem beliebigen Punkte x ab; da nun u_n und u_k Combinanten sind, so *müssen auch die Coëfficienten der transformirten Gleichung von den Combinanten des Systems* $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$ *abhängen.* Um die neue Curvengleichung zu erhalten, thut man daher besser, zuerst die Form:

$$H(y) = \Delta(x) f(y) - f(x)\Delta(y) = \Delta f(y) - f\Delta(y),$$

welche selbst Combinante ist und gleich Null gesetzt die durch x gehende Curve des Büschels $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$ darstellt, in den ξ, η, ζ auszudrücken, anstatt direct $f(y)$ als Function der letzteren Grössen darzustellen. Zunächst ist nach einer bekannten Identität, welche aus $(a\alpha u)^3 = 0$ für $u_i = (xy)_i$ entsteht (vgl. p. 563 und 575):

$$H(y) = 3\left(a_x a_y^2 \,.\, \alpha_x^2\alpha_y - a_x^2 a_y \,.\, \alpha_x\alpha_y^2\right), \tag{48}$$

wo nun die Factoren der einzelnen Glieder nicht mehr vom dritten, sondern nur noch vom ersten und zweiten Grade in den y sind. Aus den Formeln (47) hat man sofort:

$$(49)\quad \begin{cases} \Gamma \,.\, a_x^2 a_y = \xi f + \eta a_x^2 a_n + \zeta a_x^2 a_k \\ \Gamma \,.\, \alpha_x^2 \alpha_y = \xi\Delta + \eta\alpha_x^2\alpha_n + \zeta\alpha_x^2\alpha_k \\ \Gamma \,.\, a_x a_y^2 = \xi^2 f + 2\,\xi\eta a_x^2 a_n + 2\,\xi\zeta a_x^2 a_k + \eta^2 a_x a_n^2 \\ \qquad\qquad + 2\,\eta\zeta a_x a_n a_k + \zeta^2 a_x a_k^2 \\ \Gamma \,.\, \alpha_x\alpha_y^2 = \xi^2\Delta + 2\,\xi\eta\alpha_x^2\alpha_n + 2\,\xi\zeta\alpha_x^2\alpha_k + \eta^2\alpha_x\alpha_n^2 \\ \qquad\qquad + 2\,\eta\zeta\alpha_x\alpha_n\alpha_k + \zeta^2\alpha_x\alpha_k^2. \end{cases}$$

In Folge der Gleichungen (14), (26), (44), (45) und (46) lassen sich nun die hier rechts auftretenden Coëfficienten immer in folgender Weise ausdrücken:

$$(50)\quad \begin{cases} a_x^2 a_n = \sigma_1 f + \tau_1\Gamma_1, & \alpha_x^2\alpha_n = \sigma_1\Delta + \tau_1\Gamma_2, \\ a_x^2 a_k = \sigma_2 f + \tau_2\Gamma_1, & \alpha_x^2\alpha_k = \sigma_2\Delta + \tau_2\Gamma_2, \\ a_x a_n^2 = \sigma_{11} f + \tau_{11}\Gamma_1, & \alpha_x\alpha_n^2 = \sigma_{11}\Delta + \tau_{11}\Gamma_2, \\ a_x a_n a_k = \sigma_{12} f + \tau_{12}\Gamma_1, & \alpha_x\alpha_n\alpha_k = \sigma_{12}\Delta + \tau_{12}\Gamma_2, \\ a_x a_k^2 = \sigma_{22} f + \tau_{22}\Gamma_1, & \alpha_x\alpha_k^2 = \sigma_{22}\Delta + \tau_{22}\Gamma_2, \end{cases}$$

wo die Grössen σ, τ definirt sind durch:

$$(51)\quad \begin{cases} \sigma_1 = 0, & \sigma_2 = \psi, & \sigma_{11} = -\frac{2}{3}\psi, & \sigma_{12} = -\Omega, & \sigma_{22} = \frac{1}{32}S_{\Delta,-f}, \\ \tau_1 = 0, & \tau_2 = \frac{1}{4}, & \tau_{11} = -\frac{1}{6}, & \tau_{12} = 0, & \tau_{22} = \frac{3}{4}\psi. \end{cases}$$

Bildet man also die in (48) rechts stehende Determinante der Ausdrücke (49), so zerfällt dieselbe in zwei Factoren, deren einer

$$\begin{vmatrix} \Delta & \Gamma_2 \\ f & \Gamma_1 \end{vmatrix} = \Gamma = G(\Delta, -f)$$

ist; und indem man diesen Factor durch Division fortschafft, bleibt:

$$\Gamma^2 . H(y) = 3 \begin{vmatrix} \xi + \sigma_1 \eta + \sigma_2 \zeta, & \xi^2 + 2\sigma_1 \eta \xi + 2\sigma_2 \zeta \xi + \sigma_{11} \eta^2 + 2\sigma_{12} \eta \zeta + \sigma_{22} \zeta^2 \\ \tau_1 \eta + \tau_2 \zeta, & 2\tau_1 \eta \xi + 2\tau_2 \zeta \xi + \tau_{11} \eta^2 + 2\tau_{12} \eta \zeta + \tau_{22} \zeta^2 \end{vmatrix},$$

oder wenn man die zweite Verticalreihe mit Hülfe der ersten reducirt und $\sigma_1 = 0$, $\tau_1 = 0$, $\tau_{12} = 0$ setzt:

$$\Gamma^2 H(y) = 3 \begin{vmatrix} \xi + \sigma_2 \zeta, & -\xi^2 + \sigma_{11} \eta^2 + 2\sigma_{12} \eta \zeta + \sigma_{22} \zeta^2 \\ \tau_2 \zeta, & \tau_{11} \eta^2 + \tau_{22} \zeta^2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\xi(\tau_2 \xi \zeta + \tau_{11} \eta^2 + \tau_{22} \zeta^2) + 3\xi \begin{vmatrix} \sigma_2, & \sigma_{11} \eta^2 + 2\sigma_{12} \eta \zeta + \sigma_{22} \zeta^2 \\ \tau_2, & \tau_{11} \eta^2 + \tau_{22} \zeta^2 \end{vmatrix}.$$

Führt man hierin endlich auch für die übrigen Grössen σ, τ die Werthe (51) ein, so kommt:

$$(52) \quad \Gamma^2 H(y) = \tfrac{3}{4} \xi^2 \zeta - \tfrac{1}{2} \xi \eta^2 + \tfrac{9}{4} \psi \xi \zeta^2 + \tfrac{3}{2} \Omega \eta \zeta^2 + \tfrac{3}{4} (3\psi^2 - \tfrac{1}{32} S_{\Delta, -f}) \zeta^3.$$

Dies ist die *sogenannte typische Darstellung von $H(y)$;* die Form $H(y)$ ist dadurch rational (aber nicht ganz) mittelst der Functionalinvarianten von f dargestellt (vgl. p. 248 f.), und zwar mittelst der Grössen f, Δ, ψ und Ω, wo jedoch f und Δ nur in der Combinante $S_{\Delta, -f}$ vorkommen, so dass in (52) alle Coëfficienten Combinanten sind.

Aus der Gleichung (52) erkennt man, dass die Gerade $\zeta = 0$ in ihrem Schnittpunkte mit $\eta = 0$, d. h. im Punkte x, die Curve $H(y) = 0$ berührt, während der Schnittpunkt von $\zeta = 0$ mit $\xi = 0$, d. i. $u_n = 0$, ebenfalls auf der Curve liegt und also mit dem Tangentialpunkte von x zusammenfällt (p. 530). Gleichzeitig ist aber in dem Punkte $u_n = 0$ die Linie $\xi = 0$ Tangente der Curve $H(y) = 0$. Da ferner die erste Polare von x in Bezug auf $H = 0$ in der Form

$$\tfrac{1}{2} \xi \zeta - \tfrac{1}{6} \eta^2 + \tfrac{3}{4} \psi \zeta^2 = 0$$

erscheint, so ist $\eta = 0$ die Polare des Punktes $N = 0$ (d. i. $\zeta = 0$, $\xi = 0$) in Bezug auf die erste Polare des Punktes x, gebildet für $H = 0$. Damit hätten wir die geometrische Bedeutung der Transformation (47) erkannt; das Resultat können wir auch in folgenden Sätzen aussprechen:

*Ist x ein beliebiger Punkt der Ebene, so stellt $N \equiv u_n = 0$ den Tangentialpunkt von x auf der durch x gehenden Curve des syzygetischen Büschels $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ dar; $K \equiv u_k = 0$ dagegen gibt den Schnittpunkt der Tangente dieser Curve im Punkte $N = 0$ mit der Polare von $N = 0$ in Bezug auf den Polarkegelschnitt von x.**)

*) Man hätte dies auch direct durch Auflösung der Gleichungen (47) und einige Umformungen der für ξ, η, ζ resultirenden Werthe erkennen können, vgl. Clebsch und Gordan a. a. O. — Die Bedeutung von $N = 0$ ergibt sich übrigens direct aus der Salmon'schen Identität. Der Tangentialpunkt muss unbestimmt werden, wenn H in ein Dreieck zerfällt, was mit den Resultaten auf p. 597 übereinstimmt.

Die Form von $H(y)$ lässt weiter sogleich die Richtigkeit folgender Sätze erkennen:

Die Curve $\psi = 0$ *ist der Ort der Punkte* x, *für welche die Ecke* $K = 0$ *des zu* x *gehörigen Dreiecks* $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ *auf dem Polarkegelschnitte von* x *liegt;* $\xi = 0$ *wird dann Tangente des letzteren in* $K = 0$.

Die Gleichung $3\psi^2 - \frac{1}{32} S_{\Delta, -f} = 0$ *stellt eine Curve 12ter Ordnung dar, für deren Punkte* x *die Ecke* $K = 0$ *jenes Dreiecks ebenfalls auf der durch* x *gehenden Curve des syzygetischen Büschels liegt.*

Für die 72 Schnittpunkte x *von* $\psi = 0$ *mit den vier durch* $S_{\Delta, -f} = 0$ *gegebenen äquianharmonischen Curven des Büschels* $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ *ist das zu* x *gehörige Dreieck* $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ *der durch* x *gehenden Curve des Büschels gleichzeitig ein- und umgeschrieben:* N *ist Tangentialpunkt von* x, x *von* K *und* K *von* N.

Und endlich, da nach (42) für $\psi = 0$, $T_{\Delta, -f} = 0$ auch $\Omega = 0$ wird:

Für die 108 Schnittpunkte von $\psi = 0$ *mit den sechs durch* $T_{\Delta, -f}$ *gegebenen harmonischen Curven des syzygetischen Büschels fällt der zu* x *gehörige Punkt* $K = 0$ *in einen Wendepunkt; und die Wendetangente des letzteren ist durch* $\xi = 0$ *gegeben.*

Für einen Punkt x der 12 durch $\Gamma \equiv G(\Delta, -f) = 0$ dargestellten Wendepunktslinien wird unsere typische Darstellung illusorisch, in der That verschwindet alsdann auch die Determinante unserer Transformation (47), denn es ist nach (43*) und (39):

$$(53) \qquad \begin{aligned} (xnk) &= \Delta\,(xnl) - f\,(xnm) \\ &= \tfrac{1}{4}(\Gamma_1 \Delta - \Gamma_2 f) = \tfrac{1}{4}\Gamma\,. \end{aligned}$$

— Aus (52) kann man nun typische Darstellungen für alle Functionalinvarianten von $H(y)$ ableiten, d. h. dieselben so darstellen, dass ihre Coëfficienten rationale Functionen von f, Δ, ψ und Ω werden. Wir wollen hier nur noch die Hesse'sche Form Δ_H von $H(y)$ berechnen. Dies geschieht, indem man zunächst die Hesse'sche Determinante von H in Bezug auf die ξ, η, ζ, d. h. die Determinante aus den Grössen:

$$H_{11} = \tfrac{1}{4}\zeta\,,\quad H_{22} = -\tfrac{1}{6}\xi\,,\quad H_{33} = \tfrac{3}{4}\xi + \tfrac{1}{2}\Omega\eta + \tfrac{3}{4}(3\psi^2 - \tfrac{1}{32}S_{\Delta,-f})\,\zeta\,,$$
$$H_{12} = -\tfrac{1}{6}\eta\,,\quad H_{23} = \tfrac{1}{2}\Omega\zeta\,,\quad H_{31} = \tfrac{1}{4}\xi + \tfrac{3}{4}\psi\zeta$$

bildet, und dieselbe mit 6 und dem Quadrate der Determinante der aus (47) sich durch Auflösung ergebenden Transformationsgleichungen multiplicirt. Nun findet man aber aus den Gleichungen (47) wegen (53):

$$\xi = 4\,(ynk)\,,\quad \eta = 4\,(xyk)\,,\quad \zeta = 4\,(xny)\,.$$

Nach dem Satze über die adjungirte Determinante ist aber die Determinante dieser Gleichungen gleich $4^3\,(xnk)^2 = 4\,\Gamma^2$. Bilden wir

andererseits die Hesse'sche Form für die linke Seite von (52), also für $\Gamma^2 H$, so wird dieselbe gleich $\Gamma^6 \Delta_H$. Durch Division mit Γ^4 auf beiden Seiten und Ausrechnen der Determinante der H_{ik} findet man daher unter Berücksichtigung der Gleichung (42) für Ω^2 *):

$$\begin{aligned}\Gamma^2 \Delta_H = \xi^3 &+ 3\psi\xi^2\zeta - 2\psi\xi\eta^2 - 6\Omega\xi\eta\zeta + \tfrac{3}{32} S_{\Delta,-f}\xi\zeta^2 \\ &- \tfrac{1}{3}\Omega\eta^3 - (6\psi^2 - \tfrac{1}{16} S_{\Delta,-f})\eta^2\zeta - 12\psi\Omega\eta\zeta^2 \\ &- \left\{4\psi^3 - \tfrac{1}{8}\psi S_{\Delta,-f} + \tfrac{1}{48} T_{\Delta,-f}\right\}\zeta^3 . \end{aligned} \tag{54}$$

Um nun schliesslich die Coordinaten eines Punktes y auf der Curve $f(y) = 0$ als Functionen eines Parameters auszudrücken, betrachten wir den durch den Tangentialpunkt $N = 0$ eines Punktes x der Curve gehenden Strahlbüschel

$$\varkappa a_x^2 a_y - \lambda \alpha_x^2 \alpha_y = 0 \tag{55}$$

und berechnen die beiden übrigen Schnittpunkte eines Strahles aus diesem Büschel mit $f(y) = 0$, was durch eine quadratische Gleichung geschieht. Da in unserm Falle $f(x) \equiv f = 0$ ist, so wird $H(y) = \Delta . f(y)$ und (vgl. p. 560):

$$\Delta_H = \Gamma_1 \alpha_y^3 - \Gamma_2 a_y^3 = \Gamma_1 \alpha_y^3 ,$$

oder wegen $f \equiv a_x^3 = 0$: $\Delta_H = \Delta^3 \alpha_y^3$. Die Gleichung (55) zusammen mit $f(y) \equiv a_y^3 = 0$ können wir daher ersetzen durch die Gleichungen:

$$\varkappa \Delta^2 H_x^2 H_y - \lambda (\Delta_H)_x^2 (\Delta_H)_y = 0 , \quad H(y) = 0 ,$$

wo symbolisch: $H_y^3 = H(y)$, $(\Delta_H)_y^3 = \Delta_H$. Es ist aber, da den Werthen $y_i = x_i$ die Werthe $\xi = \Gamma$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ entsprechen:

$$H_x^2 H_y = \tfrac{1}{6} \Sigma\Sigma \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_k} x_i x_k = \tfrac{1}{6} \Gamma^2 \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} ,$$

$$(\Delta_H)_x^2 (\Delta_H)_y = \tfrac{1}{6} \Sigma\Sigma \frac{\partial^2 \Delta_H}{\partial y_i \partial y_k} x_i x_k = \tfrac{1}{6} \Gamma^2 \frac{\partial^2 \Delta_H}{\partial \xi^2} .$$

Indem man sich also Alles in den Variabeln ξ, η, ζ ausgedrückt denkt, hat man die beiden Gleichungen:

---

*) Andererseits ist nach der bekannten Formel für $\Delta_{\varkappa\lambda}$:

$$\Delta_H = \Gamma_1 \Delta(y) - \Gamma_2 f(y) .$$

Nimmt man die Definitionsgleichung für H hinzu, so findet sich:

$$\Gamma . f(y) = f \Delta_H + \Gamma_1 H(y) ;$$

und *dies ist die typische Darstellung für die Grundform $f(y)$ selbst.* Hieraus schliesst man weiter, *dass jede Functionalinvariante von f mit einer solchen Potenz von Γ multiplicirt werden kann, dass sie eine ganze Function der 7 Grundformen f, Δ, ψ, Ω, u_x, N, K wird.* Zwischen letzteren besteht die einzige Relation (42). *Alle* Relationen zwischen den Functionalinvarianten von f sind damit auf diese Gleichung und auf die Ausdrücke derselben durch die 7 Grundformen zurückgeführt. Vgl. Clebsch und Gordan a. a. O.

$$H(y) = 0\,, \quad \varkappa \Delta^2 \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} - \lambda \frac{\partial^2 \Delta_H}{\partial \xi^2} = 0\,.$$

Wenn man aus ihnen und der Gleichung:

$$u_y = 0 \quad \text{oder} \quad u_x \xi + N\eta + K\zeta = 0$$

die ξ, η, ζ eliminirt, so erhält man das Product der Gleichungen aller Punkte y, in denen ein Strahl des Büschels (55) die Grundcurve $f(y) = 0$ trifft. Unter diesen ist der Scheitel jenes Büschels ($N = 0$); die Form N muss daher ein Factor des Eliminationsresultates sein. Nun sind von den drei gegebenen Gleichungen zwei linear, nämlich:

$$0 = u_x \xi + N\eta + K\zeta$$

$$0 = \frac{\Gamma^2}{6}\left(\varkappa \Delta^2 \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} - \lambda \frac{\partial^2 \Delta_H}{\partial \xi^2}\right) = \tfrac{1}{4}\varkappa \Delta^2 \zeta - \lambda(\xi + \psi\zeta)\,.$$

In Folge dieser beiden Gleichungen kann man also setzen:

$$\xi = N\left(\tfrac{1}{4}\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi\right), \; \zeta = N\lambda\,,$$

$$\eta = -K\lambda - u_x\left(\tfrac{1}{4}\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi\right).$$

Führt man diese Werthe in $H(y)$ ein und bemerkt noch, dass $S_{\Delta,-f}$, $T_{\Delta,-f}$ für $f = 0$ bez. in $S\Delta^4$ und $T\Delta^6$ übergehen, so erhält man die Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 = \tfrac{3}{4} N \Big\{ & N^2\left[\left(\tfrac{1}{4}\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi\right)^2\lambda + 3\psi\left(\tfrac{1}{4}\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi\right)\lambda^2 + \left(3\psi^2 - \tfrac{1}{32}S\Delta^4\right)\lambda^3\right] \\ & - \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{4}\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi\right)\left[K\lambda + u_x\left(\tfrac{1}{4}\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi\right)\right]^2 \\ & - 2\,\Omega N\left[K\lambda + u_x\left(\tfrac{1}{4}\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi\right)\right]\lambda^2 \Big\}\,. \end{aligned}$$

Lassen wir den für die vorliegende Frage irrelevanten Factor $\frac{3}{4}N$ fort, so ändert sich diese Gleichung wegen der Relation (42) nicht, wenn man nach Multiplication derselben mit $\frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi\right)$ auf der rechten Seite $\frac{9}{4}\Omega^2 N^2 \lambda^4$ subtrahirt und gleichzeitig den Ausdruck

$$\left(\tfrac{3}{2}\psi^3 - \tfrac{3}{64}\psi S\Delta^4 + \tfrac{1}{128}T\Delta^6\right) N^2\lambda^4$$

addirt. Man erhält dann, indem sich alle in $\Delta^4\psi$, $\Delta^2\psi^2$ und ψ^3 multiplicirten Terme, welche aus der ersten Klammer hervorgehen, fortheben, die Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 = {} & \tfrac{3}{128}\Delta^6\lambda\left\{\varkappa^3 - \tfrac{1}{2}S\varkappa\lambda^2 + \tfrac{1}{3}T\lambda^3\right\} N^2 \\ & - \left\{\left(\tfrac{1}{4}\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi\right)\left[K\lambda + u_x\left(\tfrac{1}{4}\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi\right)\right] + \tfrac{3}{2}\Omega N\lambda^2\right\}^2, \end{aligned}$$

die man auch in der Form schreiben kann:

$$\begin{aligned} (56) \qquad & \left(\tfrac{1}{4}\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi\right)\left[K\lambda + u_x\left(\tfrac{1}{4}\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi\right)\right] + \tfrac{3}{2}\Omega N\lambda^2 \\ & \pm \tfrac{1}{4}\Delta^3 N\sqrt{\tfrac{3}{8}\lambda\left(\varkappa^3 - \tfrac{1}{2}S\varkappa\lambda^2 + \tfrac{1}{3}T\lambda^3\right)} = 0\,. \end{aligned}$$

Die ersten Glieder dieses Ausdruckes vereinfachen sich noch, wenn man für K und ΩN ihre Werthe in L, M einsetzt. In Rücksicht auf $f = 0$ hat man nämlich wegen (37) und (43):

$$K = L\Delta + 2\psi u_x,$$
$$\tfrac{3}{2}\Omega N = u_x(\psi^2 - \tfrac{1}{96}S\Delta^4) - \tfrac{1}{4}M\Delta^3 + \psi\Delta L.$$

Indem man diese Werthe einführt, geht die Gleichung (56) nach Auslassung des Factors $\frac{1}{16}\Delta^3$ über in:

$$(56^*)\quad 0 = (\varkappa^2 - \tfrac{1}{6}S\lambda^2)\Delta u_x - 4\lambda^2 M + 4\varkappa\lambda L \pm N\sqrt{6\lambda(\varkappa^3 - \tfrac{1}{2}\varkappa\lambda^2 S + \tfrac{1}{3}\lambda^3 T)}$$

Dieses ist die Gleichung $u_y = 0$ *eines Punktes* y, *in welchem ein Strahl des Büschels* $\varkappa a_x^2 a_y - \lambda\alpha_x^2\alpha_y = 0$ *die Curve* $f(y) = 0$ *schneidet; dabei ist* x *ein beliebiger Punkt von* f; *der Tangentialpunkt desselben* ($N = 0$) *ist der Scheitel jenes Büschels;* die Formen L und M sind durch (10) und (11) definirt; Δ, S, T haben die bekannten Bedeutungen. Die beiden verschiedenen Schnittpunkte eines Büschelstrahles erhält man durch die beiden Vorzeichen der Quadratwurzel. Die Coëfficienten von u_1, u_2, u_3 in dem vorliegenden Ausdrucke sind also die Coordinaten des auf der Curve variabeln Punktes selbst; *man hat daher, wenn* ϱ *einen willkürlichen Factor bezeichnet, diese Coordinaten in Function des Parameters* $\varkappa : \lambda$ *dargestellt durch folgende Gleichungen, in denen* $M = u_m$, $L = u_l$, $N = u_n$ *gesetzt ist*):*

$$(57)\quad \begin{cases} \varrho y_1 = \Delta(\varkappa^2 - \tfrac{1}{6}S\lambda^2)x_1 - 4\lambda^2 m_1 + 4\varkappa\lambda l_1 \pm n_1\sqrt{6\lambda(\varkappa^3 - \tfrac{1}{2}S\varkappa\lambda^2 + \tfrac{1}{3}T\lambda^3)} \\ \varrho y_2 = \Delta(\varkappa^2 - \tfrac{1}{6}S\lambda^2)x_2 - 4\lambda^2 m_2 + 4\varkappa\lambda l_2 \pm n_2\sqrt{6\lambda(\varkappa^3 - \tfrac{1}{2}S\varkappa\lambda^2 + \tfrac{1}{3}T\lambda^3)} \\ \varrho y_3 = \Delta(\varkappa^2 - \tfrac{1}{6}S\lambda^2)x_3 - 4\lambda^2 m_3 + 4\varkappa\lambda l_3 \pm n_3\sqrt{6\lambda(\varkappa^3 - \tfrac{1}{2}S\varkappa\lambda^2 + \tfrac{1}{3}T\lambda^3)}. \end{cases}$$

Unter dem Wurzelzeichen**) erscheint hier der Ausdruck $G_1(\varkappa, -\lambda)$ multiplicirt in 6λ. Da nun durch das Verschwinden dieser Irrationalität die vier von $N = 0$ ausgehenden Tangenten des Büschels $\varkappa a_x^2 a_y - \lambda\alpha_x^2\alpha_y = 0$ bestimmt werden, so erkennt man, dass *die Gleichung* $G_1(\varkappa, -\lambda) = 0$ *die übrigen drei von diesen Tangenten bestimmt, wenn eine von ihnen, entsprechend dem Werthe* $\lambda = 0$ *(also die in* x *berührende Tangente), bekannt ist.* Insbesondere kann man nun den Punkt x mit einem Wendepunkte zusammenfallen lassen, wo dann der Scheitel des von uns betrachteten Büschels ebenfalls in dem betreffenden Wendepunkte liegt. Dem Werthe $\lambda = 0$ entspricht dann die Wendetangente von x und die Wurzeln der Gleichung $G_1(\varkappa, -\lambda) = 0$ liefern die drei von x noch ausgehenden Tangenten der Grund-

*) In anderer Form ist eine solche Parameterdarstellung gegeben von Aronhold: Monatsberichte der Berliner Academie, 25. April 1861. Daran knüpfte dann Clebsch die Verwerthung der elliptischen Functionen, insbesondere ihres Additionstheorems, für die Schnittpunktsätze an: Crelle's Journal, Bd. 63 a. a. O. — In den entsprechenden Gleichungen bei Clebsch und Gordan (Math. Annalen, Bd. 1 a. a. O.) sind die Glieder mit den Coëfficienten m_i ausgelassen.

**) Ausser dieser Wurzel ist in (57) noch eine Irrationalität enthalten, insofern ein Punkt x der Curve als bekannt angenommen ist; die Aufsuchung eines solchen Punktes verlangt eben noch die Lösung einer cubischen Gleichung.

curve.*) Für die hier über die Lage von x gemachten Voraussetzungen würden allerdings unsere Formeln für die typische Darstellung von $H(y)$ ihre Gültigkeit verlieren; denn für $f=0$, $\Delta=0$ würde auch Γ, d. h. die linke Seite der jene Darstellung liefernden Gleichung (52) Null sein. In der That wird auch das von uns benutzte Coordinatendreieck $\xi=0$, $\eta=0$, $\zeta=0$ in diesem Falle unbrauchbar, indem die drei Seiten desselben zusammenfallen. Gleichwohl aber bleiben die Endgleichungen (57) bestehen. Die Gleichung (56*) nämlich, aus welcher (57) abgeleitet wurde, ist nichts anderes als das Resultat der Elimination der y_i aus den Gleichungen:

$$\varkappa a_x{}^2 a_y - \lambda \alpha_x{}^2 \alpha_y = 0, \quad a_y{}^3 = 0, \quad u_y = 0;$$

und dies Resultat muss vollkommen unabhängig von der Wahl des Coordinatendreiecks bestehen bleiben; das oben benutzte Dreieck war nur zur Herleitung desselben passend gewählt, indem so die Coëfficienten der Potenzen von $\varkappa$, λ in (56*) sofort als Functionalinvarianten der Grundcurve gegeben waren. Setzt man nun aber in (57) $\Delta=0$, so kommt:

$$(58) \qquad \varrho y_i = -4\lambda^2 m_i + 4\varkappa\lambda l_i \pm n_i \sqrt{6\lambda\left(\varkappa^3 - \tfrac{1}{2} S\varkappa\lambda^2 + \tfrac{1}{3} T\lambda^3\right)}.$$

In die Gleichungen (57) führt man nun leicht wieder die elliptischen Functionen sin am, cos am, Δ am ein; es sollen die dazu nothwendigen Rechnungen hier zunächst mitgetheilt werden; weiterhin wird sich dann aber ergeben, dass sich die betreffenden Ueberlegungen weit übersichtlicher gestalten, wenn man sich statt der Functionen sin am, etc. einer neuen doppelt periodischen Function bedient, die sich selbstverständlich durch sin am, cos am, Δ am ausdrücken lässt. Die Einführung der letzteren Functionen nämlich wird hier dadurch umständlicher, dass in (57) unter dem Wurzelzeichen ein Ausdruck dritter Ordnung steht, multiplicirt in λ, welcher zuvor auf die für sin am brauchbare Normalform $\mu(1-\mu)(1-k^2\mu)$ gebracht werden muss. Insbesondere soll uns dann noch die Bestimmung der Wendepunkte beschäftigen, d. h. die Bestimmung der neun Strahlen des Büschels $\varkappa a_x{}^2 a_y - \lambda \alpha_x{}^2 \alpha_y = 0$, welche den Scheitel $N=0$ des letzteren mit jenen neun Punkten verbinden; wir werden sehen, wie sich dies rein algebraische Problem mit Hülfe der elliptischen Functionen lösen lässt.

---

*) Da andererseits $G_1=0$ die drei Curven des syzygetischen Büschels bestimmt, deren Hesse'sche Curve $f=0$ ist (p. 527), so folgt hieraus beiläufig, dass *jede Curve des syzygetischen Büschels von den Wendetangenten der drei Curven berührt wird, zu denen sie als* Hesse'*sche Curve gehört.* Man beweist dies übrigens auch leicht direct. Vgl. Clebsch: Ueber die Wendetangenten der Curven dritter Ordnung, Crelle's Journal, Bd. 58.

Zur Erreichung des angegebenen Zweckes führen wir nun den Parameter $\varkappa$ statt $\varkappa : \lambda$ ein und bezeichnen mit $\varkappa'$, $\varkappa''$, $\varkappa'''$ die Wurzeln der Gleichung:

$$G_1(\varkappa, -1) = \varkappa^3 - \tfrac{1}{2} S\varkappa + \tfrac{1}{3} T = 0, \tag{59}$$

d. h. wir setzen: $\varkappa = \varkappa$, $\lambda = 1$ und:

$$\varkappa^3 - \tfrac{1}{2} S\varkappa + \tfrac{1}{3} T = (\varkappa - \varkappa')(\varkappa - \varkappa'')(\varkappa - \varkappa''').$$

Ferner machen wir die Substitution:

$$\varkappa = \mu(\varkappa'' - \varkappa''') + \varkappa''';$$

durch letztere wird:

$$\varkappa^3 - \tfrac{1}{2} S\varkappa + \tfrac{1}{3} T = (\varkappa''' - \varkappa'')^2 (\varkappa''' - \varkappa')\, \mu\, (1 - \mu)(1 - k^2\mu),$$

wenn:

$$k^2 = \frac{\varkappa''' - \varkappa''}{\varkappa''' - \varkappa'}.$$

Wir brauchen jetzt nur noch durch die Gleichung

$$\mu = \sin^2 \operatorname{am} u \tag{60}$$

einen neuen Parameter u einzuführen, um die folgenden Relationen zu erhalten:

$$\varkappa = \varkappa'' \sin^2 \operatorname{am} u + \varkappa''' \cos^2 \operatorname{am} u, \tag{61}$$

$$\sqrt{\varkappa^3 - \tfrac{1}{2} S\varkappa + \tfrac{1}{3} T} = (\varkappa''' - \varkappa'') \sqrt{\varkappa''' - \varkappa'} \sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} u\, \Delta \operatorname{am} u$$

$$= \tfrac{1}{2} (\varkappa''' - \varkappa'') \sqrt{\varkappa''' - \varkappa'}\, \frac{d \sin^2 \operatorname{am} u}{du}; \tag{62}$$

und dadurch wird das zu unserer Curve gehörige elliptische Integral erster Gattung, d. h. der neue Parameter u gegeben durch:

$$u = \int_0^{\sqrt{\mu}} \frac{d\mu}{\sqrt{(1 - \mu^2)(1 - k^2\mu^2)}} = \tfrac{1}{2} \int_0^{\nu} \frac{d\nu}{\sqrt{\nu(1 - \nu)(1 - k^2\nu)}}$$

$$= \frac{\sqrt{\varkappa''' - \varkappa'}}{2} \int_{\varkappa'''}^{\varkappa} \frac{d\varkappa}{\sqrt{\varkappa^3 - \tfrac{1}{2} S\varkappa + \tfrac{1}{3} T}}\ ^{*)}. \tag{63}$$

Unsere Formeln (57) endlich gehen über in:

$$\varrho y_i = \varphi_i(\sin^2 \operatorname{am} u) + m a_i \frac{d \sin^2 \operatorname{am} u}{du},$$

---

*) Eine andere, elegante Methode, um das elliptische Integral mit *allgemeiner* binärer Form 4ter Ordnung unter dem Wurzelzeichen des Nenners durch rationale Transformation so umzuformen, dass statt dessen die allein von den Invarianten i und j $\left(\text{oder wenn man } \varkappa \frac{j}{i} \text{ statt } \varkappa \text{ setzt, allein von der absoluten Invariante } \frac{i^3}{j^2}\right)$ abhängende cubische Form auftritt, ist von Hermite angegeben: Crelle's Journal, Bd. 52, p. 8. Vgl. auch Cayley, ib. Bd. 53 und Clebsch: Theorie der binären Form, p. 233.

wo die α_i Constante, die φ_i ganze rationale Functionen zweiten Grades ihres Arguments sind, und wo:

$$m = \tfrac{1}{2}(\varkappa''' - \varkappa'') \sqrt{\frac{\varkappa''' - \varkappa'}{6}};$$

dieselben werden also in der That von der Form der Gleichungen (31) p. 628. Um von den letzten Gleichungen aus (durch Vermittlung der H-Functionen) die Sätze über Schnittpunktsysteme wieder durch das Verschwinden entsprechender Integralsummen darzustellen, ist es nach dem Obigen noch nothwendig, den Werth des Integrals u für einen Wendepunkt oder den zugehörigen Werth von $\sin\operatorname{am} u$ zu bestimmen. Letzteres geschieht im Anschlusse an folgende Ueberlegungen.

Wir wollen die Bedingung dafür aufstellen, dass *drei Punkte der Curve mit den Parametern $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ oder bez. mit den zugehörigen Integralwerthen u_1, u_2, u_3 auf einer Geraden liegen.* Zur Abkürzung schreiben wir die Gleichungen (57) in der Form

$$\varrho y_i = p_i + q_i \varkappa + r_i \varkappa^2 \pm \alpha_i \sqrt{\varphi(\varkappa)}, \tag{64}$$

woraus die Bedeutung der p_i, q_i, r_i, α_i leicht zu ersehen ist, und wo $\varphi(\varkappa) = G_1(\varkappa, -1)$. Sollen drei Punkte $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ in gerader Linie liegen, so muss die aus ihren Coordinaten gebildete Determinante verschwinden. Letztere aber ist wegen (64) gleich der Summe der Producte aus entsprechenden Determinanten der unvollständigen Systeme:

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & \alpha_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & \alpha_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & \alpha_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & \varkappa_1 & \varkappa_1^2 & \sqrt{\varphi(\varkappa_1)} \\ 1 & \varkappa_2 & \varkappa_2^2 & \sqrt{\varphi(\varkappa_2)} \\ 1 & \varkappa_3 & \varkappa_3^2 & \sqrt{\varphi(\varkappa_3)} \end{vmatrix};$$

d. h. man hat die Gleichung:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & \varkappa_1 & \varkappa_1^2 & \sqrt{\varphi(\varkappa_1)} \\ 1 & \varkappa_2 & \varkappa_2^2 & \sqrt{\varphi(\varkappa_2)} \\ 1 & \varkappa_3 & \varkappa_3^2 & \sqrt{\varphi(\varkappa_3)} \\ (qr\alpha) & (r\alpha p) & (\alpha pq) & -(pqr) \end{vmatrix}. \tag{65}$$

Mit Rücksicht auf die Bedeutungen der Grössen p, q, r, α, wie sie aus (57) und (64) folgen, erhält man nun für die in der letzten Horizontalreihe von (65) stehenden dreigliedrigen Determinanten folgende Werthe:

$$(qr\alpha) = 4\sqrt{6}\,(lxn)\,\Delta, \qquad (r\alpha p) = 4\sqrt{6}\,(xnm)\,\Delta,$$

$$(\alpha pq) = 16\sqrt{6}\,(lmn) + \frac{4}{\sqrt{6}}(nlx)\,S\Delta, \quad -(pqr) = -16\,(lmx)\,\Delta,$$

oder wegen der Gleichungen (39) p. 640 und wegen $f = 0$:

$$(q r \alpha) = \sqrt{6}\,\Delta^4, \qquad (r \alpha p) = 4\sqrt{6}\,\psi\Delta^2,$$
$$(\alpha p q) = 16\sqrt{6}\,\psi^2, \quad -(p q r) = -24\,\Omega\,\Delta.$$

Setzen wir also:

(66) $$\varkappa_0 = \frac{4\psi}{\Delta^2},$$

so resultiren in Rücksicht auf die für Ω bestehende Identität (p. 640) *die folgenden Formeln, auf denen im Wesentlichen unsere späteren Erörterungen beruhen:*

$$\frac{(r\alpha p)}{(q r \alpha)} = \varkappa_0, \quad \frac{(\alpha p q)}{(q r \alpha)} = \varkappa_0^2, \quad \frac{(p q r)}{(q r \alpha)} = \pm\sqrt{\varkappa_0^3 - \tfrac{1}{2} S \varkappa_0 + \tfrac{1}{3} T}.$$

Die Gleichung (65) geht also über in*):

(67) $$0 = \begin{vmatrix} 1 & \varkappa_1 & \varkappa_1^2 & \sqrt{\varphi(\varkappa_1)} \\ 1 & \varkappa_2 & \varkappa_2^2 & \sqrt{\varphi(\varkappa_2)} \\ 1 & \varkappa_3 & \varkappa_3^2 & \sqrt{\varphi(\varkappa_3)} \\ 1 & \varkappa_0 & \varkappa_0^2 & \sqrt{\varphi(\varkappa_0)} \end{vmatrix}.$$

Die jetzt rechts stehende Determinante endlich formt man mittelst der Substitution (61) leicht noch in der Art um, dass *die Bedingung dafür, dass die Punkte $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ in gerader Linie liegen, in der Form erscheint:*

(68) $$\begin{vmatrix} 1 & s_1^2 & s_1^4 & s_1 c_1 \Delta_1 \\ 1 & s_2^2 & s_2^4 & s_2 c_2 \Delta_2 \\ 1 & s_3^2 & s_3^4 & s_3 c_3 \Delta_3 \\ 1 & s_0^2 & s_0^4 & s_0 c_0 \Delta_0 \end{vmatrix} = 0,$$

wo wieder s_i, c_i, Δ_i bez. für sin am u_i, etc. geschrieben ist, oder nach dem Additionstheoreme der elliptischen Functionen (p. 606):

(69) $$u_1 + u_2 + u_3 + u_0 = -0 \quad (\text{mod. } \omega, \omega').$$

Damit hätten wir für die Schnittpunkte der Grundcurve mit einer Geraden wieder die Gleichung (36) p. 630 erhalten; gleichzeitig ergibt sich aber, dass die Grösse u_0 mit der dort durch ϑ bezeichneten Grösse identisch ist. *Die Argumente der neun Wendepunkte sind daher durch die Werthe*

(70) $$-\tfrac{1}{3} u_0 + \tfrac{1}{3}(p\omega + q\omega')$$

*) Das Vorzeichen in den Gliedern der letzten Horizontalreihe kann man noch beliebig wählen. Man muss aber ein bestimmtes Vorzeichen nehmen, sobald man elliptische Functionen einführt; und zwar ist dasselbe dann durch die Gleichungen (60) und (62) völlig gegeben.

gegeben, wo u_0 bestimmt ist durch die Gleichungen):*

$$(71)\quad \begin{aligned} &\varkappa'' \sin^2 \operatorname{am} u_0 + \varkappa''' \cos^2 \operatorname{am} u_0 = \frac{4\psi}{\Delta^2} \\ &\sin \operatorname{am} u_0 \cos \operatorname{am} u_0 \Delta \operatorname{am} u_0 = \frac{4\sqrt{6}}{(\varkappa''' - \varkappa'')\sqrt{\varkappa''' - \varkappa'}} \frac{\Omega}{\Delta^3}. \end{aligned}$$

Hier sind $\varkappa'$, $\varkappa''$, $\varkappa'''$ die Wurzeln der Gleichung (59); *Δ, ψ, Ω bezeichnen die bekannten Covarianten der Grundcurve, geschrieben in den Coordinaten des Punktes x, dessen Tangentialpunkt bei der Parameterdarstellung* (57) *zum Büschelscheitel gewählt wurde.*

Um die Bestimmung der Wendepunkte auszuführen, hat man sonach nur noch die Dreitheilungsgleichung zu lösen, welche $\sin \operatorname{am} \frac{1}{3} u_0$ durch $\sin \operatorname{am} u_0$ bestimmt; d. h. *die Werthe, welche die Function $\sin \operatorname{am} u$ für die Argumente* (70) *der neun Wendepunkte annimmt, sind die Wurzeln der Gleichung 9ten Grades für s:*

$$(72)\quad \frac{1}{\Delta}\sqrt{\frac{4\psi - \varkappa'''\Delta^3}{\varkappa'' - \varkappa'''}} = s \cdot \frac{3 - 4(1+k^2)s^2 + 6k^2s^4 - k^4s^8}{1 - 6k^2s + 4k^2(1+k^2)s^6 - 3k^4s^8},$$

wo k^2 sich in der oben angegebenen Weise aus $\varkappa'$, $\varkappa''$, $\varkappa'''$ bestimmt. Die Auflösung dieser Gleichung lässt sich auf die Auflösung der Gleichung $G(\varkappa, \lambda) = 0$ zurückführen, mit deren Hülfe wir früher die Wendepunkte bestimmten, wie weiterhin noch gezeigt werden soll. —

Wie schon früher hervorgehoben, gestalten sich nun alle diese Untersuchungen über die Einführung der elliptischen Functionen in die Theorie der Curven dritter Ordnung bedeutend durchsichtiger, wenn man statt der Functionen s, c, Δ eine andere gewöhnlich mit $p(u)$ bezeichnete doppelt periodische Function von u und deren Differentialquotienten nach u einführt.**) Es ist dies die Function, aus welcher direct die Umkehrung des folgenden Integrals erwächst:

$$(73)\quad u = \int_{\infty}^{\varkappa} \frac{d\varkappa}{\sqrt{4\varkappa^3 - 2S\varkappa + \frac{4}{3}T}} \text{ für } \varkappa = p(u).$$

Dieselbe ist sonach dadurch ausgezeichnet, dass sie in verhältnissmässig rationaler Form von den Invarianten S und T der Curve abhängt, und dass *ihre Einführung nicht die Lösung der cubischen Gleichung $\varphi(\varkappa) = 0$ voraussetzt.* Die Differentialquotienten von

---

*) Vgl. für diese Umformungen auch den mehrfach erwähnten Aufsatz von Clebsch über die Steiner'schen Polygone, Crelle's Journal, Bd. 63.

**) Es ist dies die Function, welche Weierstrass in seinen Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen benutzt, und welcher manche Vorzüge vor den Jacobi'schen Functionen s, c, Δ zukommen. Ueber die für diese Function geltenden Fundamentalformeln vgl. die in Berlin erschienenen Inauguraldissertationen von Müller, Simon (1867) und Kiepert (1870).

$p(u)$ nach u sollen im Folgenden immer durch $p'(u)$, $p''(u)$ . . . bezeichnet werden; für letztere bestehen dann nach (73) folgende Relationen, wenn das Argument u der Kürze wegen fortgelassen wird:

$$(74)\quad \begin{cases} p'^2 = 4p^3 - 2Sp + \frac{1}{3}T \\ p'' = 6p^2 - S \\ p''' = 6(pp' + p'p) = 12pp' \\ p^{(4)} = 6(pp'' + 2p'^2 + p''p) = 30p^2 - 9Sp + 4T \\ p^{(5)} = 6(pp''' + 3p'p'' + 3p''p' + p'''p) = 36p'(7p^2 - S) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p^{(n+2)} = 6\left(pp^{(n)} + \frac{n}{1}p'p^{(n-1)} + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2}p''p^{(n-2)} + \dots + p^{(n)}p\right). \end{cases}$$

Setzen wir also in (57) jetzt $\varkappa = p(u) = p$, $\lambda = 1$, so erhalten wir *die Parameterdarstellung der Grundcurve in folgender Form:*

$$(75)\qquad \varrho y_i = -4m_i + 4l_ip + \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,n_ip' + \tfrac{1}{6}\Delta x_ip''.$$

Man kann nach dem Früheren die Function p leicht mit sin am u in Zusammenhang bringen; und zwar geschieht dies (in analoger Weise, wie oben $\varkappa$ durch $\sin^2 \mathrm{am}\, u$ vermöge (61) ausgedrückt wurde) durch die Substitution:

$$(76)\quad \begin{aligned} p(u) &= (\varkappa'' - \varkappa''')\sin^2 \mathrm{am}\left(u\sqrt{\varkappa''' - \varkappa'} + \tfrac{1}{2}\omega'\right) + \varkappa''' \\ &= \frac{\varkappa''' - \varkappa'}{\sin^2 \mathrm{am}\,(u\sqrt{\varkappa''' - \varkappa'})} + \varkappa'''. \end{aligned}$$

In der That wird dann $p(u) = \infty$ für $u = 0$, wie es nach (73) sein muss. Ferner erkennt man, dass der Function p die Perioden $\frac{\omega}{\sqrt{\varkappa''' - \varkappa'}}$ und $\frac{\omega'}{\sqrt{\varkappa''' - \varkappa'}}$ zukommen, wenn letztere Grössen wie auf p. 605 definirt sind; und durch Umkehrung ergibt sich aus (76) nach (61) und (63):

$$u = \int_{\varkappa'''}^{\varkappa} \frac{d\varkappa}{\sqrt{4\varkappa^3 - 2S\varkappa + \frac{1}{3}T}} - \frac{\omega'}{2\sqrt{\varkappa''' - \varkappa'}}.$$

Nun ist aber bei passender Wahl des Integrationsweges*):

$$\omega + \frac{\omega'}{2} = -\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{d\mu}{\sqrt{\mu(1-\mu)(1-k^2\mu)}} = -\sqrt{\varkappa''' - \varkappa'}\int_{\varkappa'''}^{\infty}\frac{d\varkappa}{p'}$$

und da $p(u)$ die Perioden $\frac{\omega}{\sqrt{\varkappa''' - \varkappa'}}$, $\frac{\omega'}{\sqrt{\varkappa''' - \varkappa'}}$ hat, können wir also setzen:

$$u = \int_{\varkappa'''}^{\varkappa}\frac{d\varkappa}{p'} - \int_{\varkappa'''}^{\infty}\frac{d\varkappa}{p'} = \int_{\infty}^{\varkappa}\frac{d\varkappa}{p'},$$

*) Vgl. z. B. Königsberger, a. a. O., Theil I, p. 312.

wie es nach Gleichung (73) sein soll. Als Fundamentalperioden von $p(u)$ erkannten wir die Grössen:

$$w = \frac{\omega}{\sqrt{\varkappa''' - \varkappa'}}, \quad w' = \frac{\omega'}{\sqrt{\varkappa''' - \varkappa'}};$$

für sie ergeben sich aus (76) die einfachen Relationen:

$$p\left(\frac{w}{2}\right) = \varkappa', \quad p\left(\frac{w'}{2}\right) = \varkappa''', \quad p\left(\frac{w + w'}{2}\right) = \varkappa''.$$

Setzt man die Theorie der Function $p(u)$ als bekannt voraus, so gestaltet sich nun die Aufstellung der Wendepunktsgleichung äusserst einfach. Durch ein Verfahren, welches dem bei Aufstellung der Gleichungen (65) und (67) benutzten analog ist, erhält man zunächst, ausgehend von den Gleichungen (75), *die Bedingung dafür, dass drei Punkte* $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ *in einer Geraden liegen, für* $p_i = p(u_i)$ *in der Form*:

$$(77) \qquad \begin{vmatrix} 1 & p_1 & p_1' & p_1'' \\ 1 & p_2 & p_2' & p_2'' \\ 1 & p_3 & p_3' & p_3'' \\ 1 & p_0 & p_0' & p_0'' \end{vmatrix} = 0,$$

wo analog wie in (66) und (67):

$$p_0 = \varkappa_0 = \frac{4\psi}{\Delta^2}, \quad p_0' = -16\sqrt{\tfrac{3}{2}}\,\frac{\Omega}{\Delta^3}, \quad p_0'' = \frac{96\psi^2}{\Delta^4} - S,$$

so dass die zwischen p_0, p_0', p_0'' bestehenden Relationen (74) in Folge der zwischen Ω, f, Δ, ψ bestehenden Identität erfüllt sind. Hiermit ist uns der Werth von $p_0 = p(3u)$, wo u das Argument eines Wendepunktes ist, rational gegeben; zur Bestimmung der Wendepunkte selbst haben wir also nur noch $p(3u)$ durch $p(u)$, d. h. $p(u_0)$ durch $p(\frac{1}{3}u_0)$ auszudrücken. Nun ist aber allgemein:

$$(78) \qquad p(nu) = p(u) - \frac{\psi_{n-1}(u) \cdot \psi_{n+1}(u)}{\psi_n(u) \cdot \psi_n(u)}.$$

wenn die Function $\psi_\varrho(u)$ durch folgende Determinante definirt ist*):

$$\psi_\varrho(u) = \frac{(-1)^{\varrho-1}}{[2!\,3!\dots(\varrho-1)!]^2} \begin{vmatrix} p' & p'' & \dots & p^{(\varrho-1)} \\ p'' & p''' & \dots & p^{(\varrho)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p^{(\varrho-1)} & p^{(\varrho)} & \dots & p^{(2\varrho-3)} \end{vmatrix}.$$

Für $n = 3$ erhält man hieraus unter Benutzung von (74):

$$(79) \qquad p(3u) = p + p'^2\,\frac{12pp'^2p'' - 3p'^4 - p''^3}{12pp'^2 - p''^2},$$

*) In dieser Form sind die Theilungsgleichungen von Kiepert aufgestellt: Crelle's Journal, Bd. 76, p. 21.

oder nach einer einfachen Umformung für $p(3u) = p_0 = \frac{4\psi}{\Delta^2}$:*)

$$(80) \qquad \left(\frac{4\psi}{\Delta^2} - p - p'^2 p''\right)\left(12pp'^2 - p''^2\right) + 4p'^6 = 0.$$

Dies ist, wenn man für p'^2, p'' nach (74) *ihre in p rationalen Ausdrücke einführt, die Gleichung neunten Grades in p [oder für das Verhältniss $\varkappa : \lambda$ in den Gleichungen* (57)], *welche die vom Punkte $N = 0$ nach den neun Wendepunkten gehenden Strahlen des Büschels $p a_x^2 a_y - \alpha_x^2 \alpha_y = 0$ bestimmt, wenn x ein beliebiger Punkt der Curve ist.* Die Coëfficienten derselben sind allein von den Invarianten S, T und den Covarianten ψ, Δ^2 abhängig. *Die Gleichung* (79) *kann also auch als das Resultat der Elimination der y_i aus den drei Gleichungen:*

$$f(y) \equiv a_y^3 = 0, \quad \Delta(y) \equiv \alpha_y^3 = 0, \quad p a_x^2 a_y - \alpha_x^2 \alpha_y = 0$$

aufgefasst werden.

Es sei hier noch bemerkt, dass *der Parameterwerth $p = p_0$ selbst dem Mittelpunkte $N = 0$ unseres Strahlbüschels zukommt.* Setzt man nämlich in (57) $\varkappa = 4\psi$, $\lambda = \Delta^2$, so wird:

$$\varrho y_i = \Delta \left\{(16\psi^2 - \tfrac{1}{6} S \Delta^4) x_i - 4\Delta^3 m_i + 16\psi\Delta l_i + 24 n_i \Omega\right\};$$

nach Gleichung (37) ist aber für $f = 0$:

$$24\Omega n_i = (16\psi^2 - \tfrac{1}{6} S\Delta^4) x_i - 4\Delta^3 m_i + 16\psi\Delta l_i,$$

so dass die y_i in der That zu den n_i proportional werden. Es folgt dies übrigens auch wieder aus dem Additionstheoreme. Da nämlich dem Punkte x das Argument Null zukommt ($p = \infty$), so hat man, wenn v das Argument von $N = 0$ ist, für die Schnittpunkte der Tangente von x mit $f = 0$:

$$0 + 0 + v + u_0 \equiv 0;$$

also $v \equiv - u_0$, und $p(v) = p(-u_0) = p(u_0)$.

Die Auflösung der Gleichung (80) *oder* (79) hängt nun bekanntlich von der Lösung der speciellen Dreitheilungs-Gleichung ab, welche für $u_0 = 0$, d. i. $p_0 = \infty$ aus (79) erhalten wird, d. h. von der Gleichung:

$$(81) \qquad 12pp'^2 - p''^2 = 0,$$

oder wegen (74) von der Gleichung:

$$(81^*) \qquad p^4 - Sp^2 + \tfrac{1}{3} Tp - \tfrac{1}{12} S^2 = 0.$$

---

*) Man könnte diese Gleichung auch durch Grenzübergang aus (77) herleiten; doch würde man dann zunächst eine Gleichung 12ten Grades für p erhalten, aus der noch ein cubischer Factor abzusondern wäre. — Die Einführung der elliptischen Functionen macht aber eben solche directe Rechnungen und Eliminationen überflüssig; und besonders ist hier die Benutzung der Function $p(u)$ wegen deren Zusammenhang mit der in (57) vorkommenden Irrationalität von Vortheil.

In letzterer aber braucht man nur $p = -\frac{\varkappa}{\lambda}$ zu setzen, um wieder die Gleichung $G(\varkappa, \lambda) = 0$ zu erhalten, welche uns früher zur Bestimmung der Wendepunkte diente (vgl. p. 566 ff.). Die vier Wurzeln p_1, p_2, p_3, p_4 dieser Gleichung geben uns die Werthe:

$$p_1 = p\left(\frac{w}{3}\right), \quad p_2 = p\left(\frac{w'}{3}\right), \quad p_3 = p\left(\frac{w + w'}{3}\right), \quad p_4 = p\left(\frac{w + 2w'}{3}\right).$$

Für $p_0 = \infty$ oder $u_0 = 0$ wird $\Delta = 0$, d. h. die Punkte x und N liegen in einem Wendepunkte; und dann gibt die Gleichung (81) vier der anderen acht Wendepunkte, von denen keine zwei mit jenem ersten Wendepunkte in gerader Linie liegen dürfen. Wie nun die Wurzeln der Gleichung (80) aus den Grössen p_1, p_2, p_3, p_4 wirklich zu bilden sind, wird in der Theorie der elliptischen Functionen gelehrt und soll hier nicht weiter ausgeführt werden.*)

Man führt die Auflösung der Gleichung (80) auch leicht in anderer Weise auf die Gleichung $G(\varkappa, \lambda) = 0$ zurück; und es gelingt dann, die Wurzeln von (80) an der Hand geometrischer Ueberlegungen wirklich anzugeben. Setzt man nämlich in (80) $p = \frac{\alpha_x^2 \alpha_y}{a_x^2 a_y}$, so stellt diese Gleichung in den Veränderlichen y eine Curve 9ter Ordnung dar, welche in die Verbindungslinien von $N = 0$ mit den 9 Wendepunkten zerfällt. Je drei dieser Geraden nun, welche $N = 0$ mit drei in gerader Linie liegenden Wendepunkten verbinden, schneiden f noch in drei weiteren Punkten; und es ist sofort ersichtlich, dass diese letzteren drei Punkte auf einem Kegelschnitte liegen, welcher die Grundcurve im Punkte $N = 0$ zweipunktig berührt. Entsprechend den vier Wendepunktsdreiecken, welche nach dem Früheren durch

$$p_1 f - \Delta = 0, \quad p_2 f - \Delta = 0, \quad p_3 f - \Delta = 0, \quad p_4 f - \Delta = 0$$

dargestellt sind, gibt es auch vier Systeme $(\Phi_i = 0)$ von je drei Kegelschnitten, so dass jedes solche System zusammen mit dem zugehörigen Wendepunktsdreiecke durch alle Schnittpunkte beregter Curve neunter Ordnung mit $f = 0$ hindurchgeht. Die linke Seite der Gleichung (80) kann daher mit Hülfe von $f(y) = 0$ auf vier verschiedene Weisen in zwei Factoren

*) Ueber die Lösung der Theilungsgleichungen für $p(u)$ vgl. Kiepert: Crelle's Journal, Bd. 76, p. 34 ff.; über die entsprechenden (von Abel behandelten) Probleme bei sin am u vgl. z. B. Königsberger, a. a. O., Th. II, p. 210. — Die Dreitheilungsgleichung ist auch ein besonderer Fall der von Hesse (Crelle's Journal, Bd. 34) behandelten Gleichungen 9ten Grades. Verfolgt man die zur Lösung der letzteren nöthigen Operationen an dem geometrischen Bilde einer C_3, so erkennt man ebenfalls, dass die aufzustellende Gleichung 4. Grades hier durch $G(\varkappa, \lambda) = 0$ gegeben ist. Ueber diese Hesse'schen Gleichungen vgl. auch Clebsch: Binäre Formen, p. 234 ff.

$$(p_i f - \Delta) \,.\, \Phi_i$$

zerspalten werden, entsprechend den vier Wurzeln der speciellen Theilungsgleichung (81). *Letztere gibt also auch hier wieder die Bestimmung der Wendepunktsdreiecke.* Um nun die Wurzeln von (80) zu finden, hat man zwei dieser Dreiecke in lineare Factoren aufzulösen, was nach den Angaben auf p. 597 geschieht. Wir bestimmen also zunächst die Schnittpunkte einer beliebigen Geraden, für welche wir die Tangente von x wählen, mit den Seiten eines Dreiecks: $p_i f(y) - \Delta(y) = 0$; d. h. wir setzen in letzterer Gleichung $y = \Delta x + \varrho u$ und bilden die so entstehende cubische Gleichung für ϱ, welche in Rücksicht auf die Relationen (p. 635 ff.):

$$f = 0,\; a_x^2 a_u = 0,\; \alpha_x^2 \alpha_u = 0,\; a_x a_u^2 = -\tfrac{1}{6}\Delta^3,\; \alpha_x \alpha_u^2 = -\tfrac{2}{3}\Delta\psi,\; a_u^3 = 0$$

folgende Gestalt annimmt:

$$\varrho^3 \alpha_u^3 - \varrho^2 \Delta^2 (2\psi - \tfrac{1}{2}\Delta^2 p_i) + \Delta^4 = 0. \tag{82}$$

In ihr haben wir noch den Term α_u^3 zu berechnen. Aus der Gleichung

$$a_x a_u^2 = -\tfrac{1}{6}\Gamma_1 - \tfrac{2}{3} f\psi$$

ergibt sich aber durch Polarenbildung für $u_u = N_x'^{\,4} u_{u'}$:

$$a_y a_u^2 + 8\, a_x a_u a_{u'} N_x'^{\,3} N_y' = -\tfrac{1}{6}\Sigma \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x_i} y_i - 4 f \psi_x^5 \psi_y - 2\psi a_x^2 a\;.$$

Für $y_i = u_i$ verschwinden wegen $a_x^2 a_u = 0$, $\alpha_x^2 \alpha_u = 0$ die aus Γ_1 entstehenden Glieder der rechten Seite, und es wird nach Gleichung (28) p. 571:

$$a_u^3 = -4 f\Omega - 8\, a_x a_u a_{u'} N_x'^{\,3} N_u'\,.$$

Hierin ist:

$$2\, a_x a_u a_{u'} N_x'^{\,3} N_u' = a_x a_u (ab\alpha)(\alpha_x b_u + \alpha_u b_x)\, b_x \alpha_x\,. \tag{83}$$

Das erste Glied des rechts stehenden Ausdruckes ändert sein Vorzeichen bei Vertauschung von a und b, verschwindet also identisch; das zweite Glied ist ebenfalls Null, denn man hat:

$$\begin{aligned}(ab\alpha)\, a_x b_x^2 \alpha_x a_u \alpha_u &= \tfrac{1}{2}(ab\alpha)(b_x a_u - a_x b_u)\, a_x b_x \alpha_x \alpha_u \\ &= \tfrac{1}{2}(ab\alpha)\left\{(ac\beta)\, b_x - (bc\beta)\, a_x\right\} a_x b_x \alpha_x \alpha_u c_x^2 \beta_x^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(ab\alpha)\left\{(ab\beta)\, c_x - (abc)\, \beta_x\right\} a_x b_x \alpha_x \alpha_u c_x^2 \beta_x^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(Pf - Q\Delta)\,.\end{aligned}$$

Nun ist aber wegen der Vertauschbarkeit von a, b, c:

$$\begin{aligned}Q &= \tfrac{1}{3}(abc)\left\{(ab\alpha)\, c_x - (ac\alpha)\, b_x - (cb\alpha)\, a_x\right\} a_x b_x c_x \alpha_u \\ &= \tfrac{1}{3}\Delta\, \alpha_x^2 \alpha_u = 0\,.\end{aligned}$$

Es verschwindet daher auch der Ausdruck

$$\delta Q = \left\{(ab\alpha)(ab\beta)\beta_x b_x + 2(\alpha\beta\alpha)(\alpha\beta c)c_x^2\right\} a_x\beta_x\alpha_x\alpha_n$$
$$+ \tfrac{1}{2} S\,(abd)\,(abc)\,a_x b_x c_x^2 d_x d_n\,.$$

Auf der rechten Seite hat das letzte Glied den Werth $\frac{1}{6} S\Delta\, d_x^2 d_n$, verschwindet also; das zweite Glied entsteht (bis auf den Factor -2) aus dem auf p. 638 mit B' bezeichneten Terme, wenn man $y_i = n_i$ setzt, und hat somit den Werth (vgl. Gleichung (34) p. 639):

$$-\tfrac{1}{3}\,\alpha_l\alpha_x\alpha_n + \tfrac{2}{3}\,\Delta_1\,\alpha_x^2\alpha_n = \tfrac{1}{3}\,\Omega\,.$$

Das erste Glied von δQ ist aber P, und somit haben wir $\delta Q = P + \frac{1}{3}\Omega = 0$; d. h. die rechte Seite von (83) ist gleich $-\frac{2}{3}\Omega f$, und wir haben:

$$a_n^3 = -\tfrac{4}{3} f\Omega\,; \tag{84}$$

und hieraus wegen $\delta N = \delta\Omega = 0$:

$$\alpha_n^3 = -\tfrac{4}{3}\Delta\Omega\,. \tag{85}$$

Unsere cubische Gleichung (82) *geht daher über in:*

$$8\,\Omega\,\varrho^3 + 3\,\Delta\,(4\,\psi - \Delta^2 p_i)\,\varrho - 6\,\Delta^3 = 0\,, \tag{86}$$

eine Gleichung, deren Coëfficienten nur noch von den Grössen $p_0 = \frac{4\psi}{\Delta^2}$ und $p_0' = -16\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\Omega}{\Delta^3}$ abhängen. Bezeichnen wir entsprechend der Wurzel p_i von (81) die Wurzeln dieser Gleichung mit ϱ_i', ϱ_i'', ϱ_i''', so erhält man die Gleichungen der Seiten des zu p_i gehörigen Dreiecks, wenn man in der Gleichung $p_i a_z^2 a_y - \alpha_z^2\alpha_y = 0$ für z_k die Werthe $\Delta x_k + \varrho_i^{(h)} n_k$ einsetzt. Die Gleichungen dieser drei Seiten sind also gegeben durch:

$$\begin{aligned} &p_i\,(\Delta^2 a_x^2 + 2\,\varrho_i^{(h)}\Delta\, a_x a_n + \varrho_i^{(h)2} a_n^2)\,a_y \\ &-(\Delta^2\alpha_x^2 + 2\,\varrho_i^{(h)}\Delta\,\alpha_x\alpha_n + \varrho_i^{(h)2}\alpha_n^2)\,\alpha_y = 0\,, \end{aligned} \tag{87}$$

wenn man bez. $\varrho_i^{(h)} = \varrho_i'$, ϱ_i'', ϱ_i''' setzt. Durch drei eben solche Gleichungen, in denen nur p_i durch p_k, $\varrho_i^{(h)}$ durch $\varrho_k^{(h)}$ ersetzt sind, werden die Seiten des zur Wurzel p_k gehörigen Dreiecks dargestellt, wenn $\varrho_k^{(h)}$ die Wurzeln der aus (86) durch Vertauschung von p_i mit p_k entstehenden Gleichung bezeichnen. Der Schnittpunkt irgend einer Seite des einen mit irgend einer Seite des andern Dreiecks ist dann immer ein Wendepunkt, dessen Coordinaten t_i man in Function von p_i, p_k, $\varrho_i^{(h)}$, $\varrho_k^{(l)}$ berechnen kann; *aus diesen Coordinaten findet man dann eine Wurzel der Gleichung neunten Grades mittelst der Substitution:*

$$p = \frac{\alpha_x^2\alpha_t}{a_x^2 a_t}\,.$$

Zähler und Nenner in dem rechts stehenden Ausdrucke werden dabei ganze rationale Functionen zweier Wurzeln von (81) *und zweier Wurzeln der beiden zugehörigen Gleichungen* (86); *die Coëfficienten dieser Wurzeln*

erscheinen nach (87) *als Covarianten* 18ter *Ordnung von* f, *geschrieben in den Coordinaten des festen Punktes* x, *und lassen sich daher sämmtlich durch* Δ, ψ *und* Ω *ausdrücken.* Die wirkliche Berechnung dieser Coëfficienten kann mit Hülfe einiger symbolischen Rechnungen geschehen.

Nach diesen ausführlichen Erörterungen über die Dreitheilungs-Gleichung wird es kaum noch nöthig sein zu bemerken, dass in derselben Weise überhaupt die Theilungsgleichungen der elliptischen Functionen zur wirklichen Durchführung algebraischer Eliminationsprobleme benutzt werden können; denn sie geben das Resultat der Elimination sofort in fertiger Form, wenn nur die betreffende Function für das vielfache Argument, d. i. $p\,(n u)$, in ihrer Abhängigkeit von dem Punkte x und von anderen etwa noch vorkommenden willkürlichen Punkten dargestellt ist. Letzteres kann aber immer mit Hülfe des Additionstheorems für $p\,(u)$ geschehen, d. h. mit Hülfe der Formel:

$$(88)\quad p\,(u+v) = \frac{[p(u)+p(v)]\,[2\,p\,(u)\,p\,(v)-S]+\frac{4}{3}\,T-p'\,(u)\,p'\,(v)}{2\,[p\,(u)-p\,(v)]^2}\,.$$

Es mag dies hier nur noch an dem Beispiele der Fünftheilung erläutert werden. Stellen wir uns also die Aufgabe, diejenigen Kegelschnitte zu bestimmen, welche durch einen festen Punkt v gehen und $f=0$ in einem andern Punkte u vierpunktig berühren, so dass u bestimmt ist durch (vgl. p. 630):

$$5\,u+v+2\,u_0=0\,.$$

Hier wird für $p\,(v)=q$, da p eine gerade Function ist:

$$p\,(5\,u)=p\,(2\,u_0+v)=\frac{[p\,(2\,u_0)+q]\,[2\,p\,(2\,u_0)\,q-S]+\frac{4}{3}\,T-p'\,(2\,u_0)\,q'}{2\,[p\,(2\,u_0)-q]^2}\,,$$

wo:
$$p\,(2\,u_0)=p_0-\frac{1}{4}\,\frac{12\,p_0 p_0'^2-p_0''^2}{p_0'^2}$$
$$=-\frac{8\,\psi}{\Delta^2}+\frac{(96\,\psi^2-S\Delta^4)^2}{384\,\Omega^2\Delta^2}\,.$$

Auf der rechten Seite kann man noch setzen:

$$q=\frac{\alpha_x{}^2\alpha_z}{a_x{}^2a_z}\,,\quad q'=\sqrt{4\,q^3-2\,Sq+\tfrac{4}{3}\,T}\,,$$

wenn wir annehmen, dass z_i die ternären Coordinaten des Punktes q sind, und dass dem letzteren das positive Vorzeichen der Quadratwurzel zukommt. Insbesondere kann man den völlig beliebigen Punkt z mit x zusammenfallen lassen; dann wird $q=\infty$, also $v=0$, und wir erhalten:

$$p\,(5u)=p\,(2\,u_0)=-\frac{8\,\psi}{\Delta^2}+\frac{(96\,\psi^2-S\Delta^4)^2}{384\,\Omega^2\Delta^2}\,.$$

Setzt man dies in die Theilungsgleichung (78) für $n=5$ ein, so

resultirt eine Gleichung vom Grade 25 in p. *Die letztere ist das Resultat der Elimination der y_i, dy_i, d^2y_i, d^3y_i, d^4y_i aus den Gleichungen:*

$$p\,a_x^2 a_y - \alpha_x^2 \alpha_y = 0\,, \quad a_y^3 = 0\,, \quad a_y^2 a_{dy} = 0\,,$$

$$a_y^2 a_{d^2y} + 2\,a_y a_{dy}^2 = 0\,,$$

$$a_y^2 a_{d^3y} + 6\,a_y a_{dy} a_{d^2y} + 2\,a_{dy}^3 = 0\,,$$

$$a_y^2 a_{d^4y} + 8\,a_y a_{dy} a_{d^3y} + 12\,a_{dy}^2 a_{d^2y} + 6\,a_y a_{d^2y}^2 = 0$$

und derjenigen Gleichung, welche aussagt, dass der Punkt x mit y und den vier zu y benachbarten Punkten auf einem Kegelschnitte liegt (welche in bekannter Weise in Gestalt einer sechsgliedrigen Determinante geschrieben werden kann). Für $p = \frac{\alpha_x^2 \alpha_y}{a_x^2 a_y}$ erhält man so eine Curve 25ter Ordnung, welche in die 25 Verbindungslinien von $X = 0$ mit den Berührungspunkten der durch x gehenden Kegelschnitte zerfällt.

Wenn in der geschilderten Weise mit Hülfe der Theorie der elliptischen Functionen die algebraischen Gleichungen vollständig aufgestellt werden können, auf welche die oben behandelten Berührungsaufgaben führen, so lassen sich auch die Eliminationen, welche zur Bestimmung der Steiner'schen Punktepaare führen, in gleicher Weise erledigen; denn auch sie führten auf die Theilung der elliptischen Functionen: alle Punkte u, welche mit v ein zur Zahl n gehöriges Punktepaar bilden, waren bestimmt durch (p. 615):

$$u = v + \frac{1}{n}\,(pw + qw')\,.$$

Es ist hier nur zu bemerken, dass diese Bedingung von dem Argumente u_0 unabhängig ist; man kann aber der Einfachheit wegen den Punkt v immer mit dem völlig beliebigen Punkte $X = 0$ zusammenfallen lassen, d. h. $v = u_0$ annehmen (vgl. p. 655). Bezeichnen wir nun mit y_i die Coordinaten von v, mit z_i die von w, so ist sofort ersichtlich, dass die n-Theilungsgleichung der Function $p\,(u)$ hier das Resultat der Elimination der Grössen $x_i^{(1)}$, $x_i^{(2)}$, . . $x_i^{(2n)}$, z_i aus den folgenden Gleichungen darstellt:

$$(x^{(1)} x^{(2)} y) = 0\,, \quad (x^{(3)} x^{(4)} y) = 0\,, \; . \; . \; . \; (x^{(2n-1)} x^{(2n)} y) = 0\,,$$

$$(x^{(2)} x^{(3)} z) = 0\,, \quad (x^{(4)} x^{(5)} z) = 0\,, \; . \; . \; . \; (x^{(2n)} x^{(1)} z) = 0\,,$$

$$a_{x^{(1)}}^3 = 0\,, \quad a_{x^{(2)}}^3 = 0\,, \; . \; . \; . \; a_{x^{(2n)}}^3 = 0\,,$$

$$a_z^3 = 0\,, \quad p\,a_x^2 a_z - \alpha_x^2 \alpha_z = 0\,.$$

Die Endgleichung für dieses Problem ist sonach von der betreffenden Gleichung bei den Berührungsaufgaben dadurch unterschieden, dass die Function $p\,(n\,u)$ nicht von Functionen $p\,(m\,u_0)$ abhängt, sondern (für $v = u_0$) nur von der Grösse $p\,(u_0)$.

Sechste Abtheilung.

Die Geometrie auf einer algebraischen Curve und deren Zusammenhang mit der Theorie der Abel'schen Integrale.

I. Die eindeutigen Transformationen einer algebraischen Curve.

In den sogenannten Cremona'schen Transformationen (p. 474) haben wir ein Mittel kennen gelernt, zwei Ebenen durch eine nicht lineare Transformation so auf einander zu beziehen, dass bis auf einzelne Ausnahmepunkte jedem Punkte der einen nur ein Punkt der anderen entspricht, und umgekehrt. Andererseits erkannten wir an dem Beispiele der Beziehung zwischen der Hesse'schen und Steiner'schen Curve einer beliebigen Fundamentalcurve die Möglichkeit, zwei einzelne Curven eindeutig auf einander zu beziehen, ohne dass diese Beziehung für die ganze Ebene eindeutig gewesen wäre. Das Studium solcher Transformationen einer einzelnen algebraischen Curve soll uns nun zunächst beschäftigen. Wir werden dabei weiterhin von selbst zu mancherlei Anwendungen des Gefundenen auf früher berührte Punkte geführt werden, sowie auf manche Ergänzungen zu früheren Untersuchungen über die Geometrie auf einer Curve. Besonders aber sollen uns verschiedene Beweise für die Erhaltung des Geschlechtes bei diesen eindeutigen Transformationen eingehend beschäftigen.

Eine Transformation

$$(1) \qquad \varrho x_1 = \varphi_1(y), \quad \varrho x_2 = \varphi_2(y), \quad \varrho x_3 = \varphi_3(y),$$

wo die φ_i homogene Functionen gleicher Ordnung von y_1, y_2, y_3 sind, möge eine Curve $f(x) = 0$ in eine andere $F(y) = 0$ überführen. Soll dies nun durch eine wechselseitig *ein*deutige Beziehung möglich sein, so muss man durch Verbindung der Gleichungen (1) mit $F(y) = 0$ wieder zu der Gleichung $f = 0$ zurückkehren können und im Laufe des dazu nöthigen Eliminationsprocesses die y mit ganzen rationalen Functionen der x proportional finden, so dass:

$$(2) \qquad \mu y_1 = \Phi_1(x), \quad \mu y_2 = \Phi_2(x), \quad \mu y_3 = \Phi_3(x).$$

Die Gleichung $F = 0$ ist dann das Resultat der Elimination der Grössen μ, x_1, x_2, x_3 aus diesen Gleichungen (2) und der Gleichung

$f(x) = 0$; und wenn man umgekehrt die Substitution (2) in F ausführt, so muss $F(y)$ bis auf einen Factor in $f(x)$ übergehen, d. h. es ist:

$$\mu^\nu F(y_1, y_2, y_3) = F(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = M \cdot f, \tag{3}$$

wo ν *die Ordnung von* F *bedeutet.* Die letztere lässt sich sehr einfach bestimmen. Den Schnittpunkten einer Curve des Netzes:

$$u_1\Phi_1 + u_2\Phi_2 + u_3\Phi_3 = 0 \tag{4}$$

mit $f = 0$, die nicht allen Curven des Netzes gemeinsam sind, entsprechen nämlich die Schnittpunkte der Geraden

$$u_y \equiv u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 = 0$$

mit $F(y) = 0$. Ist aber die Zahl der ersteren (welche allein von gegebenen Elementen abhängt) gleich ν, so muss die der letzteren wegen der Eindeutigkeit unserer Transformation ebenso gross sein: *Die Zahl der beweglichen Schnittpunkte der Curven des Netzes* (4) *mit* $f(x) = 0$ *bestimmt also die Ordnung der Curve* $F(y) = 0$.

Die in solcher Weise hergestellte, für die Punkte von f eindeutige Transformation kann man sich auf ähnliche Art geometrisch vermittelt denken, wie die Cremona'schen Transformationen. Zunächst nämlich wollen wir uns die ganze Ebene E_x der Punkte x vermöge der Gleichungen (2) in eine Ebene E_y der Punkte y übergeführt vorstellen. Dann entspricht offenbar jedem Punkte von E_x *ein* Punkt von E_y; umgekehrt aber sind jedem Punkte von E_y, den wir als Schnittpunkt zweier Linien $v_y = 0$, $w_y = 0$ bestimmt annehmen, die s^2 Schnittpunkte der beiden Curven

$$v_1\Phi_1 + v_2\Phi_2 + v_3\Phi_3 = 0 \quad \text{und} \quad w_1\Phi_1 + w_2\Phi_2 + w_3\Phi_3 = 0$$

in E_x zugeordnet, wenn s die Ordnung der Curven $\Phi_i = 0$ bedeutet. Insbesondere kann es eintreten, dass allen Curven des Netzes (4) eine Zahl von Punkten gemeinsam ist; dann werden diese gemeinsamen Punkte eine gewisse Anzahl von jenen s^2 Schnittpunkten absorbiren, und man wird (wie bei den Cremona'schen Transformationen) nur die übrigen, beweglichen Schnittpunkte der beiden Curven $\Sigma v_i \Phi_i = 0$, $\Sigma w_i \Phi_i = 0$ dem Schnittpunkte der Geraden $v_y = 0$, $w_y = 0$ entsprechend setzen. Ist die Zahl dieser beweglichen Schnittpunkte gleich Eins, so hat man eine Cremona'sche Transformation. Die gemeinsamen Punkte der Curven Φ treten nun wieder — wie wohl kaum noch einmal ausgeführt zu werden braucht — als *Fundamentalpunkte* für die Abbildung auf (vgl. p. 481), und jedem solchen Punkte entspricht in E_y eine *Fundamentalcurve* vom Geschlechte Null; und letztere ist von der r^{ten} Ordnung, wenn der betreffende Fundamentalpunkt in E_x r-facher Punkt für jede der Curven Φ war.

Einer beliebigen Curve $f = 0$ n^{ter} Ordnung in E_x entspricht nun eine Curve in E_y, deren Gleichung sich durch Elimination der x_i und

der Grösse μ aus den Gleichungen (2) und aus $f = 0$ ergibt; von ihr wird sich aber eine Fundamentalcurve h^{ter} Ordnung i-fach absondern, wenn $f = 0$ durch einen entsprechenden Fundamentalpunkt i-mal hindurchging. Durchläuft umgekehrt ein Punkt in E_y eine Curve $F(y) = 0$, so entsprechen jedem Punkte dieser Curve F β Punkte in E_x, wenn β die Zahl der beweglichen Schnittpunkte je zweier Curven des Netzes (4) ist; und dieses Aggregat von β Punkten durchläuft diejenige Curve $\chi = 0$, welche in E_x der Curve F zugeordnet ist. Ist aber $F(y) = 0$ gerade wieder die aus einer Curve $f(x) = 0$ in angegebener Weise entstandene Curve, so muss auch umgekehrt die zu $F(y) = 0$ gehörige Curve $\chi(x) = 0$ auf $f(x) = 0$ zurückführen, d. h. χ muss einen Factor f enthalten; und *dieses Vorkommniss ist für uns von besonderer Wichtigkeit.*

Der zu x gehörige Punkt y war als Träger des Strahlbüschels bestimmt, welcher in E_y dem durch x gehenden Büschel von Curven Φ zugeordnet ist. Man erkennt daher aus dem Vorstehenden sofort, dass *die Transformation einer Curve* $f(x) = 0$ *nur eine eindeutige sein kann, wenn alle Curven des Netzes* (4), *welche durch einen beliebigen Punkt von f gehen, sich ausserdem nicht mehr auf f schneiden*)*, es sei denn in solchen Punkten, die *alle* Curven des Netzes mit f gemein haben. *Ferner darf selbstverständlich die Functionaldeterminante der Φ_i nicht identisch verschwinden;* denn sonst würden die Curven im Allgemeinen kein Netz bilden.**) Während also ein Basispunkt eines aus dem Netze herausgehobenen Büschels die Curve f durchläuft, beschreiben die übrigen beweglichen Basispunkte dieses Büschels eine andere Curve; und zwar wird letztere, wie sofort ersichtlich, durch Nullsetzen des in (3) mit M bezeichneten Ausdrucks dargestellt.

Insbesondere kann es nun eintreten, dass sich in x alle Curven des betreffenden Büschels berühren (wo dann eine dieser Curven in x einen Doppelpunkt hat); in dem Falle liegt früheren Sätzen zufolge x auf der Jacobi'schen Curve des Netzes (p. 382). Zugleich rückt auch einer jener übrigen auf $M = 0$ gelegenen Basispunkte des Büschels unendlich nahe an x heran, d. h. *die Curve $M = 0$ geht durch alle Schnittpunkte von $f = 0$ mit der* Jacobi'*schen Curve des Netzes* (4)*;* ein Satz, der für uns weiterhin von Wichtigkeit werden wird. Wir leiten hier sogleich noch einige andere ebenfalls später zu benutzende Sätze über die Curve $M = 0$ ab. Aus (3) folgt, dass $M = 0$ *von der Ordnung $\nu s - n$ ist,* wenn wieder ν die Ordnung von

---

*) Dies tritt jedoch z. B. immer ein, wenn die drei Curven $\Phi_i = 0$ adjungirte Curven $(n - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung für eine sogenannte *hyperelliptische* Curve n^{ter} Ordnung sind; man kann daher bei letzteren ein Netz solcher Curven nicht zur eindeutigen Transformation derselben benutzen, vgl. die beiden folgenden Abschnitte.

**) Vgl. die erste Anmerkung auf p. 377.

F, s die der Φ_i bedeutet. Ferner verschwindet die linke Seite von (3) für einen gemeinsamen r-fachen Punkt der Φ_i νr-fach; dasselbe muss für die rechte Seite gelten. Ist also dieser Punkt i-facher Punkt von f, so erkennt man, dass $M = 0$ *in jedem i-fachen Punkte von f, welcher r-facher Punkt für jede Curve Φ_i ist, einen $(\nu r - i)$-fachen Punkt hat.*

Die Curve $M = 0$ wird nun auch von Wichtigkeit für die Bestimmung der vielfachen Punkte von $F(y) = 0$. Zunächst nämlich ist aus dem bei den Cremona'schen Transformationen Gesagten sofort klar, dass jeder vielfache Punkt von f, welcher nicht in einem Fundamentalpunkte der Ebene E_x liegt, zu einem in gleicher Weise vielfachen Punkte von F Veranlassung gibt, und weiter, dass jeder in einem Fundamentalpunkte von E_x gelegene i-fache Punkt von f (dessen Zweige getrennt verlaufen) in i einfache Punkte von F aufgelöst wird. Ist der betreffende Fundamentalpunkt in E_x von der r^{ten} Ordnung, so sind jene i einfachen Punkte auf F Schnittpunkte der zugehörigen Fundamentalcurve r^{ter} Ordnung mit F. Von dieser Fundamentalcurve wird F ausserdem noch in $\nu r - i$ Punkten getroffen, entsprechend dem $(\nu r - i)$-fachen Punkte, welchen $M = 0$ in jenem Fundamentalpunkte r^{ter} Ordnung besitzt; denn in E_x ist das Bild der Curve F nicht durch f allein, sondern durch f zusammen mit M gegeben. Alle diese Betrachtungen werden wir übrigens sogleich noch rein algebraisch bestätigt finden. Es können nun aber auf F auch neue Doppelpunkte entstehen, denen je zwei getrennte Punkte von f entsprechen; und zwar wird dies eintreten, wenn sich die durch einen (dadurch ausgezeichneten) Punkt x von f gehenden Curven Φ von selbst in einem zweiten Punkte von f treffen, d. h. wenn ein zweiter Basispunkt des Curvenbüschels, von dessen Grundpunkten einer auf f beweglich gedacht wurde, ebenfalls auf f liegt; und dies tritt eben in den Schnittpunkten von f mit dem Orte der übrigen Basispunkte, also mit M ein. Unter diesen Schnittpunkten sind, wie soeben gezeigt wurde, auch die Schnittpunkte der Jacobi'schen Curve des Netzes der Φ enthalten, in welchen zwei Basispunkte des Netzes einander benachbart sind, ohne dass beide genau auf f liegen; diese Punkte geben daher nicht zu Doppelpunkten von F Veranlassung.*) Somit haben wir den Satz:

Die Schnittpunkte von $M = 0$ mit $f = 0$, welche nicht in gemeinsamen Punkten der Curven des Netzes (4) *liegen, und welche nicht in die*

*) Dies würde nur eintreten, wenn die Verbindungslinie der beiden benachbarten Basispunkte, d. i. die gemeinsame Tangente der daselbst sich berührenden Curven Φ, mit der Tangente von f zusammenfallen sollte; man erkennt leicht aus den weiteren Entwicklungen des Textes, dass dann auf F ein Rückkehrpunkt entstehen würde.

Schnittpunkte der Jacobi'*schen Curve dieses Netzes mit* $f = 0$ *fallen, sind einander derartig paarweise zugeordnet, dass die Punkte eines jeden Paares sich bei der Transformation* (2) *zu einem Doppelpunkte der neuen Curve* $F = 0$ *vereinigen.*

Es bleibt uns nun nur noch übrig, die Anzahlen für die verschiedenen hier genannten Schnittpunktsysteme zu bestimmen, um dann sofort alle Hülfsmittel für einen directen Beweis des Geschlechtssatzes bereit zu haben, wie er weiterhin geführt werden soll. Wir werden dabei dann den letzterwähnten Satz auch noch algebraisch ableiten.

In derselben Weise treten in der Ebene E_y Fundamentalpunkte und in E_x Fundamentalcurven auf, wenn man von den Gleichungen (1) ausgeht; dieselben stehen aber nicht an sich zu den bei den Gleichungen (2) auftretenden, soeben besprochenen Fundamentalgebilden in Beziehung, sondern nur in Rücksicht auf die Curve $f = 0$; denn nur vermöge $f = 0$ kann man aus den Gleichungen (1) die y in Function der x rational berechnen (und umgekehrt), es sei denn, dass man es überhaupt mit einer Cremona'schen Transformation zu thun hat. *Die wirkliche Herleitung der Gleichungen* (1) *aus* (2), *sowie der Gleichung* $F = 0$ *aus* $f = 0$ kann man in folgender Weise bewerkstelligen. Man eliminire zuerst x_3 aus jeder der Gleichungen (2) vermöge $f = 0$; dadurch ergeben sich drei Gleichungen der Form $(i = 1, 2, 3)$:

$$\psi_i(x_1, x_2, \mu y_1, \mu y_2, \mu y_3) = 0. \tag{5}$$

Ferner eliminire man x_2 einmal aus $\psi_1 = 0$, $\psi_3 = 0$, einmal aus $\psi_2 = 0$, $\psi_3 = 0$; dies gibt zwei Gleichungen der Form:

$$\chi_1(x_1, \mu y_1, \mu y_2, \mu y_3) = 0, \quad \chi_2(x_1, \mu y_1, \mu y_2, \mu y_3) = 0; \tag{6}$$

und die Elimination von x_1 hieraus gibt die gesuchte Gleichung $F(y) = 0$, zunächst jedoch noch mit einem überflüssigen Factor behaftet; denn durch eine directe Abzählung würde man (nach p. 315 f.) die Ordnung ν von F grösser finden, als sie nach den weiterhin folgenden Angaben sein kann. Die Gleichungen (6) können wir nun auffassen als Gleichungen für die eine Veränderliche x_1, deren Resultante F verschwindet, die also eine gemeinsame Wurzel haben. Die letztere aber kann man in bekannter Weise rational berechnen*) in der Form:

$$\mu_1 x_1 = X_1(y_1, y_2, y_3),$$

wo μ_1 eine Function der y_i und von μ ist. In ähnlicher Weise lassen sich x_2 und x_3 finden:

$$\mu_2 x_2 = X_2(y_1, y_2, y_3), \quad \mu_3 x_3 = X_3(y_1, y_2, y_3).$$

*) Vgl. z. B. Salmon's introductory lessons, p. 73 ff. in Fiedler's Uebersetzung.

Man hat schliesslich diese Gleichungen nur noch durch Hinzufügen passender bez. durch Fortschaffen überflüssiger Factoren so einzurichten, dass auf den linken Seiten statt der μ_i immer *derselbe* Proportionalitätsfactor auftritt, wodurch dann die Gleichungen (1) vollständig hergestellt sind. —

Von besonderer Wichtigkeit in der Theorie der eindeutigen Transformationen ist nun der von Riemann aufgestellte, von uns schon mehrfach erwähnte und benutzte *Satz von der Erhaltung des Geschlechts einer Curve bei eindeutiger Umformung derselben* (vgl. p. 368). Wir haben für denselben schon früher einen Beweis erbracht, indem wir nach dem Vorgange Zeuthens überhaupt eine Relation zwischen den Geschlechtszahlen zweier Curven aufstellten, die mehrdeutig auf einander bezogen sind (p. 459). Dabei hatten wir aber die betrachteten Curven höchstens mit einfachen Doppel- und Rückkehrpunkten vorausgesetzt, während unser Satz auch auf Curven mit vielfachen Punkten anwendbar ist. Man wird überdies bei der Wichtigkeit des Satzes einen directen Beweis verlangen müssen. Andere Beweise sind im Laufe der Zeit in grosser Zahl gegeben worden; wir führen im Folgenden jedoch nur zwei solche an und beschränken uns darauf, am Schlusse dieses Abschnittes auf die übrigen kurz hinzuweisen.

Der Einfachheit halber wollen wir zunächst wieder voraussetzen, dass die Curve $f = 0$ d Doppel- und r Rückkehrpunkte habe, sonst aber keine Singularitäten. Die Curven $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, $\Phi_3 = 0$ seien von der Ordnung s; und wir nehmen der Allgemeinheit wegen an, dass alle drei eine Reihe von festen Punkten mit der Curve $f = 0$ gemein haben. Die Anzahl dieser gemeinsamen Punkte bezeichnen wir mit $\sigma + \tau$, wo σ die Zahl solcher Punkte ist, welche einfache Punkte von $f = 0$, τ die Zahl derjenigen, welche Doppel- oder Rückkehrpunkte von $f = 0$ sind. Die Zahl der beweglichen Schnittpunkte einer Curve des Netzes (4) mit f, und somit nach Obigem (p. 662) *die Ordnung von F ist dann:*

$$\nu = ns - \sigma - 2\tau,$$

wenn n die Ordnung von $f = 0$ bedeutet. Unter den Curven des Netzes (4), welche durch einen beliebigen Punkt x gehen, sind nun $2(\nu + p - 1)$ Curven enthalten, welche $f = 0$ in 2 benachbarten Punkten treffen, nämlich die $2(\nu + p - 1) - r$ berührenden Curven*) und die r durch die Rückkehrpunkte gehenden Curven des durch den Punkt x festgelegten Büschels. Zwei benachbarten Punkten auf f

*) Vgl. p. 375, 460 und 474. Eine diese Berührungspunkte auf f ausschneidende Curve kann man leicht nach der Anmerkung auf p. 460 bilden. — Vgl. auch Nöther: Math. Annalen, Bd. 8, p. 499.

entsprechen aber offenbar wieder zwei benachbarte Punkte auf F. Jenen $2(\nu + p - 1)$ Curven des Büschels entsprechen also in der Ebene E_y ebensoviele Gerade des durch y gehenden Strahlbüschels, welche F in zwei benachbarten Punkten treffen, wenn y dem Punkte x entspricht. Andererseits ist die Zahl dieser Geraden gegeben durch die Zahl der von y an F gehenden Tangenten und die Zahl der Verbindungslinien von y mit den Rückkehrpunkten von F; d. h. sie ist gleich $2(\nu + p - 1)$, wenn π das Geschlecht von F bedeutet. Aus der Gleichheit beider Zahlen folgt aber in der That:

$$p = \pi, \quad \text{q. e. d.*)}$$

Wir geben ferner einen *directen algebraischen Beweis***) für den Riemann'schen Satz, indem wir geradezu die Anzahl der vielfachen Punkte der Curve F bestimmen, und so das Geschlecht derselben berechnen. Die Mittel zur Durchführung desselben sind im Wesentlichen schon durch die obigen geometrischen Betrachtungen gegeben (p. 662 ff.), sollen hier aber zum Theil noch einmal abgeleitet werden.

Die bisher über die Natur der Curve f gemachten Annahmen wollen wir gleichzeitig dahin verallgemeinern, dass dieselbe α_i i-fache Punkte haben möge, deren Tangenten jedoch alle getrennt verlaufen; ausserdem mögen wieder r Rückkehrpunkte vorhanden sein. Als Geschlecht von f definiren wir dann die Zahl (vgl. p. 429 f.)

$$p = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - \tfrac{1}{2}\sum_i \alpha_i i(i-1) - r. \tag{7}$$

Sehen wir zuerst, wie sich die singulären Punkte von $f = 0$ bei der

*) Bei diesem Beweise ist der Satz als bekannt vorausgesetzt, dass für die Zahl der berührenden Curven des Netzes in der That nur die *beweglichen* Schnittpunkte der Φ_i mit f in Betracht kommen. Diesen Satz werden wir zwar erst später mit Hülfe desjenigen von der Erhaltung des Geschlechtes beweisen, indem wir zeigen, dass für die Zahl der Coincidenzen einer Correspondenz überhaupt nur die beweglichen Schnittpunkte zu berücksichtigen sind. Von der Richtigkeit dieser Behauptung überzeugt man sich indess bei vorliegendem Falle leicht direct; denn nach p. 456 werden die Berührungspunkte der durch x gehenden Curen Φ ausgeschnitten durch die Curve

$$(f\Phi_2\Phi_3)\,\Phi_1(x) + (f\Phi_3\Phi_1)\,\Phi_2(x) + (f\Phi_1\Phi_2)\,\Phi_3(x) = 0;$$

wobei die Functionaldeterminanten in Variabeln y geschrieben sein mögen; oder z. B., wenn x auf $\Phi_3 = 0$ und $\Phi_2 = 0$ liegt, durch $(f\Phi_2\Phi_3) = 0$ (vgl. p. 460 Anmk.). Diese Curve aber schneidet f in der That nur in $2(\nu + p - 2) - r$ brauchbaren Punkten, wie man aus den Sätzen auf p. 380 erkennt.

**) Derselbe lehnt sich an den von Clebsch und Gordan gegebenen an (Theorie der Abel'schen Functionen, Leipzig 1866, p. 54 ff.); hier sind überhaupt die von Riemann untersuchten eindeutigen Transformationen zuerst geometrisch behandelt.

Transformation verhalten. Wir setzen $f = a_x^n$; dann ist für einen ϱ-fachen Punkt x von f (unabhängig von den z):

$$a_x^{n-\varrho+1} a_z^{\varrho-1} = 0, \tag{8}$$

und die ϱ von x ausgehenden Fortschreitungsrichtungen sind bestimmt durch die Gleichungen:

$$a_x^{n-\varrho} a_{dx}^{\varrho} = 0, \quad k_1 dx_1 + k_2 dx_2 + k_3 dx_3 = 0, \tag{9}$$

wenn $k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 = 1$ in bekannter Weise die zwischen den absoluten Werthen der x_i bestehende Identität ist (vgl. p. 447). Nehmen wir nun an, dass die Curven $\Phi_i = 0$ nicht durch x hindurchgehen, dass also μ für den Punkt x nicht Null ist, so entspricht dem Punkte x vermöge (2) ein ganz bestimmter Punkt y auf F, und zwar wieder ein ϱ-facher Punkt. Letzteres folgt daraus, dass vermöge der aus (2) fliessenden Gleichungen:

$$\mu \cdot dy_i + y_i \cdot d\mu = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_3} dx_3 \tag{10}$$

jedem Werthsysteme der dx_i ein ganz bestimmtes Werthsystem der dy_i zugehört, solange μ nicht Null ist; und dies gilt auch unabhängig davon, ob die aus (9) sich ergebenden Werthe der dx_i von einander verschieden sind, oder nicht, sowie auch, wenn zwei sich in x berührende Zweige von f auch noch in höheren Differentialen übereinstimmen. Wir haben also den Satz (vgl. p. 489 f.):

Einem singulären Punkte von f, durch welchen die zur Transformation benutzten Curven nicht sämmtlich hindurchgehen, entspricht auf F ein in derselben Weise singulärer Punkt.

Nehmen wir jedoch an, dass x ein Fundamentalpunkt der Transformation sei, d. h. dass alle Curven des Netzes (4) durch x hindurchgehen, so ist gleichzeitig:

$$\Phi_1(x) = 0, \quad \Phi_2(x) = 0, \quad \Phi_3(x) = 0, \quad \mu = 0.$$

In den Gleichungen (10) stehen dann auf den linken Seiten nur noch die Ausdrücke $y_i \cdot d\mu$, wo $d\mu$ von Null verschieden sein mag; und folglich entspricht jeder Fortschreitungsrichtung dx auf f ein Punkt y auf F. Einem ϱ-fachen Punkte mit getrennten Tangenten auf f entsprechen daher ϱ verschiedene Punkte auf F; *ist insbesondere x ein Rückkehrpunkt von f, so entsprechen ihm zwei benachbarte Punkte auf F.**) Ganz dasselbe gilt aber auch, wenn die Curven Φ_i in einem ϱ-fachen Punkte von f sämmtlich einen vielfachen, sagen wir $\varkappa$-fachen, Punkt haben. Ist nämlich zunächst $\varkappa = 2$, so verschwinden die rechten Seiten der Gleichungen (10), und es wird $d\mu = 0$. Durch

*) Vgl. auch die Anmerkung auf p. 664.

Differentiation dieser Gleichungen finden wir weiter, wenn $\Phi_i = \alpha^{(i)}{}_x{}^s$ gesetzt wird:

(11) $$y_i d^2\mu = s\,(s-1)\,.\,\alpha^{(i)}{}_x{}^{s-2}\alpha^{(i)}{}_{dx}{}^2\,;$$

d. h. jeder Fortschreitungsrichtung dx auf f entspricht ein Punkt y auf F. Ist dagegen $\varkappa = 3$, so wird nach (11) auch $d^2\mu = 0$, und wir erhalten durch nochmalige Differentiation:

(11*) $$y_i d^3\mu = s\,(s-1)\,(s-2)\,.\,\alpha^{(i)}{}_x{}^{s-3}\alpha^{(i)}{}_{dx}{}^3\,;$$

u. s. w. Man erkennt hieraus mittelst eines Schlusses von $\varkappa = \lambda$ auf $\varkappa = \lambda + 1$ sofort, dass unsere Behauptung in der That richtig ist:

Wenn die Curven $\Phi_i = 0$ in einem ϱ-fachen Punkte mit getrennten Tangenten von $f = 0$ sämmtlich einen ein- oder vielfachen Punkt haben, so entsprechen demselben ϱ getrennte Punkte auf $F = 0$ (und dies sind Schnittpunkte der dem ϱ-fachen Punkte in E_x zugehörigen Fundamentalcurve in E_y mit F, nach p. 664).

Dies Resultat verwerthen wir in folgender Weise zur Berechnung des Geschlechtes von F. Unter den α_i i-fachen Punkten von f mögen α_i' enthalten sein, durch welche die Curven Φ nicht hindurchgehen, dagegen α_i'', durch welche diese Curven ein- oder mehrfach hindurchgehen, so dass:

(12) $$\alpha_i = \alpha_i' + \alpha_i''\,.$$

In demselben Sinne mögen die r Rückkehrpunkte sich in zwei Gruppen bez. von r' und r'' Punkten trennen, und letztere je t-fache Punkte der Φ sein.

Die Curve F nun möge β_i i-fache Punkte haben. Von diesen sind dann nach Vorstehendem α_i' aus vielfachen Punkten von f entstanden; die übrigen $\beta_i - \alpha_i'$ dagegen durch Zusammenrücken von Punkten, die auf f getrennt lagen. *Im Allgemeinen aber werden auf F nur einfache Doppel- (bez. Rückkehr-) Punkte in der Weise neu entstehen*, so dass, wenn γ die Zahl derselben bedeutet, folgende Relationen Geltung haben:

(13) $$\gamma = \beta_2 - \alpha_2'\,,\quad \beta_3 = \alpha_3'\,,\quad \beta_4 = \alpha_4'\,,\;\ldots\,.$$

Sollen nämlich ϱ getrennte Punkte von f sich zu einem ϱ-fachen Punkte von F vereinigen, und sind $u_y = 0$, $v_y = 0$ zwei Strahlen durch den letzteren, so darf jeder Strahl $u_y + \lambda v_y = 0$ die Curve F nur noch in $\nu - \varrho$ beweglichen Punkten treffen; folglich dürfen auch die Curven des Büschels

$$u_1\Phi_1 + u_2\Phi_2 + u_3\Phi_3 + \lambda\,(v_1\Phi_1 + v_2\Phi_2 + v_3\Phi_3) = 0$$

die Curve $f = 0$ nur noch in $\nu - \varrho$ beweglichen Punkten schneiden. Während also im Allgemeinen eine Curve des Netzes (4) durch 2 Punkte bestimmt wird, müssten sich dann auf $f = 0$ ϱ Punkte so wählen lassen, dass durch sie noch unendlich viele Curven des Netzes

hindurchgehen. Es müssten also zwischen den Curven des Netzes und der Curve $f = 0$ noch specielle Relationen bestehen; denn in einer beliebigen zweifach unendlichen Curvenschaar wird man höchstens verlangen dürfen, aus einer einfach unendlichen Reihe von Punkten zwei so auszuwählen, dass durch sie noch unendlich viele Curven der Schaar hindurchgehen (vgl. auch p. 439). Wir wollen daher zunächst voraussetzen, dass die Gleichungen (13) für unsere Transformation bestehen. *Dann ist das Geschlecht von* $F = 0$*:*

$$\pi = \tfrac{1}{2}(\nu - 1)(\nu - 2) - \tfrac{1}{2}\sum_i \alpha_i' \,.\, i\,(i - 1) - r' - \gamma\,. \tag{14}$$

Hierin haben wir noch die Zahlen ν *und* γ *zu bestimmen.* Zur Vereinfachung der dahin führenden Ueberlegungen sei bemerkt, dass wir die Curven $\Phi_i = 0$ immer so voraussetzen dürfen, dass *die Vielfachheit ihrer gemeinsamen, in einem* i*-fachen Punkte von* $f = 0$ *liegenden Punkte für alle Curven des Netzes in allen*)* i*-fachen Punkten von* $f = 0$ *dieselbe ist.* Die Gültigkeit unserer Betrachtungen nämlich werden durch eine lineare Transformation der y nicht gestört, es kommt daher für unsern Zweck nur auf solche gemeinsame Punkte der Curven $\Phi_i = 0$ an, welche auch *allen* Curven des Netzes (4) gemeinsam sind. Sollte daher z. B. $\Phi_3 = 0$ in einem r-fachen Punkte von $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$ einen ϱ-fachen Punkt haben, wo $\varrho > r$, so brauchen wir diesen letzteren auch nur als r-fachen Punkt zu zählen. Gingen ferner die Curven $\Phi_i = 0$ durch einen i-fachen Punkt von $f = 0$ ϱ-fach, durch einen andern ϱ'-fach, durch den letzten $\varrho^{(k)}$-fach hindurch, wo $\varrho < \varrho' < \ldots < \varrho^{(k)}$, so können wir eine Curve $\Psi = 0$ so bestimmen, dass die Curven $\Phi_1\Psi = 0$, $\Phi_2\Psi = 0$, $\Phi_3\Psi = 0$ in jedem i-fachen Punkte von f einen $\varrho^{(k)}$-fachen Punkt haben. Fügen wir aber den Factor auf den rechten Seiten der Gleichungen (2) hinzu, so wird dadurch das Resultat der Transformation nicht geändert, indem dies nur auf den Factor M Einfluss hat. Den Factor Ψ aber können wir uns immer schon in den Φ_i enthalten denken; damit ist dann unsere obige Behauptung als richtig erwiesen: Wir können immer annehmen, dass *die Curven* Φ_i *in jedem der* α_i'' i*-fachen Punkte von* f *einen* r_i*-fachen Punkt haben, ausserdem aber sich noch in* σ *einfachen Punkten von* f *je einfach schneiden.* Alsdann ist die Zahl der beweglichen Schnittpunkte der Φ_i mit f, d. h. *die Ordnung von* F*:*

$$\nu = ns - \sigma - \sum_i \alpha_i'' r_i i - 2\Delta r''.\text{**)} \tag{15}$$

---

*) Diese letzte Festsetzung soll in den folgenden Formeln nur das Schreiben einer Doppelsumme ersparen, während die erstere von principieller Wichtigkeit ist.

**) Für $f = a_x{}^m$, $y_i = u_i$, $\Phi_i = a_x{}^{m-1} a_i$, also $n = m$, $s = m - 1$, $\alpha_i = \alpha_i''$, $\alpha'_i = 0$, $r' = 0$, $r = r''$, $r_i = i - 1$, $\sigma = r$ (letzteres, da die Curven Φ hier im Rückkehrpunkte berühren) erhält man hieraus wieder die Klasse der Grundcurve:

Um endlich die in (14) auftretende Zahl γ zu bestimmen, haben wir eine Curve zu suchen, welche auf f alle diejenigen Punktepaare ausschneidet, welche zu Doppelpunkten von F Veranlassung geben. Eine solche Curve aber ist uns nach dem Obigen durch $M = 0$ gegeben (p. 664 f.); man kann dies auch in folgender Weise einsehen. Wir fragen, wann es überhaupt eintreten kann, dass die Differentialquotienten $\frac{\partial F(y)}{\partial y_i}$ sämmtlich verschwinden. Nun ist nach (3) und (2):

$$\mu^\nu \frac{\partial F(y)}{\partial y_i} + \sum_k \frac{\partial F(\Phi)}{\partial \Phi_k} \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_i} = \mu \frac{\partial F(\Phi)}{\partial \Phi_i};$$

denn aus (2) folgt z. B. für $i = 1$:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} = \mu, \qquad \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi_3}{\partial y_1} = 0.$$

Setzen wir also $\frac{\partial F(\Phi)}{\partial \Phi_i} = F_i(\Phi)$, so wird:

$$\mu^{\nu-1} F_i(y) = F_i(\Phi). \tag{16}$$

Die Differentialquotienten $F_i(y)$ verschwinden sonach immer, wenn die Ausdrücke $F_i(\Phi)$ verschwinden, es sei denn, dass sämmtliche Φ_i (und somit auch μ) Null sind. In letzterem Falle verschwinden in (16) für einen r_k-fachen Punkt der Φ die Ausdrücke $F_i(\Phi)$ von der Ordnung $r_k(\nu - 1)$, ebenso auch $\mu^{\nu-1}$; kennen wir also die Punkte x auf f, für welche die $F_i(\Phi)$ Null werden, so haben wir von diesen nur die den Φ_i gemeinsamen Punkte abzusondern; die übrig bleibenden Punkte bestimmen solche Punkte x, welche paarweise sich zu einem Doppelpunkte von F vereinigen. Nun erhält man aus Gleichung (3) durch Differentiation nach den x_i die drei Gleichungen:

$$F_1(\Phi) \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i} + F_2(\Phi) \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_i} + F_3(\Phi) \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_i} = M \frac{\partial f}{\partial x_i}. \tag{17}$$

Erstens sind also die $F_i(\Phi)$ immer Null, wenn die $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ verschwinden, es sei denn, dass die Functionaldeterminante der Φ_i, welche mit (Φ_1, Φ_2, Φ_3) bezeichnet sei, verschwindet. Dann ist aber x ein vielfacher Punkt von f, und diese Fälle haben wir schon berücksichtigt. *Zweitens* sind die $F_i(\Phi)$ immer Null, wenn M verschwindet, wieder ausgenommen die Punkte x auf f, für welche auch die Functional-

$$\nu = m(m-1) - \Sigma \alpha_i i(i-1) - 3r.$$

Nimmt man dagegen $f = (abc)^2 a_x^{m-2} b_x^{m-2} c_x^{m-2}$, und wieder $\Phi = a_x^{m-1} a_i$, so gibt $F = 0$ nach p. 365 die Gleichung der Steiner'schen Curve in Liniencoordinaten; und aus der Formel (16) findet man für die Klasse derselben, indem jetzt $\sigma = 2$ (weil die Hesse'sche Curve in jedem Rückkehrpunkte von $a_x^m = 0$ in bekannter Weise einen dreifachen Punkt hat):

$$\nu = 3(m-1)(m-2) - \Sigma \alpha_i i(i-1) - 4r.$$

determinante $(\Phi_1\Phi_2\Phi_3)$ verschwindet; und in der That geht ja die Curve $M=0$ durch die Schnittpunkte von $f=0$ und $(\Phi_1\Phi_2\Phi_3)=0$ (vgl. p. 663). Es ist aber M von der Ordnung $\nu s - n$, $(\Phi_1\Phi_2\Phi_3)$ von der Ordnung $3s-3$; die Zahl der für uns brauchbaren Schnittpunkte von M mit f würde also zunächst gleich

$$(18) \qquad n(\nu s - n - 3s + 3)$$

sein. Hiervon haben wir nach (16) noch die Punkte abzusondern, welche in gemeinsamen Punkten der Φ_i liegen. $M=0$ hat aber in jedem Punkte σ einen $(\nu-1)$-fachen Punkt (p. 664), und in jedem der α_i'' i-fachen Punkte von f einen $(\nu r_i - i)$-fachen Punkt. In den gemeinsamen Punkten der Φ und f liegen also

$$P = (\nu-1)\,\sigma + \Sigma\alpha_i'' \, . \, i\,(\nu r_i - i) + 2\,r''\,(\nu t - 2)$$

Schnittpunkte von M und f. In denselben Punkten liegen aber auch

$$Q = 2\,\sigma + \Sigma\alpha_i'' \, . \, i\,(3\,r_i - 1) + 2\,r''\,(3\,t - 1)$$

Schnittpunkte von f und $(\Phi_1\Phi_2\Phi_3)$; denn in einem gemeinsamen r_i-fachen Punkte der Φ hat die Jacobi'sche Curve einen $(3\,r_i-1)$-fachen Punkt (vgl. p. 383). Diese sind schon unter den $3s-3$ Punkten enthalten, welche in der Zahl (18) berücksichtigt wurden. Im Ganzen haben wir also von (18) noch die Zahl

$$P - Q = (\nu-3)\,\sigma + \Sigma\alpha_i'' \, . \, i\,[(\nu-3)\,r_i - i + 1] + 2\,r''\,(t\nu - 3t - 1)$$

abzuziehen. Die Zahl der für uns brauchbaren Schnittpunkte von M und f ist daher schliesslich gleich*)

$$n(\nu s - n - 3s + 3) - (\nu-3)(\sigma + 2r''t) - \Sigma\alpha_i''\, i\,[(\nu-3)r_i - i + 1] + 2r'',$$

oder wegen (15):

$$= (\nu-1)(\nu-2) - (n-1)(n-2) + \Sigma\alpha_i'' \, . \, i\,(i-1) + 2\,r''.$$

Für jeden dieser Punkte x verschwinden nicht nur die $F_i(\Phi)$, sondern auch die $F_i(y)$; je zwei derselben geben also zu einem Doppel- bez. Rückkehrpunkte von F Veranlassung; d. h. wir haben

---

*) Es sei bemerkt, dass ganz analoge Beziehungen wie zwischen M, $(\Phi_1\Phi_2\Phi_3)$, f auch zwischen $F_1(\Phi)$, $(\Phi_2\Phi_3 f)$, f oder $F_2(\Phi)$, $(\Phi_3\Phi_1 f)$, f oder $F_3(\Phi)$, $(\Phi_1\Phi_2 f)$, f bestehen; denn aus den Gleichungen (17) folgen (für $f=0$) die Relationen:

$$F_1(\Phi) : F_2(\Phi) : F_3(\Phi) : -M = (\Phi_2\Phi_3 f) : (\Phi_3 f \Phi_1) : (\Phi_1\Phi_2 f) : (\Phi_1\Phi_2\Phi_3).$$

Man könnte daher statt M auch eine der Curven $F_i(\Phi)$ der Betrachtung zu Grunde legen, wie dies bei Clebsch und Gordan a. a. O. in der That geschieht. Man hat dann statt der Sätze über das Verhalten von $(\Phi_1\Phi_2\Phi_3)$ in einem gemeinsamen Punkte der Φ die auf p. 378 f. gegebenen Sätze über das Verhalten einer Determinante $(\Phi_i\Phi_k f)$ zu benutzen. — Wir werden später diese Punkte noch in anderer Weise bestimmen lernen; vgl. den Abschnitt über Verallgemeinerungen der Correspondenzformeln.

(19) $\gamma = \frac{1}{2}(\nu - 1)(\nu - 2) - \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + \frac{1}{2}\Sigma\alpha_i''\,.\,i(i-1) + r''$.

Setzen wir dies in (14) ein, so kommt wegen (12):

$$\pi = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - \tfrac{1}{2}\Sigma\alpha_i'\,.\,i(i-1) - \tfrac{1}{2}\Sigma\alpha_i''\,.\,i(i-1) - r' - r''$$
$$= \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - \tfrac{1}{2}\Sigma\alpha_i\,.\,i(i-1) - r\,,$$

oder endlich: $\pi = p$, q. e. d.

Der Satz über die Erhaltung von p wäre somit für die von uns gemachten Voraussetzungen bewiesen. Wir haben dabei zunächst angenommen, dass sich nicht mehr als zwei getrennte Punkte von f zu einem vielfachen Punkte von F vereinigen, hingegen wohl, dass getrennten Punkten von F ein vielfacher Punkt von f entspricht.

Diese Beschränkung lässt sich aber leicht aufheben. Nehmen wir nämlich an, dass auf F neue vielfache Punkte vermöge der Transformation (2) entstehen, so ersetzen wir letztere zunächst durch die andere Transformation:

$$\varrho y_i = \Phi_i(x) + \varepsilon\Psi_i(x)\,,$$

wo die Ψ_i mit den Φ_i von gleicher Ordnung, sonst aber ganz beliebig sind. Man kann hier die Ψ_i also jedenfalls so wählen, dass die Transformation ganz allgemeiner Natur ist, dass also die aus f entstehende Curve F' nur einfache Doppelpunkte neu erhält. Nimmt man nun ε unendlich klein, so ist F' zu F benachbart, und die neuen Doppelpunkte von F' liegen theilweise einander derart benachbart, dass sie für $\varepsilon = 0$ sich zu den neuen vielfachen Punkten von F gruppenweise vereinigen. Da aber unser Satz für die Curve F' gilt, und da das Geschlecht von F mit dem Geschlechte von F' übereinstimmt, so gilt der Satz auch für die Beziehung von F' auf f; und wir haben damit folgendes Theorem bewiesen:

*Wenn zwei Curven mit vielfachen Punkten, deren Tangenten nicht zusammenfallen, und mit einzelnen Rückkehrpunkten eindeutig auf einander bezogen sind, so haben sie gleiches Geschlecht.**)

Es bleibt uns übrig, diesen Satz auch auf diejenigen Fälle auszudehnen, wo die vielfachen Punkte von $f = 0$ noch specielle Eigenschaften besitzen. Nun haben wir früher schon eine Zahl als Geschlecht einer solchen Curve definirt (p. 495), welche bei allen Cremona'schen Transformationen erhalten blieb; dieselbe war gleich dem Geschlechte einer Curve mit lauter gewöhnlichen vielfachen Punkten, welche aus der gegebenen durch wiederholte Cremona'sche

*) Es sind aber nicht umgekehrt zwei Curven von gleichem Geschlechte immer eindeutig in einander transformirbar; dazu ist vielmehr noch die Gleichheit gewisser (als *Moduln* bezeichneter) Zahlen nothwendig, die den absoluten Invarianten bei linearen Transformationen entsprechen. Vgl. darüber die beiden folgenden Abschnitte.

Transformationen entstand. Andererseits zeigten wir, dass jeder singuläre Punkt betrachtet werden darf als Combination von verschiedenen gewöhnlichen vielfachen Punkten, die einander unendlich benachbart liegen, und zu denen — so drückten wir uns aus — noch eine Anzahl von Verzweigungspunkten hinzutritt. Die letzteren blieben jedoch ganz ohne Einfluss auf das Geschlecht der Curve; und dieses war gleich dem Geschlechte einer Curve, bei der jene zusammengerückten vielfachen Punkte getrennt liegen. Insofern man in dieser Weise jede Curve durch Grenzübergang aus einer Curve der von uns bisher betrachteten Art entstehen lassen kann, gelten unsere obigen Betrachtungen ganz allgemein; insbesondere *gilt der Satz von der Erhaltung des Geschlechts für zwei beliebige Curven, sobald sie eindeutig auf einander bezogen sind.*

Wir gehen zu einigen *Anwendungen der hier erwähnten Methoden* über.

1) Beim Studium der Punktsysteme auf einer algebraischen Curve (p. 430 ff.) haben wir gesehen, dass es besonders wichtig ist, solche Punktgruppen zu betrachten, welche durch sogenannte *adjungirte Curven* ausgeschnitten werden, d. h. durch Curven, die durch jeden i-fachen Punkt von f $(i-1)$-fach hindurchgehen; insbesondere waren dann wieder die adjungirten Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung ausgezeichnet. Mittelst der vorstehenden Ueberlegungen lässt sich nun diese hervorragende Bedeutung der adjungirten Curven noch in anderer Weise erkennen.

Es sei $\Theta(y) = 0$ eine zu $F(y)$ adjungirte Curve C_μ und es möge $\vartheta(x) = 0$ eine Curve sein, welche auf $f(x) = 0$ die den Schnittpunkten von Θ und F vermöge der Transformation (2) entsprechende Punktgruppe ausschneidet, ausserdem aber die Curve f nur in den singulären Punkten (in noch zu bestimmender Weise) trifft. Alsdann muss jedenfalls eine Gleichung der Form:

$$A \,.\, \Theta(\Phi) = B \,.\, \vartheta(x) + C \cdot f(x)$$

bestehen. Nun geht der Voraussetzung nach $\Theta(y) = 0$ durch alle Doppelpunkte von F; folglich geht $\Theta(\Phi) = 0$ durch alle die Punktepaare auf f, aus denen jene Doppelpunkte von F entstehen. Durch diese Punkte muss also auch $B = 0$ ebenso oft hindurchgehen, denn $\vartheta = 0$ enthält sie der Voraussetzung nach nicht. Wir können daher für B die oben mit M bezeichnete Function setzen, wenn wir nur gleichzeitig das Verhalten von A, ϑ und C in den singulären Punkten von f gehörig bestimmen. Die Curve $M = 0$ geht aber ausser durch die genannten Punktepaare und durch die singulären Punkte von f auch durch die Schnittpunkte von f mit der Jacobi'-

schen Curve der Curven Φ; durch dieselben Punkte muss folglich auch A hindurchgehen. Wir wollen deshalb direct $A = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ setzen. Alsdann ist die Vielfachheit des Productes $A \, . \, \Theta \, (\Phi)$ in jedem i-fachen Punkte von f (durch den die Curven Φ r_i-fach hindurchgehen) nach früheren Sätzen gleich $\mu r_i + 3 r_i - 1$; die Vielfachheit von B $(= M)$ dagegen gleich $\nu r_i - 1$; obige Gleichung wird daher immer möglich sein, vorausgesetzt dass man der Curve $\vartheta = 0$ in jedem i-fachen Punkte von f einen $[(\mu - \nu + 3) r_i + i - 1]$-fachen Punkt beilegen kann. Es kommt also darauf an zu zeigen, dass dies immer möglich ist, d. h. dass sich eine Curve ϑ von passender Ordnung in angegebener Weise bestimmen lässt.

Da nun die Ordnungen von A, B, Θ und Φ_i bekannt sind, so ist die Ordnung x von ϑ leicht zu bestimmen; man findet:

$$(20) \qquad x = 3s - 3 + \mu s - \nu s + n = s(\mu - \nu + 3) + n - 3 \, .$$

Der Einfachheit halber nehmen wir $r = r' = r'' = 0$ und bezeichnen die Vielfachheit von ϑ in einem i-fachen Punkte von f mit y_i, so dass:

$$(21) \qquad y_i = (\mu - \nu + 3) r_i + i - 1 \, .$$

Die Zahl der in ϑ zu bestimmenden Coëfficienten ist dann gleich $\frac{1}{2} x(x + 3)$. Die Curve ϑ soll durch die $\mu\nu - 2\gamma - \Sigma\alpha_i' i(i-1)$ Punkte gehen, welche auf f den nicht in singulären Punkten von F liegenden Schnittpunkten von Θ und F entsprechen. Die Gesammtzahl der für die Coëfficienten von ϑ gegebenen Bedingungen ist also, weil sich (für $\mu > \nu - 3$) p der letzteren Punkte aus den übrigen bestimmen, wegen (19) und (15) gleich

$$\begin{aligned} \mu\nu - 2\gamma - \Sigma\alpha_i' i(i-1) - p + \tfrac{1}{2}\Sigma y_i(y_i + 1) &= \mu\nu - (\nu-1)(\nu-2) + p \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\Sigma y_i(y_i + 1) \\ &= \mu\{ns - \sigma - \Sigma\alpha_i'' r_i i\} - (\nu-1)(\nu-2) + \tfrac{1}{2}\Sigma y_i(y_i+1) + p \, . \end{aligned}$$

Wir wollen zunächst zeigen, dass diese Zahl bei zunehmendem μ immer langsamer wächst als die Zahl $\frac{1}{2} x(x+3)$. Setzen wir nämlich $\mu + 1$ statt μ, so nimmt die letztere nach (20) zu um:

$$z = \tfrac{1}{2} s(s + 2x + 3) \, ,$$

die erstere dagegen um:

$$t = \tfrac{1}{2}\Sigma\alpha_i'' r_i(r_i + 2y_i + 1) + ns - \sigma - \Sigma\alpha_i'' r_i i \, .$$

Die Curven Φ können wir im Allgemeinen als nicht zerfallend voraussetzen, denn wenn Φ_1, Φ_2, Φ_3 einzeln in Factoren zerfallen, so wird dies doch für eine beliebige Curve des Netzes der Φ nicht eintreten*);

*) Wenn oben (p. 670) gelegentlich allen Φ ein gemeinsamer Factor beigelegt wurde, so geschah dies nur der Einfachheit wegen für den damaligen Zweck.

wir haben also, da es 2-fach unendlich viele Curven Φ in dem Netze gibt, noch die Relationen:

$$\tfrac{1}{2}(s-1)(s-2) \geqq \tfrac{1}{2}\Sigma\alpha_i'' r_i(r_i-1), \quad \tfrac{1}{2}s(s+3) \geqq \tfrac{1}{2}\Sigma\alpha_i'' r_i(r_i+1)+\sigma+2,$$

und hieraus findet man durch Combination, da die positive Differenz beider Seiten der ersten Ungleichung kleiner als die der zweiten ist:

$$(22) \qquad s^2 \geqq \Sigma\alpha_i'' r_i^2 + \sigma + 1, \quad 3s < \Sigma\alpha_i'' r_i + \sigma + 3.$$

Also sind das erste und dritte Glied von z einzeln grösser als das erste und dritte Glied von t. Es ist aber auch das zweite Glied von z grösser als die Summe der übrigen Glieder von t (oder gleich derselben), d. i. wegen (20) und (21):

$$s^2(\mu-\nu+3) + s(n-3) > (\mu-\nu+3)\,\Sigma\alpha_i'' r_i^2 + ns - \sigma - \Sigma\alpha_i'' r_i.$$

Hier ist nämlich der Coëfficient von $(\mu-\nu+3)$ auf der linken Seite wegen (22) grösser als auf der rechten Seite; das Glied ns tritt auf beiden Seiten gleichmässig auf; und für die übrigen Glieder hat man wieder die zweite Gleichung (22) zu benutzen. Damit ist obige Behauptung bewiesen. — Nun werden wir sogleich noch zeigen, dass die für ϑ gestellten Bedingungen immer erfüllbar sind, wenn $\mu = n-3$; also sind sie es wegen des soeben bewiesenen Satzes immer, wenn $\mu > n-3$; q. e. d. Die Fälle, wo $\mu < n-3$, erledigen sich hiernach sehr einfach; man hat nur z und t negativ zu nehmen. Schliesslich können wir sonach folgenden Satz aussprechen:

Das Schnittpunktsystem einer zu F adjungirten Curve Θ von der μ^{ten} Ordnung mit F geht bei eindeutiger Transformation von F in f über in das Schnittpunktsystem einer zu f adjungirten Curve ϑ von der Ordnung $s(\mu-\nu+3)+n-3$, wo s die Ordnung der Transformationscurven Φ_i in (2), ν die von F, n die von f bedeutet. Von den Schnittpunkten der Curve ϑ mit f fällt aber noch eine grössere Anzahl in die bei F nicht ebenso auftretenden vielfachen Punkte von f, als bei einer beliebigen zu f adjungirten Curve nothwendig wäre; und zwar so, dass die Anzahl der nicht in singulären Punkten liegenden Schnittpunkte von f und ϑ gleich der Zahl der entsprechenden Schnittpunkte von F und Θ ist. Ferner besteht die Relation:

$$(23) \qquad (\Phi_1\Phi_2\Phi_3)\,.\,\Theta(\Phi_i) = M\,.\,\vartheta(x) + C\,.\,f,$$

wo M durch (3), die Φ_i durch (2) definirt sind.

Die letztere Gleichung haben wir nun noch für den Fall $\mu = n-3$ zu beweisen. Von den $2p-2$ Schnittpunkten der Curve Θ mit F, welche nicht in singulären Punkten von F liegen, sind dann bekanntlich $p-1$ durch die übrigen $p-1$ bestimmt (p. 437), wenn wieder p das Geschlecht von F und f bedeutet. Es kommt also, da man die Ordnung x von ϑ jetzt ebenfalls gleich $n-3$ und $y_i = i-1$ findet,

darauf an zu zeigen, dass man durch die entsprechenden $p - 1$ Punkte auf f immer eine zu f adjungirte Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung legen kann, d. h. dass:

$$\tfrac{1}{2}n(n-3) - \tfrac{1}{2}\Sigma\alpha_i i(i-1) - p + 1 \geqq 0.$$

Diese Bedingung ist aber immer erfüllt, denn die links stehende Zahl wird gerade gleich Null. Für $\mu = \nu - 3$ haben wir also insbesondere folgenden wichtigen Satz:

In Folge einer eindeutigen Transformation, welche eine Curve n^{ter} Ordnung in eine Curve ν^{ter} Ordnung überführt, geht das Schnittpunktsystem einer zur ersteren adjungirten Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung in das Schnittpunktsystem einer zur letzteren adjungirten Curve $(\nu-3)^{\text{ter}}$ Ordnung über. — Die späteren Untersuchungen über Punktgruppen, welche auf einer Curve n^{ter} Ordnung durch adjungirte Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung ausgeschnitten werden, gelten also unverändert bei beliebigen eindeutigen Transformationen der Grundcurve. —

Nach der eben gemachten Abzählung sind für eine adjungirte C_{n-3} immer $\frac{1}{2}\Sigma\alpha_i i(i-1)$ Bedingungen durch die Forderung des Adjungirtseins gegeben. *Es gibt daher* $[\frac{1}{2}n(n-3) - \frac{1}{2}\Sigma\alpha_i i(i-1)]$-*fach, d. i.* $(p-1)$-*fach unendlich viele adjungirte* C_{n-3}; wenn wir voraussetzen, dass jene Bedingungen von einander unabhängig sind. Dies ist aber immer der Fall, denn zu demselben Resultate sind wir früher auf allgemeinem Wege gekommen, indem wir (nach dem Vorgange von Brill und Nöther) nachwiesen, dass die Zahl der linear von einander unabhängigen C_{n-3} auch niemals grösser als $p-1$ sein kann (p. 411). Setzen wir andererseits voraus, dass die Zahl p der von einander unabhängigen Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung in dieser Weise schon endgültig bestimmt sei, so würde man hieraus wieder einen Beweis für die Erhaltung der Zahl p ableiten können*), vorausgesetzt dass man die Identität (23) in anderer Weise für Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung abgeleitet hat; wir dagegen haben jenen Satz eben schon zum Beweise der Gleichung (23) benutzt.

Es sei endlich noch bemerkt, dass auch diese Betrachtungen ihre Gültigkeit vollständig behalten, wenn die Grundcurve singuläre Punkte specieller Natur besitzt. Man hat sich eben einen jeden Punkt dieser Art in der früher erörterten Weise als entstanden aus unendlich benachbarten vielfachen Punkten zu denken, zu denen noch Verzweigungspunkte hinzutreten (p. 494). Eine zur Grundcurve f adjungirte

---

*) Hierauf beruht der bei Clebsch und Gordan a. a. O. §. 14, p. 50 f. gegebene Beweis jenes Riemann'schen Satzes; doch ist die Ableitung der Identität (23) daselbst nicht für alle Fälle ausreichend, indem auf die möglichen Relationen zwischen den (dort allein vorausgesetzten) Doppelpunkten von f (sowie auf vielfache Punkte) nicht Rücksicht genommen wird.

Curve muss sich dann in den *einzelnen* vielfachen Punkten, welche sich zu einer höheren Singularität vereinigen, immer so verhalten, wie es nach der früheren Definition eine adjungirte Curve thun müsste, wenn die vielfachen Punkte getrennt lägen.*) Die hinzutretenden Verzweigungspunkte dagegen bleiben auf das Verhalten einer adjungirten Curve ohne Einfluss, wie dies vom Rückkehrpunkte bekannt ist. Eine solche Curve muss also in jedem j-fachen Punkte von f einen $(j-1)$-fachen Punkt besitzen; wenn noch weiter ein i-facher Punkt der Grundcurve mit diesem vereinigt liegt, so muss in demselben noch ein $(i-1)$-facher Punkt der adjungirten Curve hineinrücken, etc. In einem Selbstberührungspunkte (äquivalent mit 2 benachbarten Doppelpunkten) muss sie demnach die gemeinsame Tangente der Zweige der Grundcurve berühren, ebenso in einer Spitze zweiter Art (nach p. 411 äquivalent mit 1 Doppel- und 1 Rückkehrpunkt), u. s. w. — Berücksichtigt man in dieser Weise die einzelnen Bestandtheile eines höheren singulären Punktes, *so behalten der Restsatz und alle sich an denselben schliessenden Sätze über Punktsysteme auf einer Curve ihre uneingeschränkte Gültigkeit* (vgl. p. 433 ff). — Analoges gilt auch für die folgenden Betrachtungen, wie nicht immer besonders hervorgehoben werden soll.

Das Resultat dieser Bemerkungen über adjungirte Curven können wir noch in einer andern, für spätere Anwendungen wichtigen Form aussprechen. Wir haben früher gesehen, dass der Einfluss eines singulären Punktes auf die Klasse der Grundcurve derselbe ist, wie der Einfluss der verschiedenen in ihm vereinigt gelegenen vielfachen Punkte; nur hat man für jeden hinzutretenden Verzweigungspunkt die Klasse noch um eine Einheit zu verringern. Da nun ein i-facher Punkt eine Reduction gleich $i(i-1)$ an der Klasse hervorbringt, da ferner diese selbst gleich der Zahl der nicht in singuläre Punkte fallenden Schnittpunkte der Grundcurve mit einer beliebigen ihrer ersten Polarcurven ist; so können wir unsere Bestimmung der adjungirten Curven auch folgendermassen aussprechen:

Eine zu f adjungirte Curve muss in jedem singulären Punkte P von f so viele Schnittpunkte mit f gemein haben wie die erste Polare eines beliebigen Punktes in Bezug auf f, wenn man von der Zahl der letzteren noch die Zahl der in P liegenden Verzweigungspunkte abzieht.

2) Wir wollen endlich die Theorie der eindeutigen Transformationen noch verwerthen, um eine beim Beweise des erweiterten Correspondenzprincips gemachte Einschränkung (p. 454) zu beseitigen.**)

---

*) Vgl. Brill und Nöther: Math. Annalen, Bd. 7, p. 288.

**) Die folgende Betrachtung verdankt der Herausgeber einer Mittheilung von Brill. Vgl. dazu dessen Aufsatz über die Correspondenzformel, Math. Annalen, Bd. 7, p. 616 f.

Wir dachten uns eine Correspondenz auf $f = 0$ immer bestimmt durch eine Gleichung $\varphi(x, y) = 0$, die homogen von der r^{ten} Ordnung in den x_i, von der s^{ten} Ordnung in den y_i angenommen wurde. Bei den betreffenden Beweisen setzten wir immer voraus, dass nicht alle zu einem Punkte x oder y gehörigen Curven $\varphi = 0$ mit $f = 0$ dieselben *festen* Punkte gemein haben. Um nun auch den Einfluss solcher *„Ausnahmepunkte der Correspondenz* φ" auf die Zahl der *eigentlichen* nicht in diese Ausnahmepunkte oder in singuläre Punkte von f fallenden Coincidenzen festzustellen, verfahren wir folgendermassen.

Es sei auf der Grundcurve f ohne Doppelpunkte eine Correspondenz $(\alpha, \beta)_\gamma$ ohne Ausnahmepunkte der beregten Art durch eine Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ gegeben; die Zahl ihrer eigentlichen Coincidenzen ist dann:

$$C = \alpha + \beta + 2\gamma p = nr - \gamma + ns - \gamma + 2\gamma p,$$

wo r, s, α, β, γ wieder die früheren Bedeutungen haben. Wir denken uns nun die Curve f sammt der Correspondenz φ eindeutig transformirt, so dass $f = 0$ in $F = 0$, $\varphi = 0$ in $\Phi = 0$ übergeht. Dabei bleiben, wie aus dem Begriffe der Eindeutigkeit folgt, die Zahlen γ, C, p erhalten. Die nr bez. ns beweglichen Schnittpunkte, welche einem beliebigen Punkte von f entsprechen und von denen in letzterem selbst je γ Punkte liegen, werden nun nach der Transformation auf f im Allgemeinen erst dann wieder ein vollständiges Schnittpunktsystem bilden, wenn man ihnen eine Anzahl von *festen* Punkten der neuen Curve F zufügt, die wir eben als Ausnahmepunkte der Correspondenz Φ bezeichnen. In diese Ausnahmepunkte werden dann auf F eine gewisse Zahl (U) von *uneigentlichen* Coincidenzen fallen (deren Bestimmung uns besonders beschäftigen soll), während *ausserhalb* der Ausnahmepunkte noch wieder C eigentliche Coincidenzen liegen müssen. Die Gesammtheit der eigentlichen und uneigentlichen Coincidenzen werden wieder wie früher ein vollständiges Schnittpunktsystem bilden, d. h. durch eine *„Coincidenzcurve"* ausgeschnitten (p. 452f.); wir haben also *die Frage nach der Zahl U ihrer Schnittpunkte mit F zu erörtern, welche in Ausnahmepunkten der Correspondenz Φ liegen.*

Die Coëfficienten der Gleichung dieser Coincidenzcurve hängen von den Coëfficienten der Gleichungen $F = 0$ und $\Phi = 0$ ab, und ihre Ordnung ist dieselbe, als wenn weder Ausnahmepunkte von Φ noch singuläre Punkte von F vorhanden wären; denn man kann die letzteren durch continuirliche Aenderung der Coëfficienten von F und Φ beliebig zum Verschwinden bringen oder erzeugen. Sind aber r', s' die Ordnungen der Curven, welche vermöge $\Phi = 0$ einem Punkte y bez. x von F zugeordnet sind, so ist die Ordnung der Coincidenzcurve gleich $r' + s' + \gamma(\nu - 3)$. Nehmen wir nun an, dass F $d' + d''$

Doppelpunkte hat, dass σ' Schnittpunkte der zu einem Punkte y von F gehörigen Curven $\Phi = 0$ mit F in jeden der d' Doppelpunkte fallen, und dass diese Curven ausserdem noch durch e feste einfache Punkte von F je σ-fach hindurchgehen, dass endlich τ', τ die entsprechenden Zahlen für die zu einem Punkte x von F gehörigen Curven $\Phi = 0$ sind*), so haben wir für die Zahlen der beweglichen Schnittpunkte von F mit den Curven Φ die Werthe:

$$\alpha = nr - \gamma = \nu r' - \gamma - e\sigma - d'\sigma'$$
$$\beta = ns - \gamma = \nu s' - \gamma - e\tau - d'\tau',$$

und es soll die Relation bestehen:

$$U + (r'\nu - \gamma - e\sigma - d'\sigma') + (s'\nu - \gamma - e\tau - d'\tau')$$
$$+ \gamma\,[(\nu - 1)(\nu - 2) - 2d' - 2d''] = \nu\,[r' + s' + \gamma(\nu - 3)].$$

Hieraus ergibt sich sofort der Werth von U:

$$U = e(\sigma + \tau) + d'(\sigma' + \tau' + 2\gamma) + 2\gamma d''.$$

Es entfallen also — was mit den früheren Angaben übereinstimmt —
in jeden der e *einfachen Punkte* $\sigma + \tau$ *uneigentliche Coincidenzen*
„ „ „ d' *Doppelpunkte* $\sigma' + \tau' + 2\gamma$ „ „
„ „ „ d „ 2γ „ „

Bedeutet also C die Gesammtzahl aller uneigentlichen, U die aller eigentlichen Coincidenzen einer Correspondenz $(\alpha, \beta)_\gamma$ mit beliebigen festen Punkten; ist ferner Π die Ordnung der jene Coincidenzen ausschneidenden Curve, n die Ordnung der Grundcurve, p deren Geschlecht, so besteht die Relation:

$$\nu\Pi - U = C \quad (= \alpha + \beta + 2p\gamma).$$

*Die Anzahl aller eigentlichen Coincidenzen bestimmt sich daher gerade so, als ob keine Ausnahmepunkte für die Correspondenz vorhanden wären.***) Als Beispiel hiefür betrachten wir die auf $f = a_x{}^n = 0$ durch die Gleichung $a_x{}^{n-1} a_y = 0$ bestimmte Correspondenz. Wir haben dann in obigen Formeln zu setzen:

*) Wie sich dies gestaltet, wenn die Curven Φ sich in verschiedenen Doppelpunkten d' von F verschieden verhalten, ist leicht zu übersehen. Die Zahlen σ und τ sind übrigens nicht immer von einander unabhängig, vgl. darüber p. 455.

**) Dass vorstehender Beweis nur an Correspondenzen deducirt, die durch eindeutige Transformation aus Correspondenzen ohne feste Punkte ableitbar sind, ist unbedenklich; denn es kommt nur darauf an, den Einfluss jedes einzelnen festen Punktes zu bestimmen, und dieser wird nur von dem Verhalten der Grundcurve $f = 0$, sowie der Correspondenzcurven $\varphi = 0$ in der unmittelbaren Umgebung dieses Punktes, nicht aber von den übrigen Eigenschaften der Grundcurve, wie Ordnung, Geschlecht u. s. w. oder von deren sonstigen Beziehungen zur Correspondenz abhängen.

$r' = n - 1, \; s' = 1, \; \gamma = 2, \; \sigma' = 2, \; d' = d, \; \sigma = \tau = \tau' = d'' = c = 0;$
und also: $\alpha = n(n-1) - 2 - 2d, \quad \beta = n - 2.$

Für die Zahl der eigentlichen Coincidenzen, d. i. für die Zahl der Wendepunkte ergibt sich so das bekannte Resultat:

$$C = 3n(n-2) - 6d;$$

und in jedem Doppelpunkte von f liegen $\sigma' + \tau' + 2\gamma = 6$ uneigentliche Coincidenzen, was mit den früheren Sätzen über das Verhalten der Hesse'schen Curve (die hier Coincidenzcurve ist) übereinstimmt.

Durch diese Betrachtungen sind die früher vorläufig mitgetheilten Sätze bewiesen (p. 454), und somit auch die zahlreichen an dieselben geknüpften Anwendungen, insbesondere die Berührungsformeln auf p. 460 und 474. — Der Einfluss fester Punkte auf Correspondenzen mit mehrwerthigen Punkten (p. 461) endlich ist ganz in derselben Weise zu bestimmen. Man kann ferner diese und die früheren Ueberlegungen in Betreff der Correspondenzformel auch auf Curven mit beliebigen Singularitäten ausdehnen, wenn man sich letztere immer in der bekannten Weise aufgelöst denkt. Es verlangen dann nur die Fälle eine besondere Erörterung, in denen noch Verzweigungspunkte an einen vielfachen Punkt der Grundcurve herantreten (p. 494), indem in letztere noch einige der C eigentlichen Coincidenzen hineinfallen können.*)

Wir geben schliesslich noch eine Uebersicht über die bisher für den Riemann'schen Satz von der Erhaltung des Geschlechts gegebenen Beweise. Wir haben schon die folgenden kennen gelernt:

1) Beweis von Zeuthen, wo der Satz aus einer allgemeineren Relation**) zwischen den Geschlechtszahlen zweier mehrdeutig auf einander bezogenen Curven gefolgert wird (p. 459).

2) Beweis mit Hülfe der Zahl für die berührenden Curven eines Büschels (p. 666).

3) Directer algebraischer Beweis (p. 667 ff.).

Bei letzterem haben wir auch alle vielfachen Punkte von f ausführlich berücksichtigt. Für diese Punkte bedürfen sowohl die Beweise 1), 2) als auch die im Folgenden noch zu nennenden einer weiteren Ausführung (wenigstens gegenüber den gewöhnlichen Darstellungen), welche jedoch keinerlei principiellen Schwierigkeiten begegnen wird.

*) Vgl. das über den Einfluss von Rückkehrpunkten auf p. 457 u. 473 Gesagte.

**) Diese Relation würde nach der früher gegebenen Ableitung nur gelten, wenn die Beziehung beider Curven auf einander durch vollständige Schnittpunktsysteme vermittelt wird (vgl. p. 446, Anmk.); aus dem von Zeuthen a. a. O gegebenen Beweise geht aber hervor, dass dieselbe auch in anderen Fällen gültig bleibt. Für den Text kommt hier nur der erstere Fall in Betracht.

Wir erwähnen ferner folgende Beweise, die zum Theil andere Hülfsmittel und Begriffe benutzen, als wir bisher bei Behandlung algebraischer Fragen zur Anwendung brachten:

4) Ursprünglicher Beweis von Riemann.*) Zu einer algebraischen Gleichung $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, oder in rechtwinkligen Coordinaten: $F(x, y) = 0$, gehört bekanntlich eine sogenannte Riemann'sche Fläche, deren *Zusammenhang* gleich $2p + 1$ gesetzt wird, d. h. welche durch $2p$ *Querschnitte* in eine einfach zusammenhängende Fläche zerlegt werden kann, wenn p das Geschlecht von F bedeutet. Sind nun zwei Curven F und F' eindeutig auf einander bezogen, so sind es auch die zugehörigen Riemann'schen Flächen. Nach dem Begriffe des Zusammenhanges ist der letztere dann für beide Flächen derselbe, nämlich gleich $2p + 1$; daraus folgt unmittelbar die Gleichheit des Geschlechtes. — Es sei hervorgehoben, dass die Construction der zu F gehörenden Riemann'schen Fläche, insofern y als Function von x aufgefasst wird, zunächst von dem gewählten Coordinatensysteme abhängt. Es entspricht daher mehr den Begriffsbildungen der projectivischen Geometrie, wenn man nach dem Vorgange von Klein die Veränderlichen x_1, x_2, x_3 in der Gleichung $f = 0$ als Liniencoordinaten auffasst und dann direct an die Klassencurve $f = 0$ (ohne Rücksicht auf irgend ein Coordinatensystem) die Construction einer die Ebene mehrblättrig überdeckenden Fläche anknüpft, wie wir es früher geschildert haben (p. 611). Diese Fläche leistet dann für die Theorie der wie f verzweigten Functionen dasselbe, wie die von Riemann construirte; man kann sie insbesondere zum Beweise des Satzes von der Erhaltung des Geschlechts benutzen.**) Inzwischen würde uns eine nähere Erörterung des betreffenden Gedankenganges hier zu weit führen. Es sei nur bemerkt, dass die Beziehung beider Flächen letzterer Art auf einander nicht für *alle* Punkte derselben eindeutig ist, wenn die Curven eindeutig auf einander bezogen sind, zu denen sie gehören; es treten vielmehr auf jeder Fläche im Allgemeinen „Fundamentalpunkte“ auf, d. h. Punkte, denen je eine ganze Curve der andern Fläche entspricht. An Stelle des Satzes von der Gleichheit des Zusammenhanges zweier eindeutig auf einander bezogenen Flächen hat man daher eine Relation zu benutzen, welche zwischen den Zusammenhangs-Zahlen beider Flächen und den Anzahlen der beiderseitig auftretenden Fundamentalpunkte besteht.***)

---

*) Theorie der Abel'schen Functionen, §. 11, Crelle's Journal, Bd. 54.

**) Vgl. F. Klein: Sitzungsberichte der phys.-med. Societät zu Erlangen, 11. Mai 1874.

***) Vgl. F. Klein: Bemerkungen über den Zusammenhang der Flächen, Math. Annalen, Bd. 7, p. 549.

5) Beweis von Cremona*); derselbe macht von Vorstellungen der Raumgeometrie Gebrauch. Man denke sich nämlich die beiden betrachteten Curven f und f' in verschiedenen Ebenen E und E' gelegen; ihre charakteristischen Zahlen seien bez. n, d, r und ν, δ, ϱ. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte bilden dann eine Linienfläche von der Ordnung $n + \nu$. Diese Fläche wird von der Ebene E' in der Curve f' geschnitten und in einer anderen Curve der Ordnung n, bestehend aus den Verbindungslinien der n Schnittpunkte von E' und f mit den entsprechenden Punkten von f'. Die Ebene E' enthält sonach n Linien der Fläche und muss die letztere daher in n bez. auf diesen Linien gelegenen Punkten berühren. Abgesehen von diesen Berührungspunkten hat nun der Schnitt E' mit der Fläche

$$n\nu + \tfrac{1}{2} n (n - 1) + \delta + \varrho - n = n\nu + \tfrac{1}{2} n (n - 3) + \delta + \varrho$$

Doppelpunkte, und diese Zahl muss die Ordnung der Doppelcurve unserer Linienfläche ausmachen. Sie muss also gleich der entsprechenden Zahl sein, welche man durch Betrachtung der Ebene E erhält, d. h. gleich der Zahl:

$$n\nu + \tfrac{1}{2} \nu (\nu - 3) + d + r;$$

und daraus folgt in der That: $p = \pi$.

6) Beweis von Bertini.**) Die Punkte x von f verbinden wir mit einem festen Punkt a, die entsprechenden Punkte y von F mit einem anderen festen Punkte b. Jeder Linie durch a entsprechen dann n Linien durch b, und der Schnittpunkt ξ je zweier entsprechender Linien wird eine neue Curve X beschreiben, welche sowohl auf f wie auf F eindeutig bezogen ist; und zwar ergiebt unsere Construction für die Coordinaten von ξ die Werthe:

$$\varrho \xi_i = (xab)\, y_i - (xay)\, b_i,$$

oder, wenn die Beziehung zwischen f und F wieder durch die Gleichungen $\mu y_i = \Phi_i(x)$ vermittelt ist:

$$\sigma \xi_i = (xab)\, \Phi_i - (xa\Phi)\, b_i.$$

*) Vgl. dessen Preliminari di una teoria geometrica delle superficie, Abhandlungen der Academie zu Bologna, 2ª Serie, t. 6 und 7; p. 54 in der deutschen Uebersetzung von Curtze, Berlin 1870.

**) Vgl. Battiglini's Giornale, t. 7, sowie Salmon's higher plane curves, p. 77 in Fiedler's Uebersetzung, und dazu Zeuthen: Math. Annalen, Bd. 3, a. a. O.; in etwas anderer Form und Anordnung findet sich ein analoger Beweisgang bei Voss: Göttinger Nachrichten, 1873. Man findet hier die betreffenden Abzählungen mit Hülfe des Chasles'schen Correspondenzprincips erledigt. Algebraisch formulirt wurde der Beweis von Clebsch; vgl. darüber Nöther: Math. Annalen, Bd. 8, p. 497.

Nehmen wir nun insbesondere a und b zu Ecken des Coordinatendreiecks (und diese mögen nicht auf f und F liegen), d. h. setzen wir $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$, $b_1 = 0$, $b_3 = 0$, $b_3 = 1$, so wird:

$$\text{(I)} \qquad \sigma \xi_1 = x_1 \,.\, \Phi_1(x), \quad \sigma \xi_2 = x_1 \,.\, \Phi_2(x), \quad \sigma \xi_3 = x_3 \Phi_1(x).$$

Die Curven Φ mögen nun die Curve f in ν beweglichen Punkten treffen, so, dass ν die Ordnung von F ist. Dann schneiden die Transformationscurven der durch (I) dargestellten Transformation, d. h. die Curven des Netzes

$$u_1 x_1 \Phi_1(x) + u_2 x_1 \Phi_2(x) + u_3 x_3 \Phi_1(x) = 0$$

die Curve f in $\nu + n$ beweglichen Punkten; und also *ist* X *von der Ordnung* $\nu + n$. Die Linien des Büschels $\xi_1 + \lambda \xi_3 = 0$ schneiden aber X nur in n beweglichen Punkten, denn denselben entsprechen die Linien des Büschels $x_1 + \lambda x_3 = 0$ (indem sich der Factor Φ_1 absondert). Die Curve X hat daher im Punkte a (d. i. $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$) einen ν-fachen Punkt. Von diesem lassen sich noch $\varkappa - 2\nu$ Tangenten an die Curve X legen*), wenn $\varkappa$ die Klasse von X bedeutet. Ist ferner χ das Geschlecht der letzteren Curve, so haben wir nach den Plücker'schen Formeln:

$$\varkappa - 2\nu = 2\chi - 2 + 2(n + \nu) - 2\nu.$$

Ebenso gross muss aber auch die Zahl der entsprechenden Linien des Büschels $x_1 + \lambda x_3 = 0$ sein, welche f berühren, d. h. die Zahl

$$k + r = 2p - 2 + 2n;$$

und daraus folgt $p = \chi$. Ebenso können wir auch die Beziehung zwischen den Curven F und X betrachten, wodurch wir das Resultat $\pi = \chi$ erhalten, wenn π das Geschlecht von F ist; und somit ist in der That $p = \pi$. — Die Einfachheit dieses Beweises beruht in der Einführung der Hülfscurve X.

7) Beweis von Brill und Nöther. Auf jeder C_n vom Geschlechte p giebt es eine ∞^{p-1}-Schaar von Punktsystemen, die durch adjungirte C_{n-3}, ausgeschnitten werden, ein Satz, welchen wir früher als eine Folge eines anderen Theorems über Schnittpunktsysteme adjungirter C_{n-3} erkannten (p. 441). Diesen, sowie jenes Theorem werden wir hier benutzen. Auf f nehmen wir eine Gruppe G_π von π Punkten beliebig an, mit welcher eine andere Gruppe G_ϱ residual sei. Wäre $\pi > p$, so gäbe es noch mindestens $\infty^{\pi-p}$ andere Punktgruppen von je π Punkte, welche ebenfalls sämmtlich zu G_ϱ residual, d. i. zu G_π corresidual wären (p. 432). Diese Schaar $g_\pi^{(\pi-p)}$ geht bei der

*) Unter ihnen sind die Verbindungslinien von a mit etwaigen Rückkehrpunkten von X mitzuzählen (p. 666 f.).

eindeutigen Transformation nach dem Begriffe einer solchen wieder in eine Schaar $g_\pi^{(\pi-p)}$ auf F über. Für letztere ist dann aber die Bedingung

$$q > Q - \pi + 1$$

erfüllt, denn wir haben $q = p - \pi$, $Q = \pi$. Die auf F gelegene Schaar $g_\pi^{(p-\pi)}$ kann also nach einem früheren Satze durch adjungirte $C_{\nu-3}$ ausgeschnitten werden (p. 437) und also jede Gruppe derselben nur von $\pi - 1$ willkührlichen Bestimmungsstücken abhängen, während wir π Punkte der entsprechenden Gruppe auf f beliebig annahmen. In der Annahme $\pi > p$ liegt somit ein Widerspruch; das Nämliche lässt sich von der Annahme $\pi < p$ auf demselben Wege nachweisen, und somit bleibt nur die Möglichkeit $\pi = p$, q. e. d.

II. Schnittpunktsysteme adjungirter Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung mit der Grundcurve. — Specialschaaren.

In Vorstehendem haben wir uns vorwiegend mit der Theorie der eindeutigen Transformation als solcher beschäftigt; jetzt tritt daher an uns naturgemäss die Frage nach solchen Eigenschaften einer Curve heran, welche bei eindeutigen Transformationen erhalten bleiben, ebenso, wie wir früher die Eigenschaften einer Curve studirten, welche durch Collineationen nicht zerstörbar sind. Im Folgenden *werden wir also alle Curven als wesentlich identisch betrachten müssen, die eindeutig in einander überführbar sind.* Welches sind aber nun — so müssen wir zuerst fragen — die Kennzeichen für die Möglichkeit einer solchen Transformation? Als nothwendige Bedingung erkannten wir bereits die Gleichheit des Geschlechtes der beiden vorliegenden Curven, ausreichend ist dieselbe aber nicht. So war auch die Gleichheit der Ordnung zweier Curven nothwendig, um dieselben linear in einander überführen zu können; ausserdem aber mussten auch die absoluten Invarianten beider Curven übereinstimmen, wenn dies möglich sein sollte.*) Diese absoluten Invarianten waren gewisse für die Curve charakteristische Constante, und ihre Zahl daher gleich der Zahl derjenigen Constanten in der Gleichung der Curve, welche durch lineare Transformation nicht zerstört werden können, d. h. gleich $\frac{1}{2} n (n + 3) - 8$. Ebenso wird nun die Möglichkeit der *eindeutigen* Transformation zweier Curven in einander von gewissen absoluten Constanten, die man dann als *Moduln* bezeichnet, abhängen, wie wir in der That noch genauer sehen werden**); und die Zahl

*) Ueberdies war noch nöthig, dass für jede der beiden Curven *dieselben* Covarianten, etc. identisch verschwinden, wenn eine von ihnen durch identisches Verschwinden von Functionalinvarianten specialisirt ist.

**) Vgl. den folgenden Abschnitt.

dieser Moduln muss dann gleich der Zahl der Constanten sein, welche man in der Gleichung der betrachteten Curve durch eindeutige Transformation nicht mehr zerstören kann. Um diese Zahl zu bestimmen, muss man also vor Allem darauf ausgehen, die Ordnung der Curve möglichst zu erniedrigen; und so werden wir zu der Aufgabe geführt, *die Curve niedrigster Ordnung („Normalcurve“) anzugeben, in welche eine Curve von gegebenem Geschlechte eindeutig übergeführt werden kann.* Die allgemeine Lösung derselben drängt aber weiter zu allgemeineren Untersuchungen über Punktsysteme auf einer Curve von solchen speciellen Eigenschaften, welche bei eindeutigen Transformationen erhalten bleiben; und dabei wird es sich besonders um *Schnittpunktsysteme adjungirter* C_{n-3} handeln müssen, denn eine solche geht in das einer zu C_ν adjungirten $C_{\nu-3}$ über, wenn die C_n in eine C_ν transformirt wird. Den reichen Stoff, welcher sich uns im Anschlusse an diese Fragen aufdrängt, werden wir nun in folgender Anordnung erledigen:

1) untersuchen wir die Transformation der C_n mittelst eines Netzes von adjungirten C_{n-3} als Transformationscurven.
2) betrachten wir eine Reihe von Beispielen für Punktsysteme besonderen Charakters auf einer C_n und deren gegenseitige Beziehungen.
3) behandeln wir allgemein die Bestimmung solcher *Punktgruppen auf der* C_n, *durch welche eine höhere Mannigfaltigkeit adjungirter* C_{n-3} *geht, als man nach der Zahl der Punkte einer solchen Gruppe erwarten sollte („Specialgruppe“).* Dabei werden wir insbesondere den sogenannten Riemann-Roch'schen Satz kennen lernen.

Hier soll sich dann in den beiden folgenden Abschnitten anschliessen:

4) die Bestimmung der Normalcurven niedrigster Ordnung und der Moduln.
5) die vollständige (anzahl-geometrische) Erledigung einiger sich bietenden Probleme durch Untersuchungen über Correspondenzen.

Die wiederholt hervorgehobenen ausgezeichneten Eigenschaften der adjungirten C_{n-3} legen es nahe, ein zweifach unendliches System von solchen Curven an Statt der Transformationscurven Φ zu benutzen. Wir wollen dabei alle festen Punkte des Netzes auf die Curve f selbst legen, so dass dasselbe nur von Punkten dieser Curve abhängig ist. Da nun von den Schnittpunkten einer adjungirten C_{n-3} im Allgemeinen $p-1$ die übrigen $p-1$ bestimmen, so werden durch $p-3$ *beliebige* Punkte von f noch ∞^2 adjungirte C_{n-3} hindurchgehen. Wir haben also in obigen Formeln zu setzen:

$$s=n-3,\quad r_i=r_i''=i-1,\quad \alpha_i=\alpha_i'',\quad \alpha_i'=0,\quad r_i'=0,\quad \sigma=p-3,$$

und erhalten dadurch aus (15) und (19):

$$\nu = p + 1, \quad \gamma = \tfrac{1}{2} p (p - 3).$$

*Es ist also im Allgemeinen möglich eine Curve f vom Geschlechte p in eine Curve $(p + 1)^{ter}$ Ordnung mit $\frac{1}{2} p (p - 3)$ Doppelpunkten zu transformiren; und zwar geschieht dies durch eine Transformation $(n - 3)^{ter}$ Ordnung, bei der alle Curven Φ zu f adjungirt sind und ausserdem durch $p - 3$ beliebig auf f gewählte Punkte σ gehen.**)

Zu $p - 3$ beliebigen Punkten von f kann man hiernach noch $\frac{1}{2} p (p - 3)$ Punktepaare der Art finden, dass durch jene $p - 3$ Punkte und durch die Punkte eines solchen Paares (zusammen also durch $p - 1$ Punkte) noch *einfach unendlich viele* adjungirte C_{n-3} gehen. Dieses Resultat wollen wir noch in einer etwas anderen Form aussprechen, welche für das Folgende von Wichtigkeit wird. Ist nämlich das betrachtete Curvennetz gegeben durch:

$$\alpha_1 \varphi_1 (x) + \alpha_2 \varphi_2 (x) + \alpha_3 \varphi_3 (x) = 0,$$

und bilden y, z die Punkte eines der genannten Paare, so ist:

$$\varrho \varphi_1 (y) = \varphi_1 (z), \quad \varrho \varphi_2 (y) = \varphi_2 (z), \quad \varrho \varphi_3 (y) = \varphi_3 (z).$$

Die Zahl $\frac{1}{2} p (p - 3)$ giebt also auch die Zahl der Werthepaare $y z$, welche gleichzeitig den drei Gleichungen

$$\varphi_1 (y) \varphi_2 (z) - \varphi_2 (y) \varphi_1 (z) = 0, \quad \varphi_2 (y) \varphi_3 (z) - \varphi_3 (y) \varphi_2 (z) = 0,$$
$$\varphi_3 (y) \varphi_1 (z) - \varphi_1 (y) \varphi_3 (z) = 0$$

genügen (wenn ausserdem $f(y) = 0$, $f(z) = 0$), wobei die identischen Lösungen $y = z$ schon ausgeschlossen sind. Die genannten Gleichungen können wir auch durch das Verschwinden einer Matrix in der Form:

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_1 (y) & \varphi_2 (y) & \varphi_3 (y) \\ \varphi_1 (z) & \varphi_2 (z) & \varphi_3 (z) \end{matrix} \right\| = 0$$

zusammenfassend darstellen; und das Auftreten solcher Matrices ist für alle im Folgenden behandelten Probleme charakteristisch.

Auf der C_n gibt es sonach ∞^{p-3} Punktgruppen G_{p-1} von $p - 1$ Punkten dieser besonderen Art, und *Gleiches gilt für jede auf die C_n*

*) Diese Transformation wurde von Clebsch und Gordan angegeben (Theorie der Abel'schen Functionen, Leipzig 1866, p. 65). Dieselbe ist selbstverständlich nicht möglich für die Fälle $p = 0, 1, 2$, welche am Schlusse dieser Abtheilung besonders behandelt sind. Ausserdem kann nur eine Ausnahme eintreten, wenn durch $p - 3$ beliebige Punkte schon eine Zahl weiterer Punkte der C_{n-3} mit bestimmt sind, wie bei den sogenannten *hyperelliptischen* Curven (zu denen auch *alle* Curven mit $p = 2$ gehören); wir werden weiterhin sehen, dass letztere auch den einzigen Ausnahmefall bilden. Ueber die hyperelliptischen Curven vgl. auch den Schluss des folgenden Abschnittes.

eindeutig bezogene Curve: eine solche Punktgruppe geht immer in eine Gruppe derselben Beschaffenheit über, ohne doch als vollständiges Schnittpunktsystem der C_n mit einer anderen Curve definirt zu sein. Zu jeder dieser Gruppen G_{p-1} gehört nun eine ∞^1-Schaar von Gruppen Γ_{p-1}, ausgeschnitten auf der C_n eben vermittelst des durch G_{p-1} gehenden Büschels von C_{n-3}; und es ist sehr bemerkenswerth, dass *man auch umgekehrt durch jede dieser residualen Gruppen Γ_{p-1} noch einen Büschel adjungirter C_{n-3} legen kann* (vgl. auch p. 439). Der Beweis für diese Behauptung ergibt sich sehr einfach, wenn man den Satz benutzt, dass *jede* auf der C_n mögliche Schaar $\gamma_p^{(1)}$ durch einen Büschel von adjungirten C_{n-3} ausgeschnitten werden kann (p. 438). Jede der ∞^1 Gruppen nämlich können wir durch einen beliebig auf der C_n gewählten *festen* Punkt A (der nur nicht in einen Punkt der Basisgruppe G_{p-1} fallen mag) zu einer Gruppe Γ_p ergänzen; die Gesammtheit dieser Gruppen Γ_p kann dann nach obigem Satze durch einen Büschel C_{n-3} ausgeschnitten werden.*) Allen Curven des letzteren muss dann aber der feste Punkt A gemeinsam sein, und somit haben wir einen zweiten (von dem ursprünglichen mit der Basisgruppe G_{p-1} verschiedenen) Büschel von C_{n-3} gefunden, welcher ebenfalls die Schaar $\gamma_{p-1}^{(1)}$ auf der C_n bestimmt.**) Durch jede Gruppe Γ_{p-1} der letzteren gehen also zwei und somit einfach unendlich viele C_{n-3}, q. e. d. Den hier abgeleiteten Satz werden wir noch in den folgenden Beispielen verschiedentlich benutzen müssen.

---

*) Dass obiger Satz auch für Schaaren $g_p^{(1)}$ mit festen Punkten gilt, folgt unmittelbar aus dem früheren Beweise (p. 437 f.); man darf dann nur nicht den dort mit α bezeichneten Punkt gerade in einen festen Punkt hineinlegen.

**) Der Satz ist evident für eine C_5 mit 2 Doppelpunkten ($p = 4$). Hier ist $p - 1 = 3$. Durch drei Punkte G_3 aber und die beiden Doppelpunkte kann man nur noch ∞^1 Kegelschnitte legen, wenn die drei Punkte mit einem Doppelpunkte auf einer Geraden liegen; jede C_2 des Büschels zerfällt dann in diese feste Gerade und eine (bewegliche) Gerade durch den anderen Doppelpunkt. Die Strahlen des durch letzteren gehenden Büschels bestimmen also die Gruppen Γ_3 auf der C_5; durch jede dieser Gruppen Γ_3 geht dann selbstverständlich auch ein analoger Büschel von C_2, bestehend aus der die Gruppe Γ_3 ausschneidenden Geraden und dem Strahlbüschel durch den ersten Doppelpunkt. Es mag jedoch besonders empfohlen werden, den auf p. 438 gegebenen Beweis an diesem einfachsten Beispiele auch schematisch nochmals durchzuführen. — Die Behauptung des Textes spricht sich hier allgemein in dem Satze aus: *Wenn ein durch gewisse drei Punkte $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$ und die beiden Doppelpunkte der C_5 gehender Kegelschnitt noch eine Willkürlichkeit besitzt und die C_5 noch in den Punkten $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ schneidet, so besitzt auch ein durch $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ und die Doppelpunkte gehender Kegelschnitt noch eine Willkürlichkeit.*

Kehren wir jedoch zu den *Transformationen mittelst adjungirter* C_{n-3} zurück; dieselben sind deshalb von besonderer Wichtigkeit, weil es eben durch sie gelingt, die Normalcurven niedrigster Ordnung herzustellen. Dass man in der That $s = n - 3$ nehmen muss, um f in eine Curve F von möglichst niedriger Ordnung zu transformiren, folgt sofort aus unseren früheren Untersuchungen über Schnittpunktsysteme linearer Schaaren von Curven. Ist nämlich q die Mannigfaltigkeit einer solchen Schaar, Q die Zahl der beweglichen Schnittpunkte, s die Ordnung der ausschneidenden Curven, so ist nach p. 436

$$\text{für } s = n - 3 : Q < q + p - 1, \quad \text{für } s > n - 3 : Q \leqq q + p.$$

Q nimmt also jedenfalls den kleinsten Werth für $s = n - 3$ an; und überdies haben wir gesehen, dass auch *jede* Schaar von Punkten, für die $Q < q + p$ durch adjungirte C_{n-3} ausgeschnitten werden kann (p. 437). Damit ist aber unsere Behauptung bewiesen, denn in unserem Falle haben wir nur $q = 2$ und $Q = \nu$ zu nehmen, wo dann ν eben die Ordnung von F ist.

Genauer aufgezählt erhalten wir von $p = 3$ an durch unsere Transformation, wenn die benutzten C_{n-3} durch $p - 3$ *beliebig* auf der C_n gewählte Punkte gehen, folgende Curven $(p + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$p = 3$:	Curven	4ter	Ordnung	mit	0	Doppelpunkten
$p = 4$:	„	5ter	„	„	„ 2	„	„
$p = 5$:	„	6ter	„	„	„ 5	„	„
$p = 6$:	„	7ter	„	„	„ 9	„	„
$p = 7$:	„	8ter	„	„	„ 14	„	„
$p = 8$:	„	9ter	„	„	„ 20	„	„
. . .	. .	. .	. .	. .	. .	. .

Die allgemeine Curve 5ter Ordnung $(p = 6)$ z. B. erscheint dabei als Transformation einer *speciellen* Curve 7ter Ordnung mit 9 Doppelpunkten mit der Eigenschaft, dass man auf ihr auf zweifach unendlich viele Weisen 5 $(= p - 1)$ Punkte bestimmen kann, durch welche noch *zwei*fach unendlich viele C_{n-3} hindurchgehen, was auf einer allgemeinen C_7 mit $p = 6$ nicht möglich sein wird.*) Die betreffenden C_{n-3} $(= C_4)$ bilden dann eine Schaar mit 5 beweglichen Schnittpunkten (also $\nu = 5$ in Obigem); und die entsprechende Schaar $g_5^{(2)}$ auf der C_5 wird ausgeschnitten durch die Geraden der Ebene, welche durch eine beliebige feste Gerade zu einer C_2 $(= C_{n-3})$ ergänzt werden. Ebenso erscheint die Curve 5ter Ordnung mit 1 Doppelpunkte als Transformation einer speciellen Curve 6ter Ordnung mit 5 Doppelpunkten, u. s. f.

*) Denn nach der unten mitgetheilten Tabelle ist $\nu = 6$ im Allgemeinen der Minimalwerth von ν (dort mit R bezeichnet) für $p = 6$.

Man sieht hieraus, wie überhaupt die Möglichkeit mittelst eindeutiger Transformation die Curvenordnung zu erniedrigen davon abhängt, ob auf der vorliegenden Curve Punktgruppen besonderen Charakters vorhanden sind oder nicht. Aus dieser Ueberlegung folgt aber auch sofort, dass unsere Curven $(p+1)^{\text{ter}}$ Ordnung selbst nicht nothwendig diejenigen *niedrigster* Ordnung sind, welche überhaupt aus einer vorliegenden allgemeinen Curve p^{ten} Geschlechtes hervorgehen können; denn die $p-3$ Basispunkte des zur Transformation benutzten Netzes von adjungirten C_{n-3} waren auf der C_n ganz *beliebig* gewählt. Es entsteht jetzt vielmehr die Frage, ob man nicht specielle Gruppen von mehr als $p-3$ Punkten zu Basispunkten eines solchen Netzes wählen kann, wo dann die C_{n-3} dieses Netzes in weniger als $p+1$ beweglichen Punkten schneiden würden. Zur Beantwortung dieser Frage haben wir also folgende Aufgabe zu lösen: *Es sollen auf einer vorliegenden C_n vom Geschlechte p diejenigen Punktgruppen gefunden werden, durch welche man noch zweifach unendlich viele adjungirte C_{n-3} derart legen kann, dass die Zahl der beweglichen Schnittpunkte eine möglichst kleine wird.*

Die Behandlung dieser Aufgabe führt uns naturgemäss zur Fortsetzung der früher abgebrochenen algebraischen Untersuchungen über Schnittpunktsysteme adjungirter C_{n-3} (p. 437 ff). Bevor wir aber auf die betreffenden Erörterungen allgemeinerer Natur eingehen, wird es zur Veranschaulichung der Fragen, um die es sich handelt, gut sein, ein Beispiel ausführlich zu betrachten; und zwar wollen wir zeigen, dass es möglich ist, *eine Curve* 7ter *Ordnung mit* 9 *Doppelpunkten*, welche soeben als Normalcurve für $p=6$ aufgeführt wurde, in *eine Curve* 6ter *Ordnung mit* 4 *Doppelpunkten* eindeutig überzuführen.

Wir haben also nachzuweisen, dass es auf einer C_7 mit $p=6$ eine Schaar $\gamma_6^{(2)}$, d. i. eine 2-fach unendliche Schaar von je 6 Punkten, gibt, welche durch ein Netz von adjungirten C_4 $(=C_{n-3})$ ausgeschnitten wird, oder — was dasselbe ist — dass man auf der C_7 Gruppen G_4 von je 3 Punkten (sei es in endlicher oder unendlicher Zahl) bestimmen kann, durch welche noch *zwei*fach unendlich viele C_4 hindurchgehen (während man ja durch $4=p-2$ *beliebig* auf der C_7 gewählte Punkte nur *ein*fach unendlich viele C_4 legen kann). Dies aber führt zu der Aufgabe drei Punkte $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$ so zu bestimmen, dass die durch sie gehenden zweifach unendlich vielen C_4 sämmtlich noch einen vierten Punkt $y^{(4)}$ der C_7 enthalten. Nun bildet die Gesammtheit der adjungirten C_4 eine lineare ∞^5-Schaar von Curven:

$$\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)+\ldots+\alpha_6\varphi_6(x)=0.$$

Die soeben gemachte Forderung können wir also dahin aussprechen, dass von den vier Gleichungen

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \varphi_1 (y^{(1)}) + \alpha_2 \varphi_2 (y^{(1)}) + \dots + \alpha_6 \varphi_6 (y^{(1)}) = 0 \\
\alpha_1 \varphi_1 (y^{(2)}) + \alpha_2 \varphi_2 (y^{(2)}) + \dots + \alpha_6 \varphi_6 (y^{(2)}) = 0 \\
\alpha_1 \varphi_1 (y^{(3)}) + \alpha_2 \varphi_2 (y^{(3)}) + \dots + \alpha_6 \varphi_6 (y^{(3)}) = 0 \\
\alpha_1 \varphi_1 (y^{(4)}) + \alpha_2 \varphi_2 (y^{(4)}) + \dots + \alpha_6 \varphi_6 (y^{(4)}) = 0
\end{aligned}$$

die letzte eine Folge der drei ersten ist, wodurch dann in der That noch 3 der 6 Verhältnissgrössen α_i willkürlich bleiben. Und dies drückt sich dadurch aus, dass alle *vier*gliedrigen aus den $\varphi_i (y^{(k)})$ zu bildenden Determinanten verschwinden müssen, d. h. dass folgendes durch Verschwinden einer Matrix dargestelltes System von Gleichungen besteht:

$$\left\| \begin{matrix}
\varphi_1 (y^{(1)}) & \varphi_2 (y^{(1)}) & \varphi_3 (y^{(1)}) & \varphi_4 (y^{(1)}) & \varphi_5 (y^{(1)}) & \varphi_6 (y^{(1)}) \\
\varphi_1 (y^{(2)}) & \varphi_2 (y^{(2)}) & \varphi_3 (y^{(2)}) & \varphi_4 (y^{(2)}) & \varphi_5 (y^{(2)}) & \varphi_6 (y^{(2)}) \\
\varphi_1 (y^{(3)}) & \varphi_2 (y^{(3)}) & \varphi_3 (y^{(3)}) & \varphi_4 (y^{(3)}) & \varphi_5 (y^{(3)}) & \varphi_6 (y^{(3)}) \\
\varphi_1 (y^{(4)}) & \varphi_2 (y^{(4)}) & \varphi_3 (y^{(4)}) & \varphi_4 (y^{(4)}) & \varphi_5 (y^{(4)}) & \varphi_6 (y^{(4)})
\end{matrix} \right\| = 0 .$$

Dies System enthält aber nur *drei* von einander unabhängige Gleichungen, nämlich z. B. diejenigen, welche aus der einen Gleichung:

$$\left| \begin{matrix}
\varphi_1 (y^{(1)}) & \varphi_2 (y^{(1)}) & \varphi_3 (y^{(1)}) & \varphi_i (y^{(1)}) \\
\varphi_1 (y^{(2)}) & \varphi_2 (y^{(2)}) & \varphi_3 (y^{(2)}) & \varphi_i (y^{(2)}) \\
\varphi_1 (y^{(3)}) & \varphi_2 (y^{(3)}) & \varphi_3 (y^{(3)}) & \varphi_i (y^{(3)}) \\
\varphi_1 (y^{(4)}) & \varphi_2 (y^{(4)}) & \varphi_3 (y^{(4)}) & \varphi_i (y^{(4)})
\end{matrix} \right| = 0$$

für $i = 4, 5$ oder 6 entstehen.*) Diese drei Gleichungen enthalten in Rücksicht auf die Bedingungen

$$f (y^{(1)}) = 0, \quad f (y^{(2)}) = 0, \quad f (y^{(3)}) = 0, \quad f (y^{(4)}) = 0,$$

wo $f (x) = 0$ die Gleichung der C_7 ist, noch vier Unbekannte: *Von den vier Punkten $y^{(i)}$ kann daher noch einer, etwa $y^{(4)}$, willkürlich gewählt werden; zu ihm wird man dann eine endliche Zahl von Punktetripeln $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$ finden können, welche dem gefundenen Gleichungssysteme genügen.***)

Wählt man nun zu Transformationscurven das Netz der durch vier solche Punkte $y^{(i)}$ gehenden C_4, so schneiden die Curven

*) Vgl. z. B. Baltzer's Determinantentheorie p. 42, sowie die späteren allgemeinen Erörterungen des Textes (p. 703 f.).

**) Dass die Zahl der Lösungen nicht Null sein kann, wird sich später ergeben: am Schlusse des 4. Abschnittes werden wir dieselbe gleich 5 finden.

desselben auf der C_7 eine Schaar $\gamma_6^{(2)}$ aus, d. h. *die C_7 wird dadurch in eine C_6 eindeutig übergeführt.**)

Da wir von den vier Punkten $y^{(i)}$ noch einen willkürlich annehmen konnten, so gibt es im Ganzen noch eine ∞^1-Schaar von solchen Gruppen zu je vier Punkten; die Gesammtheit dieser Gruppen nun kann man durch einen Büschel von C_4 auf der C_7 ausschneiden, welche noch durch 6 feste Punkte der C_7 gehen (wie schon aus einem auf p. 437 gegebenen Satze hervorgeht); und zwar wird sich zeigen, dass man zu solchen 6 Basispunkten *irgend* eine Gruppe der Schaar $\gamma_6^{(2)}$ wählen kann, deren Gruppen sämmtlich zu irgend einer Gruppe G_4 von 4 Punkten $y^{(i)}$ residual waren. Dies Beispiel ist für die folgenden allgemeineren Erörterungen von grosser Wichtigkeit und mag deshalb noch eingehender besprochen werden. Man erkennt übrigens die Verwandtschaft unserer letzten Behauptung mit dem früheren Satze, dass jede Schaar $g_{p-1}^{(1)}$ aus Punktgruppen besteht, durch welche ebenfalls noch je ∞^1 C_{n-3} gehen (p. 688); wir haben hier eben zwei Specialfälle eines allgemeineren Theorems vor uns. — Nehmen wir vier Punkte $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$, $y^{(4)}$ nun so bestimmt an, dass durch sie noch ∞^2 C_4 gehen. Es seien ferner $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, $x^{(4)}$, $x^{(5)}$, $x^{(6)}$ die sechs weiteren Schnittpunkte einer C_4 dieser ∞^2-Schaar mit der C_7. Durch die vier Punkte y und jeden beliebigen Punkt der Ebene gehen dann noch ∞^1 C_4, insbesondere also auch durch die Punkte y und irgend einen der sechs Punkte $x^{(i)}$; d. h. letztere bilden zusammen eine Gruppe von $p - 1 = 5$ Punkten, zu welchen es eine residuale Schaar $g_5^{(1)} = g_{p-1}^{(1)}$ gibt. Dann aber gehen auch durch jede Gruppe der letzteren Schaar noch ∞^1 C_4, insbesondere also auch (z. B. für $i = 6$) durch die 5 Punkte $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, $x^{(4)}$, $x^{(5)}$; diese 5 Punkte liegen mit jedem *beliebigen* Punkte ξ auf einer C_4, so dass für $\varphi_i(\xi) = X_i$ die Gleichung besteht:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x^{(1)}) & \varphi_2(x^{(1)}) & \varphi_3(x^{(1)}) & \varphi_4(x^{(1)}) & \varphi_5(x^{(1)}) & \varphi_6(x^{(1)}) \\ \varphi_1(x^{(2)}) & \varphi_2(x^{(2)}) & \varphi_3(x^{(2)}) & \varphi_4(x^{(2)}) & \varphi_5(x^{(2)}) & \varphi_6(x^{(2)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1(x^{(5)}) & \varphi_2(x^{(5)}) & \varphi_3(x^{(5)}) & \varphi_4(x^{(5)}) & \varphi_5(x^{(5)}) & \varphi_6(x^{(5)}) \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 \end{vmatrix} = 0,$$

in welcher die X_i *willkürliche***) Grössen sind. Da wir aber für $x^{(i)}$ jeden der sechs Punkte x wählen konnten, so müssen auch die weiteren 5 Gleichungen bestehen, welche aus der hier stehenden hervor-

---

*) Vgl. darüber **Brill**: Math. Annalen, Bd. 2, p. 471.

**) Zunächst sind nur *zwei* Quotienten $X_i : X_k$ willkürlich. Durch sie sind aber die ξ_i und somit auch die andern Grössen X *sieben*deutig bestimmt; woraus sich dann das Verschwinden der einzelnen Coëfficienten der letzteren ergibt.

gehen, wenn man je einen der Punkte $x^{(1)} \ldots x^{(5)}$ mit $x^{(6)}$ vertauscht; und dies können wir dahin aussprechen, dass *alle fünfgliedrigen Unterdeterminanten der folgenden Determinante verschwinden müssen:*

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x^{(1)}) & \varphi_2(x^{(1)}) & \ldots & \varphi_6(x^{(1)}) \\ \varphi_1(x^{(2)}) & \varphi_2(x^{(2)}) & \ldots & \varphi_6(x^{(2)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1(x^{(6)}) & \varphi_2(x^{(6)}) & \ldots & \varphi_6(x^{(6)}) \end{vmatrix}.$$

Zu genau demselben Systeme von Gleichungen wird man indess — und das ist das Wichtige — durch die Forderung geführt, sechs Punkte $x^{(i)}$ so zu bestimmen, dass durch sie noch eine ∞^1-Schaar adjungirter C_4 geht. In der That müssen ja, wenn Letzteres eintreten soll, von den sechs Gleichungen:

$$\begin{gathered} \alpha_1\varphi_1(x^{(1)}) + \alpha_2\varphi_2(x^{(1)}) + \ldots + \alpha_6\varphi_6(x^{(1)}) = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_1\varphi_1(x^{(6)}) + \alpha_2\varphi_2(x^{(6)}) + \ldots + \alpha_6\varphi_6(x^{(6)}) = 0 \end{gathered}$$

zwei die Folgen der vier übrigen sein, indem schon je $p - 2 = 4$ Punkte der C_7 einen Büschel von adjungirten C_4 bestimmen. Dasselbe gilt aber auch umgekehrt: Ist irgend eine Gruppe Γ_6 dieser Art von Punkten $x^{(i)}$ gegeben, so bildet jedes Residuum derselben eine Gruppe G_4 von Punkten $y^{(i)}$ der eben bezeichneten Art. Weil nämlich durch *je* fünf Punkte der Γ_6 noch eine ∞^1-Schaar von C_4 geht, so bilden auch die vier Punkte G_4 zusammen mit *je einem* Punkte der Γ_6 eine Gruppe von 5 Punkten, durch welche einfach unendlich viele C_4 gehen (nach einem obigen Satze, p. 688). Durch die G_4 gehen also *sechs verschiedene* Büschel von C_4; dies ist aber nur möglich, wenn durch die G_4 noch eine ∞^2-Schaar von C_4 gelegt werden kann, oder wenn diese sechs Büschel unter einander identisch sind. Letzterer Fall ist sofort auszuschliessen; denn dann würden wir $4 + 6 = 10$ Punkte auf der C_7 haben, welche zusammen mit den 9 Doppelpunkten die Basispunkte eines Büschels von C_4 bilden müssten, während sich je zwei C_4 doch nur in 16 Punkten schneiden können. Es bleibt somit nur erstere Möglichkeit, q. e. d. *Liegen also vier Punkte G_4 auf der C_7 so, dass durch sie noch eine ∞^2-Schaar adjungirter C_4 geht, so kann durch jedes Residuum Γ_6 derselben noch eine ∞^1-Schaar solcher C_4 gelegt werden, und umgekehrt.**)

---

*) Die Schaaren $g_4^{(1)}$ kann man auch zur Transformation der C_7 in die von Riemann (a. a. O. §. 13) angegebene Normalform, d. h. in *eine C_8 mit zwei vierfachen und drei Doppelpunkten* benutzen. Seien nämlich $\psi = 0$, $\chi = 0$ zwei adjungirte C_4, welche sich in den 6 Punkten $x^{(i)}$ einer der im Texte charakterisirten Gruppen Γ_6 schneiden, und $\psi' = 0$, $\chi' = 0$ zwei andere solche C_4, welche die

Da sonach jede Gruppe G_4 dieser Art zusammen mit den 9 Doppelpunkten 13 Basispunkte einer ∞^2-Schaar von C_4 bildet, so gibt es mindestens eine ∞^2-Schaar von Gruppen Γ_6; dadurch ist aber auch die *Gesammtheit* dieser Gruppen dargestellt, denn das für die 6 Punkte $x^{(i)}$ gewonnene Gleichungssystem ist nach einem sogleich noch zu erörternden Determinantensatze mit nur *vier* von einander unabhängigen Gleichungen äquivalent, so dass man noch zwei der Punkte $x^{(i)}$ willkürlich auf der C_7 annehmen darf. Man erkennt hieraus (da diese Ueberlegung umkehrbar ist), dass *alle möglichen* Gruppen Γ_6 auf der C_7 durch die ∞^2-Residuen *einer endlichen Zahl* von Gruppen G_4 jener Art erschöpft werden, und umgekehrt, dass *alle* Gruppen G_4 zu *einer endlichen Zahl* von Gruppen Γ_6 obiger Schaar $\gamma_6^{(2)}$ residual sind.

Die in letzterem Umstande ausgesprochene vollkommene Reciprocität zwischen den Schaaren $\gamma_6^{(2)}$ und $g_4^{(1)}$ ist den Curven vom Geschlechte 6 (die im Allgemeinen alle in eine C_7 mit 9 und somit in ein C_6 mit 4 Doppelpunkten transformirt werden können) eigenthümlich, wie sich sogleich ergeben wird; im Uebrigen dagegen kann man die Bestimmung von Schaaren $g_{p-2}^{(1)}$ und $\gamma_p^{(2)}$ auf einer Curve vom Geschlechte p in genau derselben Weise ausführen, wie dies soeben für den Fall $p = 6$ geschah. Fragen wir uns nämlich, wie $p - 3$ Punkte $y^{(1)}, y^{(2)} \ldots y^{(p-3)}$ auf der Grundcurve C_n liegen müssen, damit jede durch sie gelegte adjungirte C_{n-3} noch durch einen weiteren festen Punkt der C_n gehe, so denken wir uns den Punkten $y^{(1)}, \ldots y^{(p-3)}$ zwei bewegliche Punkte $y^{(p-2)}, y^{(p-1)}$ hinzugefügt und suchen die Bedingung auf, unter welcher bei Bewegung dieser beiden neuen Punkte einer der übrigen Schnittpunkte der beweglichen C_{n-3} mit der C_n — sagen wir $y^{(p)}$ — fest bleibt. Diese Forderung involvirt zwei Bedingungen. Sehen wir also nur $y^{(1)}, \ldots y^{(p-5)}$ als will-

---

6 Punkte $z^{(i)}$ einer *anderen* Γ_6 der Art gemein haben, so bediene man sich der Transformationsformeln:

$$\varrho y_1 = \psi \cdot \chi', \qquad \varrho y_2 = \psi' \cdot \chi, \qquad \varrho y_3 = \chi \cdot \chi'.$$

Eine beliebige Curve des Netzes $\alpha_1 \psi \chi' + \alpha_2 \psi' \chi + \alpha_3 \chi \chi' = 0$ hat dann mit der C_7 48 feste Punkte (von denen 36 in den 9 Doppelpunkten und je 6 bez. in den Punkten $x^{(i)}$ und $z^{(i)}$ liegen) gemein, schneidet also in der That die C_7 noch in 8 beweglichen (von den α abhängenden) Punkten. Der Büschel $\psi + \lambda \chi = 0$ aber schneidet nur noch in 4 beweglichen Punkten, ebenso der Büschel $\psi' + \lambda \chi' = 0$; die entstehende C_8 hat also in den Punkten $y_1 = 0$, $y_3 = 0$ und $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ je einen vierfachen Punkt, q. e. d. — Vgl. über die Riemann'schen Normalformen Brill: Math. Annalen, Bd. 1, p. 401 und Bd. 2, a. a. O. Zur Herstellung derselben fordert Riemann die Aufsuchung zweier algebraischen Functionen, welche in möglichst wenig Punkten Null und unendlich werden, d. h. deren Zähler und Nenner Curven darstellen, die möglichst viele Punkte der Grundcurve gemein haben. Solche Functionen sind eben hier die Quotienten $\psi : \chi$ und $\psi' : \chi'$.

kürlich gegeben an und fragen nun, *wie $y^{(p-4)}$ und $y^{(p-3)}$ liegen müssen, damit alle durch sie gelegten adjungirten C_{n-3} noch durch einen gemeinsamen Punkt $y^{(p)}$ gehen.* Da hier vier Punkte weniger gegeben sind, als zur Festlegung einer solchen C_{n-3} erforderlich wären, so kann man durch die gegebenen $p-5$ Punkte*) 5 Curven $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0, \ldots \varphi_5 = 0$ legen, aus denen eine beliebige durch jene Punkte gehende adjungirte C_{n-3} sich linear zusammensetzt; die allgemeine Curve dieser Schaar hat also die Form:

$$\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \ldots + \alpha_5 \varphi_5 = 0. \tag{1}$$

Die Forderung ist, dass jede durch $y^{(p-4)}$ und $y^{(p-3)}$ gehende Curve dieses Systems auch durch $y^{(p)}$ gehe, dass also aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \varphi_1 (y^{(p-4)}) + \alpha_2 \varphi_2 (y^{(p-4)}) + \ldots + \alpha_5 \varphi_5 (y^{(p-4)}) = 0 \\
\alpha_1 \varphi_1 (y^{(p-3)}) + \alpha_2 \varphi_2 (y^{(p-3)}) + \ldots + \alpha_5 \varphi_5 (y^{(p-3)}) = 0
\end{aligned}$$

von selbst die Gleichung folge:

$$\alpha_1 \varphi_1 (y^{(p)}) + \alpha_2 \varphi_2 (y^{(p)}) + \ldots + \alpha_5 \varphi_5 (y^{(p)}) = 0 .$$

Hierzu ist nöthig und hinreichend, dass die Functionswerthe der letzten Gleichung sich aus denen der beiden ersten linear zusammensetzen, dass also für $i = 1, 2, \ldots 5$ die Gleichungen bestehen:

$$\varphi_i (y^{(p)}) = \lambda \varphi_i (y^{(p-4)}) + \mu \varphi_i (p^{(p-3)}). \tag{2}$$

Dies sind 5 Gleichungen, welche λ, μ und die Coordinaten der drei Punkte $z^{(p-4)}$, $y^{(p-3)}$, $y^{(p)}$, also wegen $f(y^{(p-4)}) = 0$, $f(y^{(p-3)}) = 0$, $f(y^{(p)}) = 0$ auch 5 Unbekannte enthalten. Dieselben kann man bekanntlich auch für $y_i^{(p-4)} = x_i$, $y_i^{(p-3)} = y_i$, $y_i^{(p)} = z_i$ durch die eine Formel:

$$\left\| \begin{array}{ccccc}
\varphi_1 (x) & \varphi_2 (x) & \varphi_3 (x) & \varphi_4 (x) & \varphi_5 (x) \\
\varphi_1 (y) & \varphi_2 (y) & \varphi_3 (y) & \varphi_4 (y) & \varphi_5 (y) \\
\varphi_1 (z) & \varphi_2 (z) & \varphi_3 (z) & \varphi_4 (z) & \varphi_5 (z)
\end{array} \right\| = 0 \tag{3}$$

ersetzen, welche aussagt, dass alle aus dem in Verticallinien eingeschlossenen Schema („Matrix") der φ_i zu bildenden dreigliedrigen Determinante einzeln verschwinden sollen, und welche mit *drei* von einander unabhängigen Gleichungen äquivalent ist. Man hat dann die Frage zu beantworten, wie viele Werthsysteme x, y, z dies System von Gleichungen und die Gleichungen $f(x) = 0$, $f(y) = 0$, $f(z) = 0$ gleichzeitig befriedigen.**)

---

*) Im Falle $p = 6$ konnten wir ja auch noch einen der 4 Punkte $y^{(i)}$ willkürlich annehmen.

**) Setzen wir zur Abkürzung $\varphi_i (x) = a_i$, $\varphi_i (y) = b_i$, $\varphi_i (z) = c_i$, so verschwinden *alle* Determinanten der Matrix (3), wenn folgende *drei* Gleichungen bestehen (vgl. die erste Anmerkung auf p. 691):

Bezeichnen wir vorläufig die Zahl dieser Werthsysteme mit Z*), so gibt es also zu $p-5$ beliebigen Punkten noch Z Punktetripel der genannten Art; und im Ganzen gibt es ∞^{p-5} Gruppen G_{p-2}, durch welche noch je ∞^2 C_{n-3}**) hindurchgehen. Diese Gruppen vertheilen sich nun in merkwürdiger Weise auf ∞^{p-6} Schaaren von je einfach unendlich vielen Gruppen, d. h. ∞^{p-6} Schaaren $g_{p-2}^{(1)}$, von denen jede zu allen Gruppen einer bestimmten Schaar $\gamma_p^{(2)}$ residual ist, so dass also alle Gruppen einer Schaar $g_{p-2}^{(1)}$ unter einander corresidual sind. Man gelangt zu diesem Resultate, ebenso wie zu dem entsprechenden für $p=6$, mit Hülfe des auf p. 688 angegebenen Satzes über Schaaren $g_{p-1}^{(1)}$. Ist nämlich Γ_p irgend eine zu einer Gruppe G_{p-2} residuale Gruppe, welche aus den Punkten $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(p)}$ bestehen möge, so folgt zunächst aus jenem Satze, dass man durch je $p-1$ dieser Punkte $y^{(i)}$ noch eine ∞^1-Schaar von C_{n-3} legen kann; und deshalb müssen alle $(p-1)$-gliedrigen Unterdeterminanten der folgenden p-gliedrigen Determinante verschwinden (vgl. p. 693):

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} \varphi_1(x^{(1)}) & \varphi_2(x^{(1)}) & \ldots & \varphi_p(x^{(1)}) \\ \varphi_1(x^{(2)}) & \varphi_2(x^{(2)}) & \ldots & \varphi_p(x^{(2)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1(x^{(p)}) & \varphi_2(x^{(p)}) & \ldots & \varphi_p(x^{(p)}) \end{vmatrix}.$$

Die hieraus entspringenden Gleichungen aber sagen eben aus, dass *man durch die p Punkte $x^{(i)}$ der Gruppe Γ_p noch eine ∞^1-Schaar von C_{n-3} legen kann;* analog wie oben beweist man auch leicht die Umkehrung dieses Satzes. Das zuletzt erwähnte Gleichungssystem zeigt sich äquivalent mit *vier* Bedingungen, d. h. man kann noch $p-4$ Punkte einer Gruppe Γ_p willkürlich annehmen. Sind dann $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$, $\varphi_3=0$, $\varphi_4=0$ irgend vier Curven der durch die $p-4$

$$(\alpha)\qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_5 \end{vmatrix} = 0;$$

es sei denn, dass auch gleichzeitig:

$$(\beta)\qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Um die Lösungen des Gleichungssystems (3) zu finden, hat man also von den gemeinsamen Lösungen der Gleichungen (α), wozu immer noch die Bedingungen $f(x)=0$, $f(y)=0$, $f(z)=0$ hinzutreten, die gemeinsamen Lösungen der Gleichungen (β) abzuziehen.

*) Es ist $Z=\frac{1}{6}(p+1)\,p\,(p-1)-p\,(p-1)$; vgl. den Schluss des vierten Abschnittes (p. 753).

**) Es sind hier und im Folgenden selbstverständlich immer *adjungirte* C_{n-3} gemeint.

Punkte bestimmten ∞^3-Schaar, so haben wir zur Aufsuchung einer Gruppe Γ_p vier weitere Punkte ξ, η, ζ, ϑ so zu bestimmen, dass alle aus der Determinante:

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} \varphi_1(\xi) & \varphi_2(\xi) & \varphi_3(\xi) & \varphi_4(\xi) \\ \varphi_1(\eta) & \varphi_2(\eta) & \varphi_3(\eta) & \varphi_4(\eta) \\ \varphi_1(\zeta) & \varphi_2(\zeta) & \varphi_3(\zeta) & \varphi_4(\zeta) \\ \varphi_1(\vartheta) & \varphi_2(\vartheta) & \varphi_3(\vartheta) & \varphi_4(\vartheta) \end{vmatrix}$$

zu bildenden ersten Unterdeterminanten verschwinden. Während also einerseits die Bestimmung der Gruppen Γ_p *direct* durch Aufsuchung der gemeinsamen Lösungen (d. i. Werthsysteme ξ, η, ζ, ϑ) des so resultirenden Gleichungssystems geschehen kann, *erscheint andererseits das Problem der Bestimmung von Gruppen Γ_p hiernach auf das der Bestimmung von Gruppen G_{p-2} obiger Art zurückgeführt;* denn sämmtliche Γ_p erhält man ja als Residuen sämmtlicher G_{p-2}.

Bezeichnen wir nun mit Z' die Zahl der Punktquadrupel ξ, η, ζ, ϑ der C_n, welche dem zuletzt erhaltenen Gleichungssysteme genügen*), so *können wir diese Resultate in Folgendem zusammenfassen.* Geht man von $p-5$ beliebigen Punkten aus, so gibt es noch Z verschiedene Punktetripel, welche mit ihnen zusammen je eine G_{p-2} bestimmen, durch die ∞^2 C_{n-3} gehen; diese ∞^2 C_{n-3} schneiden auf der C_n eine Schaar $\gamma_p^{(2)}$ von Gruppen Γ_p aus**), und durch jede $\Gamma_p^{(2)}$ gehen noch ∞^1 andere C_{n-3}. Umgekehrt bestimmt die Gesammtheit der letzteren auf der C_n eine Schaar $g_{p-2}^{(1)}$, von deren einer Gruppe G_{p-2} wir ausgingen. Im Ganzen gibt es ∞^{p-6} verschiedene solche Schaaren $g_{p-2}^{(1)}$, so dass erst $p-5$ beliebige Punkte eine einzelne $G_{p-2}^{(1)}$ bestimmen. Dieselben theilen sich in Z *völlig getrennte* Systeme entsprechend den Wurzeln der Gleichung Z^{ten} Grades, von welcher ihre Bestimmung abhängt; der Art, dass keine Schaar eines Systems mit keiner Schaar eines anderen Systems eine vollständige Gruppe G_{p-2} gemein hat, und dass man von einem Systeme aus nicht durch *continuirlichen* Uebergang mittelst lauter Gruppen $G_{p-2}^{(1)}$ zu einer Gruppe der anderen $Z-1$ Systeme gelangen kann.***) Da

*) Wir finden später: $Z' = \frac{1}{12} p (p-1)^2 (p-2) - \frac{1}{2} p \{(p-1)(p-2) - p + 1\}$.

**) Die C_n kann also auch in eine C_p eindeutig transformirt werden; es ist aber eine noch weitere Reduction der Ordnung möglich.

***) Solchen völlig getrennten Systemen von Punktgruppen auf der C_n werden wir später bei Betrachtung der Berührungscurven noch wiederholt begegnen. Beispiele dafür geben auch die 3 Systeme von Polepaaren auf der C_3 (p. 527) und die Systeme von Punkten auf einer solchen, in denen C_2 mehrpunktig berühren können (p. 533 f.).

nun jeder Schaar $g_{p-2}^{(1)}$ eine Schaar $\gamma_p^{(2)}$ von Residualgruppen zugeordnet ist, so gibt es auch ∞^{p-6} verschiedene Schaaren $\gamma_p^{(2)}$, was mit obiger directen Abzählung übereinstimmt; und letztere reihen sich in Z' getrennte Systeme ein. *Diese Zahl Z' stimmt insbesondere im Falle $p = 6$ mit der Zahl Z überein;* und dadurch ist dieser Fall in der schon oben angegebenen Weise ausgezeichnet (p. 694). Ist nämlich $p = 6$, so gibt es nur eine *endliche* Zahl von Schaaren $g_{p-2}^{(1)}$ und nur eine *endliche* Zahl von Schaaren $\gamma_p^{(2)}$, und die Anzahl beider Schaaren muss die gleiche sein, da aus einer Schaar $g_{p-2}^{(1)}$ immer *eine* Schaar $g_p^{(2)}$ eindeutig hervorgeht (ohne dass noch willkürliche Punkte in Betracht kämen). Für $p - 6 > 0$ dagegen ist zu solchem *eindeutigen* Entsprechen je zweier Schaaren keine Veranlassung mehr.

Es sei schliesslich noch hervorgehoben, dass *es Schaaren $\gamma_p^{(2)}$ und $g_{p-2}^{(1)}$ für $p = 5$, oder überhaupt für $p < 6$ nicht geben kann;* denn in diesem Falle würde die Zahl $p - 6$ der beiderseitig noch vollkommen willkürlich annehmbaren Punkte negativ werden, was keinen Sinn hat. Man überzeugt sich hiervon übrigens auch leicht direct. Eine Curve vom Geschlechte $p = 5$ nämlich kann (wenn sie nicht hyperelliptisch ist) nach p. 687 in eine $(p+1)^{\text{ter}}$, d. i. 6ter Ordnung mit $\frac{1}{2} p (p-3) = 5$ Doppelpunkten transformirt werden; sollte es auf dieser C_6 aber eine Gruppe G_5 geben, durch welche noch ∞^2 adjungirte C_3 (C_{n-3}) hindurchgehen, so müssten alle diese C_3 ausser den 5 Punkten der G_5 noch die 5 Doppelpunkte der C_6, d. h. im Ganzen 10 Punkte gemein haben, was nicht möglich ist.

Nachdem so an einzelnen Beispielen der Begriff von „Specialgruppen" erörtert und die Existenz solcher nachgewiesen ist, gehen wir zur *allgemeinen* Untersuchung derselben über. Und zwar wollen wir zunächst den sogenannten Riemann-Roch'schen Satz ableiten, welcher sich auf die gegenseitigen Beziehungen solcher Gruppen bezieht (und den wir für Specialfälle auf p. 688 und 693 ausgesprochen haben) und erst dann die Existenz solcher Gruppen durch Aufstellung der betreffenden Bedingungsgleichungen allgemein nachweisen.

Wir gehen hier zunächst auf unsere früheren Untersuchungen über Schnittpunktsysteme adjungirter C_{n-3} zurück, welche wir mit dem wichtigen Satze abgebrochen haben (p. 437), dass *eine q-fach unendliche lineare Schaar $g_Q^{(q)}$ von Punktgruppen zu je Q Punkten immer dann durch eine Schaar von adjungirten C_{n-3} ausgeschnitten werden kann, wenn die Relationen erfüllt sind*):*

*) Eine Schaar $g_Q^{(q)}$, für welche $q = Q - p + 1$, wird durch C_{n-3} ausgeschnitten, die durch $R = 2p - 2 - Q$ feste Punkte G_R gehen. Ist also $Q \leq p - 1$

(6) $\qquad q > Q - p + 1\,,\quad oder\quad Q - q \leq p - 1\,.$

Bei dem (in Folge gesonderter Betrachtung der verschiedenen Specialfälle) etwas längeren Beweise gingen wir davon aus, dass der Satz für $q = 0$ jedenfalls richtig ist, und zeigten dann, dass er auch für $q = 1$ gilt, indem wir (für $Q < p$) auf einen Widerspruch stiessen, der sich eben nur durch Annahme des genannten Satzes heben liess. Die übrigen Fälle erledigten sich sodann, indem wir von einer Schaar $g_{Q-1}^{(q-1)}$ zu einer Schaar $g_Q^{(q)}$ aufstiegen.

Es ist schon hervorgehoben worden, dass es sich für uns hauptsächlich um die Untersuchung sogenannter „*Specialgruppen*“ handelt*), d. h. Punktgruppen von solchen Eigenschaften, wie sie in obigen Beispielen gefordert wurden (p. 686). Allgemein wollen wir jetzt unter einer „*Specialschaar*“ $g_Q^{(q)}$ eine q-fach unendliche lineare Schaar von Punktgruppen zu je Q Punkten verstehen, für welche:

(7) $$q > Q - p + 1\,,$$

d. h. aus welcher eine bestimmte Specialgruppe $G_Q^{(q)}$ erst durch Annahme von *mehr* als $Q - p + 1$ beliebigen Punkten festgelegt wird. Die auf einer C_n möglichen Specialschaaren sind nun keineswegs von einander unabhängig; vielmehr lassen sie sich in merkwürdiger Weise zu je zweien so gruppiren, dass aus einer gegebenen Schaar immer eine andere abgeleitet werden kann, und umgekehrt, wie es in obigen Beispielen der Fall war; und zwar geschieht dies zufolge des Satzes:

Haben R Punkte G_R auf einer nicht zerfallenden Curve f vom Geschlechte p eine solche specielle Lage, dass die durch sie gehenden adjungirten Curven $(n-3)^{ter}$ Ordnung noch eine q-fach unendliche

---

und q dennoch eine positive Zahl (> 0), so muss die Gruppe G_R von ganz besonderem Charakter sein; sind dann $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ zwei C_{n-3} durch G_R, so ist $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ eine algebraische Function, welche für Q, also für weniger als p, Punkte unendlich wird. *Nach dem Satze des Textes kann aber auch umgekehrt jede algebraische Function der letzteren Art in der Form $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ dargestellt werden.* In dieser Form findet sich der Satz auch bei Riemann, a. a. O. §. 10. — Es sei hier noch ein Beispiel für den Satz erwähnt. Zu 7 beliebigen Punkten einer C_4 wird man 2 weitere (und zwar auf 3 verschiedene Arten nach p. 672 f.) so bestimmen, dass durch alle 9 noch ∞^1 C_3 gehen. Die 3 beweglichen Schnittpunkte bilden dann eine Schaar $g_3^{(1)}$, für welche die Bedingung (6) erfüllt ist; sie können daher auch durch einen *Geradenbüschel* ($C_{n-3} = C_1$) ausgeschnitten werden. Letzterer erzeugt dann umgekehrt zusammen mit dem C_3-Büschel die C_4 in Chasles'scher Weise (p. 435).

*) Für das Folgende vgl. Brill und Nöther: Math. Annalen, Bd 6, p. 280 ff.

Schaar bilden (q eine ganze positive Zahl und $> p - 1 - R$), wobei sie die Schaar $\gamma_Q^{(q)}$ ausschneiden ($Q = 2p - 2 - R$), so gehört die Gruppe G_R einer ∞^r-Schaar an, für welche $r = R - p + 1 + q = p - 1 - Q + q$, die also selbst wieder eine Specialschaar ist; d. h. durch jede Gruppe $\Gamma_Q^{(q)}$ der Schaar $\gamma_Q^{(q)}$ geht noch eine ∞^r-Schaar von adjungirten Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung hindurch, welche die Schaar $g_R^{(r)}$ ausschneidet.

Zum Beweise könnten wir wieder unter Benutzung von Determinantensätzen denselben Weg einschlagen wie für den Fall $R = p - 2$, $r = 1$, $Q = p$, $q = 2$ auf p. 696; man gelangt aber auch unter Benutzung des Satzes*) über Specialschaaren (p. 437 und 698) in derselben Weise einfach zum Ziele, wie oben beim Falle $q = r = 1$, $Q = R = p - 1$ (p. 688); und zwar auf folgende Art.

Es sei eine Specialschaar $g_Q^{(q)}$ gegeben, für die also die Ungleichung (7) befriedigt ist; und zwar sei

$$q = Q - p + 1 + r, \tag{8}$$

wo r irgend eine ganze positive Zahl bedeutet, aber so, dass $r < p - 1$. Wir fügen nun zu jeder Gruppe der Schaar $g_Q^{(q)}$ dieselben festliegenden (beliebig gewählten) r Punkte hinzu. Aus der gegebenen Schaar entsteht dann eine andere $g_{Q'}^{(q')}$, wo

$$Q' = Q + r, \quad q' = q,$$

für welche also die Anzahl der willkürlichen Parameter sich nicht vermehrt hat, wohl aber die Anzahl der Punkte in den einzelnen Gruppen der Schaar. Wegen (8) ist nun

$$q' = Q' - p + 1,$$

d. h. es ist für die Schaar $G_{Q'}^{(q')}$ die Bedingung (6) erfüllt. Die letztere Schaar kann daher durch ein System von adjungirten C_{n-3} ausgeschnitten werden; und durch jede Gruppe $G_{Q'}^{(q')}$ der Schaar geht somit eine adjungirte C_{n-3}. Da aber von den Q' Punkten der Gruppe r völlig beliebig gewählt waren, so muss sich durch die $Q' - r = Q$ Punkte der betreffenden Gruppe $G_Q^{(q)}$ noch mindestens eine ∞^r-Schaar von adjungirten C_{n-3} legen lassen, d. h. alle durch die Gruppe $G_Q^{(q)}$ gehenden C_{n-3} der Art schneiden eine Schaar $g_R^{(\varrho)}$ aus, für welche $R = 2p - 2 - Q$ und ϱ mindestens $= r$, d. i. nach (8):

$$\varrho \overline{\gtrless} q + p - 1 - Q, \quad \text{also} \quad \overline{\gtrless} R - p + 1 + q. \tag{9}$$

---

*) Neben dem folgenden Beweise des Textes findet man a. a. O. einen Beweis, welcher sich durch Verallgemeinerung der Betrachtung auf p. 688 ergibt. — Auf den früher in dem anderen Beispiele eingeschlagenen Beweisgang kommen wir in dem weiterhin folgenden Abschnitte über das Verschwinden der Θ-Function zurück.

Aber es kann ϱ auch nicht $> r$ sein. Setzen wir nämlich $\varrho = R - p + 1 + \varkappa$, wo $\varkappa > q$, so wird man von der Schaar $g_R^{(\varrho)}$ zu einer Schaar $g_Q^{(\varkappa)}$ durch ganz dieselbe Betrachtung geführt, vermöge deren wir soeben aus der Schaar $g_Q^{(q)}$ die Schaar $g_R^{(\varrho)}$ ableiteten; so dass analog der Relation (9) für $\varkappa$ die Ungleichung resultirte:

$$(10) \qquad \varkappa > Q - p + 1 + \varrho .$$

Nun sind aber beide Schaaren ($g_Q^{(q)}$ und $g_Q^{(\varkappa)}$) zu einer beliebigen Gruppe $G_R^{(\varrho)}$ residual, wie aus unserer Construction der Schaaren $g_R^{(r)}$ und $g_Q^{(\varkappa)}$ unmittelbar erhellt; beide Schaaren müssen also die gleiche Zahl willkürlicher Parameter enthalten (vgl. p. 434), und somit folgt $\varkappa = q$, also auch wegen (10) und (8): $\varrho = r$. Dies Resultat sprechen wir in folgendem Satze aus:

Legt man durch eine Gruppe $G_Q^{(q)}$ einer Specialschaar $g_Q^{(q)}$ auf der C_n, für welche q durch (8) gegeben, d. h. $q = Q - p + 1 + r$ ist, eine adjungirte Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, so schneidet dieselbe die C_n noch in $2p - 2 - Q = R$ Punkten, die ihrerseits, wenn man durch $G_Q^{(q)}$ alle möglichen C_{n-3} der Art legt, eine Specialschaar $g_R^{(r)}$ von Gruppen $G_R^{(r)}$ bilden, für welche r den aus (8) sich ergebenden Werth: $r = R - p + 1 + q$ besitzt.

Dies ist aber wieder, wie man sofort erkennt, der oben nur in anderer Form ausgesprochene Riemann-Roch'sche Satz*), durch welchen die erwähnte paarweise Gruppirung der Specialschaaren vermittelt wird; *für je zwei derartig zusammengehörige Schaaren $g_Q^{(q)}$ und $g_R^{(r)}$ haben wir nach ihm die Relationen*:

$$(11) \qquad Q + R = 2p - 2, \quad Q - R = 2q - 2r .$$

Einige Beispiele mögen dazu dienen, den Sinn des Satzes noch näher zu erläutern:

A) C_5 mit einem Doppelpunkte: $p = 5$. Wir können hier eine *Specialschaar* $g_5^{(2)}$ durch adjungirte C_2 ausschneiden, von denen jede in dieselbe feste durch den Doppelpunkt gehende und eine beliebig bewegliche Gerade zerfällt. Da $Q = 5$ und $q = 2$, so findet man aus (11) $R = 3$, $r = 1$, also eine $g_3^{(1)}$; dieselbe entsteht, wenn die adjungirte C_2 in eine beliebige feste und eine bewegliche durch den Doppelpunkt gehende Gerade zerfällt.

B) C_6 mit zwei Doppelpunkten; $p = 8$. Wir können eine Specialschaar $g_Q^{(q)} = g_7^{(1)}$ durch eine Schaar von C_{n-3} ausschneiden, von

*) Er wurde in anderer Weise von Riemann für einige specielle Fälle abgeleitet: a. a. O. und §. 5, Crelle's Journal, Bd. 54, und: Ueber das Verschwinden der Thetafunctionen, ib. Bd. 66; sodann von Roch allgemein bewiesen: ib. Bd. 64, p. 372. Vgl. darüber den unten folgenden Abschnitt XI über das Verschwinden der Θ-Function.

denen jede in eine feste durch einen Doppelpunkt gehende Gerade zerfällt und in einen beweglichen Kegelschnitt durch den andern Doppelpunkt, welcher ausserdem durch 3 feste Punkte der C_6 geht. Für die zugehörige $g_R^{(r)}$ findet man $R = 7$, $r = 1$; die 7 Punkte, welche durch eine beliebige C_2 des erwähnten Büschels auf der Grundcurve bestimmt werden, bilden also zusammen mit den 2 Doppelpunkten der C_6 ein System von 9 Punkten, durch die noch unendlich viele Curven 3ter Ordnung hindurchgehen.*) — Eine Specialschaar $g_Q^{(q)} = g_6^{(2)}$ erhält man, wenn die ausschneidenden C_{n-3} aus einer festen adjungirten C_2 und einer beweglichen Geraden bestehen. Es wird für die zugehörige Schaar $R = 8$, $r = 3$, und die $g_8^{(3)}$ wird durch die Gesammtheit der adjungirten C_2 (zusammen mit einer festen Geraden) ausgeschnitten.

C) C_5 mit 2 Doppelpunkten, vgl. die Anmerkung auf p. 688.

D) C_7 mit 9 Doppelpunkten, vgl. p. 690 ff. —

Wir gehen jetzt dazu über, diejenigen Erörterungen allgemein durchzuführen, welche uns bei der C_7 mit 9 Doppelpunkten auf gewisse Determinantensysteme führten; wir werden gleichzeitig auf die betreffenden Determinantensätze etwas eingehen. Auf die Bestimmung der Anzahl von möglichen Specialschaaren (wie der Zahl Z im Beispiele) legen wir dabei zunächst kein Gewicht weiter. Es kommt uns vielmehr darauf an, gewisse Grenzen für die Zahlen Q, R, q, r festzustellen, innerhalb deren die Aufsuchung der Specialschaaren noch möglich sein kann. Die dazu nöthigen algebraischen Ueberlegungen bleiben dieselben, wenn man die adjungirten C_{n-3} durch adjungirte Curven beliebiger Ordnung ersetzt. Wir behandeln daher sogleich folgende allgemeinere Aufgabe:

Gegeben sei eine ∞^t-Schaar von adjungirten Curven: Man soll auf $f = 0$ R Punkte (G_R) so bestimmen, dass durch sie noch ∞^q Curven der gegebenen Schaar gehen.

Dies Problem führt natürlich ebenfalls auf das Verschwinden einer Matrix, bez. der Unterdeterminanten einer solchen. Die ∞^t-Schaar von Curven sei gegeben durch die Gleichung:

$$\Psi \equiv \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 + \cdots + \alpha_{t+1} \psi_{t+1} = 0; \tag{12}$$

für sie bestehen die R Gleichungen:

$$\Psi(x^{(1)}) = 0, \quad \Psi(x^{(2)}) = 0, \ldots \Psi(x^{(R)}) = 0, \tag{13}$$

wo gleichzeitig: $f(x^{(1)}) = 0$, $f(x^{(2)}) = 0$, $\ldots f(x^{(R)}) = 0$. Die Gleichungen (13) sollen von den Verhältnissen der Parameter α_i noch q willkürlich lassen; es sind also zur Bestimmung dieser Verhältnisse nur $t - q$ verwendbar, oder mit andern Worten: aus je $t - q + 1$

*) Dies ist also wieder ein Beispiel für den schon auf p. 439 behandelten Fall.

der Gleichungen (13) soll jede eine Folge der übrigen $t-q$ sein. Hieraus folgt aber entsprechend der Gleichung (5) die Bedingung, dass sämmtliche $(t-q+1)$-gliedrige Determinanten des Schemas:

$$(14)\qquad \left\| \begin{matrix} \psi_1(x^{(1)}) & \psi_2(x^{(1)}) & \cdots & \psi_{t+1}(x^{(1)}) \\ \psi_1(x^{(2)}) & \psi_2(x^{(2)}) & \cdots & \psi_{t+1}(x^{(2)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_1(x^{(R)}) & \psi_2(x^{(R)}) & \cdots & \psi_{t+1}(x^{(R)}) \end{matrix} \right\| ;$$

verschwinden müssen*); also z. B. alle Determinanten der Form:

$$(15)\qquad D_{ik} = \left| \begin{matrix} \psi_1(x^{(1)}) & \psi_2(x^{(1)}) & \cdots & \psi_{t-q}(x^{(1)}) & \psi_i(x^{(1)}) \\ \psi_1(x^{(2)}) & \psi_2(x^{(2)}) & \cdots & \psi_{t-q}(x^{(2)}) & \psi_i(x^{(2)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_1(x^{(t-q)}) & \psi_2(x^{(t-q)}) & \cdots & \psi_{t-q}(x^{(t-q)}) & \psi_i(x^{(t-q)}) \\ \psi_1(x^{(k)}) & \psi_2(x^{(k)}) & \cdots, & \psi_{t-q}(x^{(k)}) & \psi_i(x^{(k)}) \end{matrix} \right| ;$$

wo für i alle Werthe der Reihe $t-q+1,\ t-q+2, \ldots, t+1$,
" k " " " " $t-q+1,\ t-q+2, \ldots R$
der Reihe nach zu setzen sind. *Es ist aber zur Erfüllung jener Gleichungen auch gerade nothwendig und hinreichend, dass alle Determinanten D_{ik} einzeln verschwinden***), vorausgesetzt, dass die $(t-q)$-gliedrige Determinante

$$D = \left| \begin{matrix} \psi_1(x^{(1)}) & \psi_2(x^{(1)}) & \cdots & \psi_{t-q}(x^{(1)}) \\ \psi_1(x^{(2)}) & \psi_2(x^{(2)}) & \cdots & \psi_{t-q}(x^{(2)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_1(x^{(t-q)}) & \psi_2(x^{(t-q)}) & \cdots & \psi_{t-q}(x^{(t-q)}) \end{matrix} \right|$$

nicht selbst Null ist. Dies aber können wir voraussetzen, da wir dem Curvensysteme (12) keine besonderen Bedingungen auferlegt haben. Zum Beweise jener Behauptung entwickeln wir D_{ik} nach den Elementen der letzten Horizontalreihe in der Form:

$$D_{ik} = \psi_1(x^{(k)}) \,.\, B_{1i} + \psi_2(x^{(k)}) \,.\, B_{2i} + \ldots + \psi_{t-q}(x^{(k)}) \,.\, B_{t-q,i} + \psi_i(x^{(k)}) \,.\, D,$$

wo das Bildungsgesetz der B_{hi} als Unterdeterminanten von D_{ik} leicht zu übersehen ist. Setzen wir nun

$$(16)\qquad C_{ik} = \psi_i(x^{(k)}) - \frac{D_{ik}}{D} = -\frac{1}{D}\left\{\psi_1(x^{(k)})\,B_{1i} + \ldots + \psi_{t-q}(x^{(k)})\,B_{t-q,i}\right\},$$

---

*) Für $R = t-q+1$ ist dies Problem auch von Clebsch und Gordan (Theorie der Abel'schen Functionen, p. 211 ff.) in der Weise formulirt. — Den allgemeinen Fall kann man auch durch das Verschwinden einer Matrix darstellen, wenn man dem Schema (14) noch $R-t+q-1$ Reihen *willkürlicher* Grössen zufügt, wie in dem Beispiele auf p. 692.

**) Vgl. Kronecker in Baltzer's Determinantentheorie, p. 42 der dritten Auflage. — Auf ähnliche Fragen beziehen sich die Untersuchungen von Roberts: Crelle's Journal, Bd. 67, p. 266.

so wird $C_{ik} = \psi_i(x^{(k)})$, wenn i oder k einen der Werthe 1 bis $t-q$ annimmt, indem dann D_{ik} verschwindet; und wenn man dem Index i alle Werthe von 1 bis $t+1$, dem Index k alle Werthe von 1 bis R beilegt, so bilden die C_{ik} zufolge ihrer Zusammensetzung aus den ψ und B*) ein System von Elementen, für welches *alle* aus ihm zu bildenden $(t-q+1)$-gliedrigen Determinanten Null sind. Setzen wir also voraus, dass auch die Determinanten

$$(17)\qquad \begin{array}{llll} D_{t-q+1,t-q+1}, & D_{t-q+2,t-q+1}, & \ldots & D_{t+1,t-q+2}, \\ D_{t-q+1,t-q+2}, & D_{t-q+2,t-q+2}, & \ldots & D_{t+1,t-q+2}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{t-q+1,R}, & D_{t-q+2,R}, & \ldots & D_{t+1,R}, \end{array}$$

sämmtlich Null sind, wie wir es oben thaten, so stimmen wegen (16) *alle* Elemente C_{ik} bez. mit den $\psi_i(x^{(k)})$ überein, d. h. sie bilden wieder das Schema (14); und es verschwinden daher auch *alle* $(t-q+1)$-gliedrigen Determinanten der ψ, q. e. d.

In dem Gleichungssysteme (14) sind also nur

$$(q+1)(R-t+q)$$

von einander unabhängige Gleichungen enthalten, nämlich z. B. diejenigen, welche durch das Verschwinden der in (17) zusammengestellten Determinanten D_{ik} gegeben werden. Die gemeinsamen Lösungen der letzteren geben also auch diejenigen des Systems (14), denn jedes Werthsystem, welches die Determinanten (17) zum Verschwinden bringt, genügt auch allen anderen aus (14) entspringenden Bedingungen; davon hat man jedoch noch abzusondern alle Werthsysteme, für welche Determinanten der Form D verschwinden.**) In den $(q+1)$ $(R-t+q)$ Gleichungen kommen aber R Unbekannte vor: die Coordinaten der Punkte $x^{(i)}$, welche ausserdem an die Gleichungen $f(x^{(i)})=0$ gebunden sind. Von diesen R Punkten kann man also auf f noch willkürlich annehmen:

$$(18)\qquad R-(q+1)(R-t+q);$$

eine Zahl, welche jedenfalls nicht negativ werden darf. *Damit sich also Gruppen von R Punkten auf f finden lassen, durch welche noch eine ∞^q-Schaar von Curven aus einer gegebenen linearen ∞^t-Schaar hindurchgehen, muss die Bedingung erfüllt sein:*

$$(19)\qquad R \geqq (q+1)(R-t+q).^{***)}$$

*) Es folgt dies aus dem Determinanten-Multiplicationssatze; vgl. Crelle's Journal, Bd. 97, p. 38.

**) Vgl. darüber die Beispiele in dem vierten Abschnitte dieser Abtheilung, sowie die Anmerkung **) auf p. 695. Im Beispiele zeigen gleichzeitig, dass *die Zahl der übrig bleibenden Lösungen im Allgemeinen nicht Null ist.*

***) So weit würden diese Betrachtungen auch für nicht adjungirte Curvensysteme gültig bleiben, vgl. den weiterhin folgenden Abschnitt über Schnittpunktsysteme (p. 757).

Neben die Bedingung (19) stellt sich noch eine andere, wenn man verlangt, dass die Gruppen G_R eine Schaar von bestimmter Mannigfaltigkeit bilden sollen, die durch Curven bestimmter Ordnung ausgeschnitten werden. Die Aufstellung dieser zweiten Bedingung ist von besonderem Interesse, wenn die ψ von der $(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung sind, und wenn die G_R selbst wieder eine Specialschaar $g_R^{(r)}$ bilden, d. h. durch eine ∞^r-Schaar von adjungirten C_{n-3} ausschneidbar sein sollen, indem dann die Zahlen r, R, q, Q durch den Riemann-Roch'schen Satz unter einander verknüpft sind. Kehren wir z. B. zu dem oben besprochenen Falle zurück (p. 694 und 697), wo wir

$$r=1, \quad R=p-2, \quad q=2, \quad Q=p, \quad t=p-1$$

hatten, und wo in Uebereinstimmung mit (18) noch $p-5$ Punkte willkürlich auf f gewählt werden konnten, um eine Gruppe $G_R=G_{p-2}$ zu finden, durch die noch $\infty^2\, C_{n-3}$ gehen. Soll hier dann weiter die Gruppe G_R einer ∞^1- (d. i. ∞^r-) Schaar $g_{p-2}^{(1)}$ angehören, so *haben wir noch die zweite Bedingung:* $p-5\geqq 1$; und die (weiterhin mit τ bezeichnete) Zahl $p-6$ ist die Zahl der beliebig wählbaren Punkte, wenn man eine Schaar $g_{p-2}^{(1)}$ finden will.

Ebenso erledigt sich nun allgemein unser ursprüngliches, die C_{n-3} betreffendes Problem, nämlich die Bestimmung der Specialschaaren $g_R^{(r)}$. Wir wollen dabei voraussetzen, dass $t=p-1$ ist, d. h. dass die Curven der Schaar (12) keiner anderen Bedingung genügen, als der, von der $(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung und zu f adjungirt zu sein. Die Determinanten (15) oder (17) werden in diesem Falle $(p-q)$-gliedrige, und von den R Punkten, welche in den aus (14) entspringenden Gleichungen vorkommen, sind nach (18) noch

$$R-(q+1)(R+q-p+1)$$

willkürlich annehmbar. Damit wir auf eine Schaar $g_R^{(r)}$ kommen, *darf diese Zahl aber nicht nur nicht negativ werden, sondern auch nicht unter r herabsinken.* Da nun wegen (11) $R-p+1=r-q$ ist, *so tritt an Stelle von* (19) *für Specialgruppen* $G_R^{(r)}$ *die Relation:*

$$R-(q+1)\,r\geqq r, \tag{20}$$

und hieraus folgt, wieder in Rücksicht auf (11):

$$R\geqq\frac{r\,(r+p+1)}{1+r}, \tag{21}$$

oder auch, wenn man aus (20) R mittelst (11) eliminirt:

$$p\geqq(r+1)\,(q+1)\,. \tag{22}$$

Die Differenzen der linken und rechten Seiten dieser Ungleichungen:

$$\tau=R-(q+1)\,r-r=R(r+1)-r(r+p-1)=p-(q+1)(r+1) \tag{23}$$

geben die Anzahl der noch willkürlich annehmbaren Punkte einer Gruppe G_R an, welche, nachdem r willkürliche Punkte fest gewählt sind, aus einem ∞^τ-Systeme von ∞^r-Schaaren $g_R^{(r)}$, die alle den gegebenen Bedingungen genügen, eine *endliche* Anzahl solcher Schaaren $g_R^{(r)}$ ausscheiden. Diese Zahl τ kann nun selbstverständlich beliebig klein werden; ist sie gleich Null, so gibt es nur eine endliche Zahl von Schaaren $g_R^{(r)}$ auf der C_n, wie in dem oben betrachteten Beispiele für $p = 6$. *Wird sie dagegen negativ, so ist das Problem nicht lösbar* (p. 698).

Jeder Schaar $g_R^{(r)}$ von corresidualen Gruppen G_R entspricht nun nach dem Riemann-Roch'schen Satze eine ebensolche $g_Q^{(q)}$ und umgekehrt, und zwar so, dass jede Gruppe der einen Schaar zu jeder Gruppe der andern residual ist; die Zahlen Q, q bestimmen sich dabei aus R, r vermöge der Gleichungen (11). Die ∞^τ Schaaren $g_R^{(r)}$ haben die Eigenschaft, dass keine mit einer anderen von ihnen eine vollständige Gruppe $G_R^{(r)}$ gemein hat (da irgend eine Gruppe die Schaar, welcher sie angehört, nach dem Restsatze vollständig und eindeutig bestimmt); Gleiches gilt von den Schaaren $g_Q^{(q)}$, deren es natürlich auch ∞^τ gibt.

Der Fall $\tau = 0$ ist nun für das Folgende von besonderem Interesse.. Für denselben findet man aus den Gleichungen (13) bez. (14), oder aus dem Verschwinden der Determinanten D_{ik}, zu r gegebenen Punkten eine *endliche* Anzahl Z von *Gruppen* zu je $R - r = r(q+1)$ Punkten, von denen dann jede mit den r Punkten zusammen eine Gruppe $G_R^{(r)}$ bildet, und aus denen durch Bewegung der r Punkte Z verschiedene Schaaren $g_R^{(r)}$ entstehen.*) Diese Schaaren haben nichts mit einander gemein, können auch nicht durch unendlich kleine Veränderungen (continuirlich) in einander übergeführt werden. Denselben sind ferner *ebensoviele* Schaaren von Gruppen $G_Q^{(q)}$ auf $f = 0$ als Residuen *eindeutig* zugeordnet, und umgekehrt (vgl. obiges Beispiel, p. 697 f.). Die Aufsuchung der Schaaren $g_Q^{(q)}$ führt somit auf eine Gleichung desselben Grades, wie die der $g_R^{(r)}$; *die Anzahl der Lösungen ist für beide Probleme gleich gross*, und die Lösungen der beiden Gleichungen gehen eindeutig aus einander hervor, wenngleich die Probleme vom algebraischen Standpunkte als völlig verschiedene erscheinen.

Ist dagegen τ *von Null verschieden, so findet ein derartiges Entsprechen zweier bestimmten Probleme nicht mehr statt* (vgl. das Beispiel

---

*) D. h. die Bestimmung dieser Schaaren hängt von einer Gleichung Z^{ten} Grades ab. Allgemein angeben kann man die Zahl Z bisher nicht; für den Fall $R = t - q + 1$ ist der Werth von Z bei Brill und Nöther a. a. O. ohne Beweis mitgetheilt.

p. 698). Existirt nämlich auch eine endliche Anzahl von Gruppen $G_R^{(r)}$ zu $r + \tau$ beliebig gegebenen Punkten, so führen diese nach dem Riemann-Roch'schen Satze auf Gruppen $G_Q^{(q)}$, welche zwar q, aber keine $q + \tau$ Punkte gemein haben können. Nimmt man demnach $q + \tau$ Punkte beliebig an und sucht die ihnen zugehörigen Gruppen $G_Q^{(q)}$ (d. h. die ergänzenden Gruppen von je $Q - q$ Punkten), so sind sie zwar in endlicher, jedoch von jener Zahl verschiedener Anzahl vorhanden. Wohl aber existiren, wie schon bemerkt, zu gegebenen r Punkten ∞^τ Lösungen für die Bestimmung von Gruppen $G_R^{(r)}$, welchen zu beliebig gegebenen q Punkten ∞^τ Lösungen für die Bestimmung von Gruppen $G_Q^{(q)}$ eindeutig entsprechen.

Beim Beginne unserer Untersuchungen über Specialgruppen hatten wir nach solchen *zwei*fach unendlichen Schaaren gefragt, für welche die Zahl R der beweglichen Punkte eine möglichst kleine ist (vgl. p. 690). Unsere Bedingung (21) p. 705 erlaubt uns nunmehr, sofort für $r = 2$ den kleinsten Werth anzugeben, welchen R annehmen kann. Nach derselben muss nämlich

$$3\,R \geq 2\,(p + 3)$$

sein. Ist also $p = 3\,\pi$, wo π eine positive ganze Zahl bedeutet, so haben wir als *kleinsten Werth von R für $r = 2$*:

$$R = 2\,(\pi + 1) = p - \pi + 2\,;$$

und dieser Werth erfüllt auch noch für $p = 3\,\pi + 1$ und $p = 3\,\pi + 2$ die gestellte Bedingung. Die Gleichungen (20), (21) oder (22) erlauben aber überhaupt, *die Minimalwerthe der Zahl R von Punkten anzugeben, für welche eine Specialgruppe $G_R^{(r)}$ bei gegebenem r auf $f = 0$ bestehen kann;* nach (11) erhält man so gleichzeitig die Maximalwerthe für die Anzahl Q der die Residualgruppen bildenden Punkte. Die sich ergebenden Zahlen sind für $r = 1,\ 2,\ 3$ in der folgenden Tabelle zusammengestellt, welche man leicht beliebig fortsetzt; in ihr enthält die vorletzte Colonne noch die durch (23) definirte Zahl τ für die Mannigfaltigkeit der zusammengehörigen Schaaren $g_R^{(r)}$ und $g_Q^{(q)}$, eine Zahl, welche nie negativ werden darf. Aus letzterer Bemerkung findet man nach (22) oder (23) die kleinsten Werthe von p, für welche die betreffende Specialschaar möglich ist, und welche in der letzten Colonne angegeben sind. Sollen ganze Zahlen für R, u. s. w. zum Vorscheine kommen, so muss man auf die Natur der Zahl p Rücksicht nehmen. Es sei π eine ganze positive Zahl, dann findet man:

für $p =$	r	Minimalwerth von R	Zugehöriger Werth von q	Zugehöriger Werth von Q	τ	$p \geqq$
2π $2\pi + 1$	1	$p - \pi + 1$	$\pi - 1$	$p + \pi - 3$	0 1	4
3π $3\pi + 1$ $3\pi + 2$	2	$p - \pi + 2$	$\pi - 1$	$p + \pi - 4$	0 1 2	6
4π $4\pi + 1$ $4\pi + 2$ $4\pi + 3$	3	$p - \pi + 3$	$\pi - 1$	$p + \pi - 5$	0 1 2 3	8
$(r+1)\pi + \tau$, wo $\tau < r + 1$	r	$p - \pi + r$	$\pi - 1$	$p + \pi - r - 2$	τ	$2r + 2$*)

So existiren z. B., wie schon mehrfach erwähnt (p. 688), auf einer C_5 mit 2 Doppelpunkten ($p = 4$, $\pi = 2$) zwei verschiedene Schaaren $g_3^{(1)}$, indem $\tau = 0$, $r = 1$, $p - \pi + 1 = 3$; und beide sind einander residual; in der That wird auch $q = \pi - 1 = 1$, $Q = p + \pi - 3 = 3$. Ein anderes Beispiel bietet die Curve C_6 mit 5 Doppelpunkten ($p = 5$). Zu zwei willkürlich gewählten Punkten P_1, P_2 existirt hier eine endliche Zahl von Punktepaaren, welche mit jenen zusammen Specialgruppen $G_4^{(1)}$ bilden, indem $p = 2\pi + 1$ für $\pi = 2$, $p - \pi + 1 = 4$, $\tau = 1$, also $r + \tau = 2$ (entsprechend der willkürlichen Wahl von *zwei* Punkten). Und zwar gibt es zu P_1, P_2 noch 5 Gruppen $G_4^{(1)}$; denn transformirt man die C_6 mittelst der ∞^2 adjungirten C_3, welche durch P_1, P_2 gelegt werden können, so erhält man wieder eine C_6', welche ebenfalls 5 Doppelpunkte haben muss; die den letzteren auf der C_6 entsprechenden Punktepaare bilden, wie bekannt, mit P_1, P_2 zusammen die Basispunkte für adjungirte C_3, welche die C_6 in residualen Schaaren $g_4^{(1)} = g_Q^{(q)}$ treffen (vgl. p. 439). Man erhält im Ganzen ∞^1 solche Schaaren $g_4^{(1)}$ auf der C_6, weil $\tau = 1$. Eine derselben besteht z. B. aus den Gruppen, welche von dem durch einen Doppelpunkt gehenden Geradenbüschel ausgeschnitten werden; die Residualschaar derselben bilden die Gruppen $G_4^{(1)}$, welche von dem durch die andern vier Doppelpunkte gehenden Kegelschnittbüschel bestimmt sind. Es sei hier endlich noch einmal auf das

*) Die Richtigkeit dieser allgemeinen Zahlenreihe erkennt man durch Einsetzen derselben in die Bedingung (21); es wird dann für $\tau = 0$ in der That $(r + 1) R = r(r + p - 1)$; für $\tau > 0$ geht diese Bedingung über in: $(r + 1) \cdot (\tau + r) \geqq r(r + 1 + \tau)$. Letztere aber ist erfüllt.

früher eingehend behandelte Beispiel für $p = 6$ verwiesen. Für dasselbe nämlich ist durch vorstehende Determinantensätze der oben noch fehlende Beweis der Existenz von Schaaren $g_1^{(1)}$ und $\gamma_6^{(2)}$ auf einer C_7 mit 9 Doppelpunkten erbracht.*)

III. Die Transformation auf Normalcurven. — Moduln.

Kehren wir jetzt wieder zu dem Falle $r = 2$ zurück, welcher ja für die eindeutige Transformation der Grundcurve von besonderer Wichtigkeit ist. In der That können wir nach unseren früheren Ausführungen (p. 690) unter Berücksichtigung der zu $r = 2$ gehörigen und in der Tabelle angegebenen Minimalwerthe von R sofort folgenden Satz aussprechen:

Die Curve niedrigster Ordnung (Normalcurve), in welche eine allgemeine Curve vom Geschlechte p eindeutig transformirt werden kann, ist von der Ordnung $p - \pi + 2$, *wenn die Zahl p von der Form* 3π, $3\pi + 1$, $3\pi + 2$ *ist, oder — was dasselbe ist — bez. von der Ordnung* $2\pi + 2$, $2\pi + 3$, $2\pi + 4$; *und da ihr Geschlecht ebenfalls gleich p sein muss, besitzt diese Normalcurve* $\frac{1}{2}(p - \pi + 1)(p - \pi) - p$ *oder bez.* $2\pi(\pi - 1)$, $2\pi^2$, $2\pi^2 + 2\pi + 1$ *Doppelpunkte.***)

---

*) Für specielle Curven vom Geschlechte p können jedoch auch noch andere Specialschaaren existiren, als die in der Tabelle aufgeführten, z. B. bei den hyperelliptischen Curven.

**) Diese Normalcurven sind von Brill und Nöther a. a. O. angegeben. — Schon in der Anmerkung auf p. 693 wurde bei einem Beispiele hervorgehoben, dass die Normalcurven Riemann's (§. 13 in dessen Theorie der Abel'schen Functionen) von diesen wesentlich verschieden sind. Bei Riemann nämlich kommt es darauf an, in einer Gleichung $F(x, y) = 0$, welche vom m^{ten} Grade in den x, vom n^{ten} Grade in den y ist, die Zahlen m, n *einzeln* durch eindeutige Transformation möglichst zu erniedrigen, oder mit anderen Worten, zwei von einander verschiedene algebraische Functionen $\frac{\psi}{\chi}$ und $\frac{\psi'}{\chi'}$ zu finden, welche in möglichst wenig Punkten Null und unendlich werden. Man hat also zwei Curvenbüschel:

$$(\alpha) \qquad \psi + \lambda\chi = 0 \quad \text{und} \quad \psi' + \mu\chi' = 0$$

zu suchen, welche in möglichst wenig beweglichen Punkten schneiden, d. h. welche auf $f = 0$ zwei Schaaren $g_R^{(1)}$ bestimmen, für die R den in der Tabelle angegebenen Minimalwerth hat: $R = p - \pi + 1$ für $p = 2\pi$ oder $p = 2\pi + 1$. Die zu benutzenden Transformationscurven:

$$(\beta) \qquad \alpha_1\psi\chi' + \alpha_2\chi\psi' + \alpha_3\chi\chi' = 0$$

schneiden $f = 0$ dann noch in $2p - 2\pi + 2$ beweglichen Punkten. Den Gruppen von je $Q = p + \pi - 3$ Basispunkten der Büschel (α) entspricht je ein $(p + \pi - 3)$-facher Punkt der neuen Curve. Wir erhalten also (in Uebereinstimmung mit Riemann):

Den genannten drei Fällen entsprechend hat man zur Wahl der Schaar von Transformationscurven in Rücksicht auf die Werthe von τ bei $r = 2$ keinen, einen oder zwei Parameter zur Verfügung. Die Werthe von Q und q, welche dem Werthe $R = p + \pi - 2$ entsprechen, erlauben daher den vorstehenden Satz auch in folgender Form auszusprechen:

Für $p = 3\pi$, $3\pi + 1$ *oder* $3\pi + 2$ *kann man zu einer Specialgruppe von* $p + \pi - 4$ *oder bez.* $4\pi - 4$, $4\pi - 3$, $4\pi - 2$ *Punkten, durch welche noch zweifach unendlich viele adjungirte Curven* $(n - 3)^{\text{ter}}$ *Ordnung hindurchgehen, und von denen bez.* $\pi - 1$, π, $\pi + 1$ *willkürlich angenommen werden dürfen, noch* $\frac{1}{2}(p - \pi + 1)(p - \pi) - p$ *oder bez.* $2\pi(\pi - 1)$, $2\pi^2$, $2\pi^2 + 2\pi + 1$ *Punktepaare finden, welche zusammen mit jenen* $p + \pi - 4$ *Punkten eine Specialgruppe von bez.* $2\pi(\pi + 1) - 4$, $2\pi(\pi + 2) - 3$, $2\pi(\pi + 3) - 1$ *Punkten bilden, durch welche noch einfach unendlich viele Curven der Art zu legen sind.*

Man erhält so für die niedrigsten Zahlen von p genauer aufgezählt folgende Normalcurven; ein Vergleich mit der oben (p. 689) mitgetheilten Tabelle für Curven $(p + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung zeigt, wie in der That für $p > 6$ hier Curven niedrigerer Ordnung erhalten werden. Man findet

für $p = 3$, $\pi = 1$:	Curven	4ter	Ordnung	mit	0	Doppelpunkten
„ $p = 4$, $\pi = 1$:	„	5ter	„	„	2	„
„ $p = 5$, $\pi = 1$:	„	6ter	„	„	5	„
„ $p = 6$, $\pi = 2$:	„	6ter	„	„	4	„
„ $p = 7$, $\pi = 2$:	„	7ter	„	„	8	„
„ $p = 8$, $\pi = 2$:	„	8ter	„	„	13	„
„ $p = 9$, $\pi = 3$:	„	8ter	„	„	12	„
. . .	. .	. .	. .	. .	. .	. .

Auch unter diesen Curven fehlen z. B. die Curven 5ter Ordnung mit $p = 5$ und mit $p = 6$. Diese und allgemein Curven vom Geschlechte p, deren Ordnung kleiner als $p - \pi + 2$, entstehen vielmehr durch Transformation von solchen Curven $(p - \pi + 2)^{\text{ter}}$ Ordnung, auf denen in Folge besonderer Relationen zwischen den sie bestimmenden Constanten Specialschaaren $g_R^{(2)}$ mit weniger beweglichen Punkten

für $p = 2\pi$ Curven $(p+2)^{\text{ter}}$ Ord. mit zwei $3(\pi - 1)$-fachen u. $\pi(\pi - 2)$ Doppelp.
„ $p = 2\pi + 1$ „ $(p+3)^{\text{ter}}$ „ „ „ $(3\pi - 2)$-fachen „ π^2 „
Ausgenommen sind die Fälle $p = 1$ und $p = 2$. Für $p = 2\pi + 1$ ist $\tau = 1$; die Transformation kann daher dann noch auf unendlich viele verschiedene Arten geschehen. — Durch eine quadratische Transformation, deren Fundamentalpunkte bez. in den beiden vielfachen Punkten und einem der Doppelpunkte liegen, (oder durch Betrachtungen über Raumcurven) können diese Normalcurven leicht in Curven p^{ter} bez. $(p + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung übergeführt werden $(p > 4)$; vgl. Brill, Math. Annalen, Bd. 2, p. 471.

existiren, als auf einer allgemeinen Curve des betreffenden Geschlechts möglich ist.

Durch specielle Werthe dieser schon oben erwähnten (p. 685) gewöhnlich als *Moduln* bezeichneten Constanten (deren Anzahl wir sogleich noch bestimmen werden) kann aber auch die Transformation einer C_n $f(x) = 0$ vom Geschlechte p in die zugehörige Normalcurve mittelst adjungirter C_{n-3} überhaupt unmöglich gemacht werden. Wenn nämlich auf f je zwei Punkte einander derart zugeordnet sind, dass (wie dies z. B. bei Curven 5ter Ordnung mit einem 3-fachen Punkte der Fall ist) alle adjungirten C_{n-3}, welche durch einen beliebigen Punkt gehen, damit von selbst durch einen oder mehrere diesem zugeordnete Punkte gehen, so wird die eindeutige Umkehrung der Transformationsformeln $\varrho y_i = \varphi_i(x)$ auch mit Hülfe von $f = 0$ in der Weise unmöglich, dass sich die Variabeln x durch die y nicht mehr rational, sondern nur noch mit Hülfe von Wurzelzeichen (oder überhaupt von Irrationalitäten) ausdrücken lassen; und das Entsprechen hört dann auf eindeutig zu sein. Man überzeugt sich indess leicht davon, dass höhere Irrationalitäten als Quadratwurzeln bei der Benutzung von adjungirten C_{n-3} als Transformationscurven nicht vorkommen können. Sollten nämlich jedem *beliebig* gegebenen Punkte A auf f etwa j Punkte in der Weise entsprechen können, dass alle adjungirten C_{n-3} durch A auch durch diese j Punkte hindurchgingen, so würde man, da eine solche Curve $p - 1$ Bestimmungsstücke besitzt, durch Annahme von $p - 1$ beliebigen Punkten im Ganzen schon $(j + 1)$. $(p - 1)$ Schnittpunkte der Curve festgelegt haben, während dieselbe f nur in $2p - 2$ beweglichen Punkten trifft. Daher ist j höchstens gleich 1.

*In der angegebenen Weise kann also höchstens ein weiterer Punkt der C_n durch einen gegebenen mit bestimmt sein.**) Da es nun einfach unendlich viele Punkte auf der Curve gibt, so ist eine Curve dieser speciellen Natur dadurch charakterisirt, dass sie eine $g_2^{(1)}$ besitzt. Für dieselbe bleibt der Satz gültig, dass $p - 1$ Schnittpunkte einer adjungirten C_{n-3} durch die $p - 1$ übrigen bestimmt sind; aber jetzt hängt schon jeder einzelne jener ersteren Punkte von einem ganz bestimmten der letzteren ab, und umgekehrt. Man kann also $p - 3$ Punkte beliebig annehmen; durch sie und die zugehörigen $p - 3$ Punkte geht noch ein Büschel von adjungirten C_{n-3}, welche auf f jene $g_2^{(1)}$ ausschneiden. Eine einzelne Gruppe $G_2^{(1)}$ $(= G_R^{(r)})$ dieser Schaar bildet dann nach dem Riemann-Roch'schen Satze das System der Basispunkte von ∞^{p-2} adjungirten C_{n-3}, welche die residuale Schaar $g_{2p-4}^{(p-2)}$ $(= g_Q^{(q)})$ auf f ausschneiden, während durch

*) Vgl. Brill und Nöther, a. a. O. p. 286.

zwei beliebige Punkte von f nur noch ∞^{p-3} solche Curven hindurchgehen. Ein Beispiel für derartige Vorkommnisse bieten die Curven n^{ter} Ordnung mit einem $(n-2)$-fachen Punkte (also vom Geschlechte $n-2$); in der That zerfällt hier jede adjungirte C_{n-3} in $n-3$ durch den $(n-2)$-fachen Punkt gehende Gerade. Eine bewegliche Linie dieses Strahlbüschels stellt also zusammen mit $n-4$ festen Geraden desselben eine ∞^1-Schaar von C_{n-3} dar, welche f in nur zwei beweglichen Punkten treffen. Die hier gemeinten Curven werden gewöhnlich *hyperelliptische* genannt.*)

Es gilt aber auch umgekehrt der Satz, dass *jede C_n vom Geschlechte p, auf welcher eine Specialschaar $g_2^{(1)}$ existirt, in eine Curve $(p+2)^{ter}$ Ordnung mit einem p-fachen Punkte eindeutig transformirt werden kann;* eine jede Curve mit einer Schaar $g_2^{(1)}$ werden wir daher als hyperelliptische bezeichnen. Die genannte Transformation geschieht vermittelst einer ∞^2-Schaar adjungirter C_{n-2}, welche durch $n+p-4$ beliebige feste Punkte der C_n gehen und also letztere in der That noch in $p+2$ beweglichen Punkten treffen. Um auf der neuen Curve C_{p+2} einen p-fachen Punkt zu erzeugen, hat man von den $n+p-4$ festen Punkten auf der C_n $n-p$ in die Schnittpunkte einer beliebigen Geraden $u_x=0$ mit $f=0$ zu legen und die übrigen $2p-4$ so zu wählen, dass durch sie noch ein Büschel von $C_{n-3}:\varphi_1+\lambda\varphi_2=0$, der die $g_2^{(1)}$ ausschneidet, in der geschilderten Weise hindurchgeht. Bedient man sich dann der Transformationsformeln

$$\varrho y_1 = u_x\varphi_1\,, \quad \varrho y_2 = u_x\varphi_2\,, \quad \varrho y_3 = \psi\,,$$

wo $\psi=0$ eine beliebige durch die genannten $n+p-2$ Punkte gehende C_{n-2} darstellt, so schneidet der Büschel $y_1+\lambda y_2=0$ die resultirende C_{p+2} nur in zwei beweglichen Punkten, indem er auf ihr die charakteristische $g_2^{(1)}$ bestimmt, d. h. der Punkt $y_1=0$, $y_2=0$ ist in der That p-facher Punkt der Curve C_{p+2}. —

Die Bestimmung der Anzahl der für eine Curve charakteristischen Constanten, der Moduln, kann nun im Anschlusse an unsere Bestimmung der Normalcurven niedrigster Ordnung geschehen (vgl. p. 685). Wir nehmen zuerst an, dass das Geschlecht p durch 3 theilbar, also $p=3\pi$ sei; dann ist die zugehörige Normalcurve von der Ordnung $2\pi+2$ und hat $2\pi(\pi-1)$ Doppelpunkte, d. h. sie hängt von

*) Der Name ist dadurch begründet, dass für diese Curven die hyperelliptischen Integrale (vgl. den Abschnitt VI. dieser Abtheilung) eine ähnliche Bedeutung haben, wie die elliptischen Integrale für die Curven vom Geschlechte $p=1$. Auch am Schlusse dieses Abschnittes kommen wir auf die hyperelliptischen Curven zurück; vgl. ausserdem den Abschnitt über die Curven vom Geschlechte $p=2$.

$$(\pi+1)(2\pi+5)-2\pi(\pi-1)=9\pi+5$$

Constanten ab. Von letzteren kann man aber durch lineare Transformation noch acht zerstören, so dass nur

$$9\pi-3=3p-3$$

Constante übrig bleiben. Eine weitere Reduction dieser Zahl durch besondere Wahl der willkürlichen $\pi-1$ Punkte, welche bei der Transformation unserer Curve C_n vom Geschlechte 3π in die Normalform (auf derselben liegend) als Basispunkte für die Transformationscurven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung dienen, ist nicht möglich. Zwei verschiedene solche Gruppen $G_{\pi-1}$ nämlich geben zu zwei Schaaren von adjungirten C_{n-3} Veranlassung, welche auf der C_n *dieselbe* Schaar $g^{(2)}_{2\pi+2}$ ausschneiden (da es nur eine endliche Anzahl von Schaaren $g^{(2)}_{2\pi+2}$ gibt, indem $\tau=0$) und sind daher vollkommen äquivalent in Bezug auf die Curve $f=0$. Sind also zwei solche Transformationen durch die Gleichungen

$$\varrho y_i=\varphi_i(x), \quad \varrho y_i=\psi_i(x)$$

gegeben, so führen dieselben auf die *gleiche* Normalcurve $F(y)=0$. Durch andere Wahl jener $\pi-1$ Basispunkte auf der C_n erreicht man also nur, dass eine andere ∞^2-Schaar von adjungirten C_{n-3} in eine Schaar von Geraden (und eine zu $F=0$ adjungirte feste $C_{2\pi-1}$) übergeführt wird, ohne jedoch die Gleichung $F=0$ selbst zu ändern.

Ganz analog gestaltet sich nun die Betrachtung für $p=3\pi+1$ und $p=3\pi+2$. Im ersteren Falle hat man $\tau=1$, und demgemäss kann die Transformation in die Normalcurve noch auf einfach unendlich viele *verschiedene* Arten geschehen, so dass man durch specielle Wahl der willkürlichen π Punkte noch eine Constante der resultirenden Gleichung $F=0$ zerstören kann. Die Zahl der bleibenden Constanten ist also gleich

$$\tfrac{1}{2}(2\pi+3)(2\pi+6)-2\pi^2-8-1=9\pi=3p-3\,.$$

In der That ist auch evident, dass zwei verschiedene Normalcurven $F(y)=0$, welche aus derselben C_n abgeleitet sind, nicht durch lineare Transformation aus einander entstehen können, so dass man wieder (wie vorhin) wegen der linearen Transformationen die Zahl der Constanten um 8 zu verringern hat. Sind nämlich aus $f=0$ zwei Curven $F=0$, $F'=0$ bez. durch die Substitutionen:

$$\varrho y_i=\varphi_i(x), \quad \varrho y_i'=\varphi_i'(x)$$

entstanden und sollen F und F' linear in einander transformirbar sein, so würde man setzen können:

$$\sigma\varphi_i=\alpha_{i1}\varphi_1'+\alpha_{i2}\varphi_2'+\alpha_{i3}\varphi_3'\,.$$

Die Curven φ_i' also würden derselben ∞^2-Schaar angehören wie die φ_i, und ihnen daher auch dieselben Punkte von $f=0$ gemeinsam sein; beide Transformationen würden sich somit nicht von einander unterscheiden. Ganz ebenso findet man endlich für $p=3\pi+2$ die Zahl der Constanten gleich

$$(\pi+2)(2\pi+7)-(2\pi^2+2\pi+1)-8-2=9\pi+3=3p-3.$$

*Die Anzahl der Moduln einer Curve vom Geschlechte p, d. i. der für letztere gegenüber eindeutigen Transformationen charakteristischen Constanten, ist sonach gleich $3p-3$.**)

Die Moduln spielen also bei den eindeutigen Transformationen dieselbe Rolle, wie die absoluten Invarianten bei den Collineationen.**) In analoger Weise wie die letzteren kann man aber auch erstere als Functionen von Doppelverhältnissen auffassen, oder auch geradezu gewisse Doppelverhältnisse als Moduln bezeichnen, wenn man (wie es meist geschieht) kein Gewicht darauf legt, die Moduln als rationale Functionen der Coëfficienten von f darzustellen. *Man kann nämlich als Moduln alle nur von den Coëfficienten der Gleichung $f=0$ abhängenden Parameter ansehen, welche, durch einen gewissen genau vorgeschriebenen algebraischen Process gebildet, ihren Werth nicht ändern, wenn man sie andererseits durch denselben Process aus den Coëfficienten der transformirten Curve zusammensetzt, oder — falls sie, wie z. B. ein Doppelverhältniss, irrationale Functionen der Coëfficienten sind — doch nur in eine endliche Anzahl davon verschiedener Werthe übergehen können.* Je nach der Art der anzuwendenden algebraischen Operation wird man verschiedene Systeme von Grössen als Moduln erhalten; um dieselben insbesondere durch Doppelverhältnisse darzustellen, wird man am einfachsten ein zu der Curve gehöriges binäres Werthgebiet aufsuchen, welchem bei der transformirten Curve ein ebensolches Werthgebiet eindeutig zugeordnet ist. Diese binären Werthgebiete sind dann projectivisch auf einander bezogen***); die aus entsprechenden Elementen derselben zu bildenden Doppelverhältnisse sind also einander gleich und liefern die Moduln. Am passendsten geht man dabei von adjungirten Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung aus; denn wir haben gesehen, dass den Schnittpunktsystemen derselben mit $f=0$ wieder Punktsysteme auf der neuen Curve ν^{ter} Ordnung entsprechen,

---

*) Die Zahl $3p-3$ ist von Riemann zuerst angegeben; a. a. O. §. 12. — Die Fälle $p=0$, 1 sind ausgenommen. Für $p=2$ ist die Zahl indess noch richtig, während sie für hyperelliptische Curven sonst nicht mehr gilt (p. 717). Ueberhaupt ist die Zahl kleiner als $3p-3$ für jede Curve, auf der andere Specialschaaren existiren, als in obiger Tabelle vorkommen.

**) Vgl. p. 249 und p. 267.

***) Vgl. p. 435, Anmerkung.

welche durch adjungirte Curven $(\nu - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung ausgeschnitten werden. In einem Büschel von adjungirten C_{n-3}, deren $p - 2$ Basispunkte beliebig auf $f = 0$ liegen, gibt es nun nach früheren Formeln $4p - 2$ berührende Curven (p. 461); und ihnen sind in dem entsprechenden Büschel von $C_{\nu-3}$ ebensoviele F berührende Curven zugeordnet.*) Das System der $4p - 2$ Tangenten dieser Curven in einem Basispunkte des ersteren Büschels ist daher projectivisch zu dem Systeme der $4p - 2$ Tangenten der entsprechenden Curven in letzterem Büschel; und die $4p - 5$ absoluten Invarianten der betreffenden binären Formen, d. h. die $4p - 5$ Doppelverhältnisse beider Tangentensysteme, sind einander gleich. Diese Doppelverhältnisse hängen aber noch von den Coordinaten der $p - 2$ beliebig auf $f = 0$ gewählten Basispunkte ab; durch Elimination derselben müssen sich daher nach der obigen Abzählung $3p - 3$ von einander unabhängige Functionen jener $4p - 5$ Doppelverhältnisse bilden lassen, welche nur noch von den Coëfficienten der Grundcurve abhängen und als Moduln aufzufassen sind.**) Letzteres erkennt man auch daraus, dass sich bei specieller Wahl jener $p - 2$ Punkte in der That direct $3p - 3$ von einander unabhängige Doppelverhältnisse ergeben, und zwar in folgender Weise.

In der ∞^{p-1}-Schaar von adjungirten C_{n-3} gibt es nach p. 461

$$p\{2p - 2 + (p-1)p - (p-1)\} = (p-1)p(p+1)$$

Curven, welche die C_n $(p-1)$-punktig berühren (p-punktig treffen); diese C_{n-3} sind also durch die C_n mit gegeben und hängen nur von den Coëfficienten der letzteren ab. Die $p - 2$ übrigen Schnittpunkte einer solchen C_{n-3} wählen wir nun zu Basispunkten unseres Curvenbüschels. Von den $4p - 2$ berührenden Curven des letzteren fallen jetzt $p - 1$ in die eine $(p-1)$-punktig berührende Curve zusammen; und es sind noch $3p - 1$ einfach berührende C_{n-3} in dem Büschel enthalten: die Tangenten dieser C_{n-3} und jener ausgezeichneten Berührungscurve in einem Basispunkte des Büschels stellen dann eine binäre Form $(3p)^{\text{ter}}$ Ordnung vor, für welche die $3p - 3$ zugehörigen Doppelverhältnisse nunmehr allein von den Coëfficienten der Grundcurve abhängen.***) Diese Doppelverhältnisse kann man

---

*) An der Zahl $4p - 2$ sind hier wegen etwaiger Rückkehrpunkte von f keine Reductionen anzubringen; vgl. die Bemerkungen auf p. 666.

**) Diese Bestimmungsweise der Moduln gab Riemann a. a. O.; die zuletzt im Texte berührte Frage wird hier auf transcendentem Wege erledigt.

***) Diese Bestimmungsweise der Moduln ist auch von Weierstrass angewandt; vgl. Brill und Nöther a. a. O. p. 302. Man findet daselbst auch noch verschiedene andere Bestimmungsweisen angegeben.

daher als Moduln auffassen, vorausgesetzt, dass dieselben im Allgemeinen von einander unabhängig sind. Dass letzteres aber in der That der Fall ist*), beweist man, indem man zeigt, dass *umgekehrt durch die Werthe dieser* $3p-3$ *Parameter eine Curve bis auf solche Curven, die aus ihr durch eindeutige Transformation entstehen, endlich vieldeutig bestimmt ist*, und zwar in folgender Weise.**) Statt einer C_n vom Geschlechte p können wir eine C_{p+1} mit $\frac{1}{2}p(p-3)$ Doppelpunkten der Betrachtung zu Grunde legen; dieser kann man ferner, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, die Eigenschaft beilegen einen Punkt zu besitzen, in welchem sie von einer Geraden $(p-1)$-punktig berührt wird; denn um eine solche Curve aus einer allgemeinen C_n zu erhalten, hat man das Netz der Transformationscurven nur so zu wählen, dass dasselbe eine der $(p-1)$-punktig berührenden C_{n-3} enthält. Die $(p-1)$-punktig berührende Gerade wird dann die C_{p+1} noch in einem weiteren Punkte P schneiden, von welchem aus man noch $3p-1$ Tangenten an die C_{p+1} legen kann. Die Doppelverhältnisse der so bestimmten $3p$ Geraden sind die von uns zu untersuchenden Parameter. Dieselben betrachten wir nun umgekehrt als völlig beliebig gegeben; alsdann kann eine C_{p+1}, zu der sie als Moduln gehören, immer in folgender Weise gefunden werden. Wir nehmen einen beliebigen Punkt P an und legen durch ihn drei beliebige Gerade, dann kann man durch P noch $3p-3$ andere Gerade legen, welche mit jenen drei die gegebenen $3p-3$ Doppelverhältnisse bilden. Legen wir nun einer C_{p+1} die Bedingungen auf, durch P zu gehen, $\frac{1}{2}p(p-3)$ Doppelpunkte zu haben, die $3p$ genannten Geraden zu berühren und zwar eine unter diesen $(p-1)$-punktig, so ist die Zahl der für die C_{p+1} noch verfügbaren Constanten gleich

$$\frac{1}{2}(p+1)(p+4)-\frac{1}{2}p(p-3)-(4p-2)-1=3.$$

Sei aber $F'=0$ die Gleichung einer beliebigen Curve, welche diesen Bedingungen genügt, und seien $x_1=0$, $x_2=0$ die Coordinaten des

---

*) Sollte es in besonderen Fällen anders sein, so hat man also eben einigen der Moduln specielle Werthe beigelegt, indem dann für die entsprechende, durch die $3p$ Tangenten in einem Basispunkte dargestellte binäre Form gewisse Invariantenrelationen erfüllt sind. Diese Relationen können durch besondere Werthe absoluter Invarianten (d. i. Verschwinden von Invarianten) gegeben werden, oder auch durch identisches Verschwinden von Covarianten. Durch letzteres Vorkommniss werden im Allgemeinen wieder Relationen zwischen Doppelverhältnissen angezeigt, so dass man beide Fälle umfasst, wenn man nur die Doppelverhältnisse (also *irrationale* Parameter) betrachtet; man verzichtet damit jedoch zunächst auf *rationale* Darstellung der Moduln durch die Coëfficienten der C_n.

**) Vgl. Cayley: Proceedings of the London Math. Society, vol. 1.

Punktes P, so werden unsere Bedingungen auch noch durch jede Curve $F = 0$ erfüllt, welche aus $F' = 0$ durch die lineare Transformation*)

$$\varrho y_1 = x_1, \quad \varrho y_2 = x_2, \quad \varrho y_3 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$$

entsteht; und diese Curve $F = 0$ enthält drei willkürliche Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Daraus folgt, dass alle Curven, welche jenen Bedingungen genügen, aus einer endlichen Zahl von Curven $F' = 0$ durch lineare Transformation müssen abgeleitet werden können. Hiermit ist also erstens gezeigt, dass *die oben als Moduln eingeführten $3p - 3$ Doppelverhältnisse von einander unabhängig sind*, gleichzeitig aber auch, dass *diese $3p - 3$ Moduln umgekehrt eine „Klasse" von Curven des Geschlechtes p bestimmen*, wenn wir mit Riemann zu einer Klasse alle diejenigen Curven rechnen, welche eindeutig in einander übergeführt werden können. —

Es sei schliesslich noch erwähnt, wie diese Bestimmung der Moduln bei den hyperelliptischen Curven (p. 712), d. i. bei den Curven mit einer Specialschaar $g_2^{(1)}$, modificirt wird. Irgend ein Büschel von adjungirten C_{n-3} durch $p - 2$ Punkte von f geht noch durch $p - 2$ weitere feste Punkte von f; und in demselben gibt es nur $2(2 + p - 1) = 2p + 2$ berührende Curven. Da nun sämmtliche construirbaren Büschel von C_{n-3} hier weiter äquivalent sind, so sind die $2p - 1$ Doppelverhältnisse der Parameter dieser Berührungscurven unabhängig von der Wahl der festen Punkte, und *sie sind die $2p - 1$ Moduln der hyperelliptischen Curve.* Hieraus folgt gleichzeitig, *dass es $2p - 3 - 2p + 1 = p - 2$ Bedingungen äquivalent ist, wenn eine Curve vom Geschlechte p eine Specialschaar $g_2^{(1)}$ besitzen soll.***) Geht man insbesondere von der oben angegebenen Normalform einer hyperelliptischen Curve aus, d. h. einer Curve $(p + 2)^{\text{ter}}$ Ordnung mit p-fachem Punkte, so sind die adjungirten C_{n-3} durch Gruppen von je $p - 1$ der durch den p-fachen Punkt gehenden Geraden gegeben; *die Moduln also sind die $2p - 1$ Doppelverhältnisse (absoluten Invarianten) der $2p + 2$ Tangenten, welche vom p-fachen Punkte aus an die Curve zu legen sind.*

Es ist übrigens leicht, auch die Gleichung einer solchen C_{p+2} in eine Form zu transformiren, in welcher diese $2p - 1$ Moduln allein als Constanten explicite vorkommen. Der p-fache Punkt nämlich

---

*) Dieselbe ist eine perspectivische Collineation, deren Collineationscentrum (nämlich der Punkt $x_1 = 0$, $x_2 = 0$) gegeben ist (p. 254 ff.)

**) Man erkennt gleichzeitig, dass eine Curve mit dem Geschlechte $p = 2$ immer hyperelliptisch ist und also immer in eine C_4 mit Doppelpunkt transformirt werden kann, was später noch direct bewiesen wird; vgl. den Abschnitt über die Curven vom Geschlechte $p = 2$.

möge in der Ecke $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ liegen; dann muss die Gleichung der Curve C_{p+2} von der Ordnung sein:

$$x_2^2 \varphi_p (x_1, x_3) + x_2 \varphi_{p+1} (x_1, x_3) + \varphi_{p+2} (x_1, x_3) = 0,$$

wenn die φ homogene Functionen ihrer Argumente bez. von der Ordnung der unteren Indices bedeuten. Für die Coordinaten der Berührungspunkte der vom Doppelpunkte ausgehenden Tangenten, müssen sich bei gegebenem Werthe von $x_1 : x_3$ aus dieser Gleichung zwei einander gleiche Werthe für $x_2 : x_3$ ergeben. Diese $2p + 2$ Tangenten sind daher gegeben durch die Gleichung:

$$\mathrm{X} (x_1, x_3) \equiv 4 \varphi_{p+2} (x_1, x_3) \cdot \varphi_p (x_1, x_3) - [\varphi_{p+1} (x_1, x_3)]^2 = 0.$$

Durch Drehung des Coordinatensystems um den p-fachen Punkt kann man es aber immer erreichen, dass

$$\mathrm{X} (x_1, x_3) = x_1 \cdot x_3 \cdot (x_1 - x_3)(x_1 - k^{(1)} x_3)(x_1 - k^{(2)} x_3) \ldots (x_1 - k^{(2p-1)} x_3);$$

und dann sind die Grössen $k^{(1)}, \ldots k^{(2p-1)}$ *die Moduln der Curve.* Macht man noch die Transformation:

$$\varrho y_1 = x_1 \varphi_p, \quad \varrho y_2 = x_2 \varphi_p + \tfrac{1}{2} \varphi_{p+1}, \quad \varrho y_3 = x_3 \varphi_p,$$

so geht unsere Curve über in die Form:

$$4 y_2^2 [\varphi_p (y_1, y_3)]^2 + \mathrm{X} (y_1, y_3) = 0,$$

eine Curve $(2p - 2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche nach den Erörterungen auf p. 493 f. in $y_1 = 0$, $y_3 = 0$ einen $2p$-fachen Punkt hat, dessen Tangenten paarweise zusammenfallen, so dass nur p getrennte Tangenten vorhanden sind. Die Gleichung der letzteren ist dann eben durch $\varphi_p = 0$ gegeben.

In unserer letzten Gleichung sind aber ausser den $2p - 1$ Moduln noch die p Constanten der Function φ_p enthalten; auch diese kann man noch durch eindeutige Transformation fortschaffen. Die gegebene C_{p+2} nämlich geht offenbar in eine andere C'_{p+2} derselben Ordnung über, wenn man für die Transformation ein Netz von adjungirten Curven p^{ter} Ordnung benutzt, welche durch $2p - 2$ feste einfache Punkte der C_{p+2} hindurchgeht; in der That schneiden diese Curven die C_{p+2} ja noch in

$$p(p+2) - p(p-1) - 2p + 2 = p + 2$$

beweglichen Punkten. Soll insbesondere die entstehende Curve C'_{p+2} wieder einen p-fachen Punkt haben (und nicht $\frac{1}{2} p (p-1)$ einfache Doppelpunkte), so muss in dem Netze ein Curvenbüschel enthalten sein, dessen Curven die C_{p+2} nur in *zwei* beweglichen Punkten treffen. Da es aber nur *eine* Schaar $g_2^{(1)}$ auf der Grundcurve gibt, so muss dieser Büschel dann aus einer *festen* Curve

$(p-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $\Phi_{p-1}=0$, welche in dem p-fachen Punkte einen $(p-2)$-fachen Punkt hat, und aus dem Geradenbüschel $x_1+\lambda x_3=0$ bestehen. Die Curve $\Phi_{p-1}=0$ schneidet dann die C_{p+2} noch in

$$(p-1)(p+2)-p(p-2)=3p-2$$

einfachen Punkten; durch $2p-2$ dieser letzteren legen wir eine Curve $\Phi_p=0$ mit $(p-1)$-fachem Punkte in $x_1=0$, $x_3=0$; und dann bilden die Curven

$$(x_1+\lambda x_3)\Phi_{p-1}+\mu\Phi_p=0$$

ein Netz der verlangten Art mit $p+2$ beweglichen Schnittpunkten. Die C_{p+2} geht also in eine C'_{p+2} mit p-fachem Punkte in $y_1=0$, $y_2=0$ über mittelst der Transformation:

$$\varrho y_1=x_1\Phi_{p-1}(x),\quad \varrho y_2=\Phi_p(x),\quad \varrho y_3=x_3\Phi_{p-1}(x).$$

Dabei entsprechen insbesondere den $2p+2$ Tangenten der C_{p+2} aus dem Büschel $x_1+\lambda x_3=0$ die $2p+2$ Tangenten der C'_{p+2} aus dem Büschel $y_1+\lambda y_3=0$. Man kann nun aber die Curve $\Phi_{p-1}=0$ insbesondere so legen, dass p von den Berührungspunkten der Tangenten des letzteren Büschels in den p-fachen Punkt $y_1=0$, $y_3=0$ zurückfallen, d. h. dass die p Tangenten des letzteren bez. für die p Zweige der Curve C'_{p+2} zugleich *Wendetangenten* werden. Und zwar geschieht dies offenbar, wenn die p Schnittpunkte der C_{p+2} mit $\Phi_{p-1}=0$, welche nicht gleichzeitig auf der Curve $\Phi_p=0$ liegen, mit p von den Berührungspunkten der Tangenten des Büschels $x_1+\lambda x_3=0$ zusammenfallen; denn diese p Schnittpunkte von $\Phi_{p-1}=0$ mit der C_{p+2} sind es eben, welche sich zu dem p-fachen Punkte der C'_{p+2} vereinigen. Da nun von den Schnittpunkten von Φ_{p-1} mit C_{p+2} noch

$$\tfrac{1}{2}(p-1)(p+2)-\tfrac{1}{2}(p-2)(p-1)=2p-2$$

willkürlich angenommen werden können, so kann man *jedenfalls* p dieser Punkte mit p der beregten Berührungspunkte zusammenfallen lassen; von den gemeinsamen $2p-2$ Basispunkten obigen Netzes sind dann noch weitere $p-2$ willkürlich wählbar. Jede der p Tangenten des vielfachen Punktes der so gewonnenen C'_{p+2} schneidet diese Curve schon $(p+2)$-fach in diesem Punkte; ist also die Gesammtheit dieser Tangenten durch $\varphi_p(y_1,y_3)=0$ gegeben, so muss die Curvengleichung für $\varphi_p=0$ unabhängig von y_2 werden, d. h. von der Form sein:

$$y_2^2\varphi_p(y_1,y_3)-\psi_{p+2}(y_1,y_3)=0.$$

Da ferner der Strahlbüschel $y_1+\lambda y_3=0$ auf den Büschel $x_1+\lambda x_3=0$ eindeutig bezogen ist, und da:

$$\varrho^{2p+2}\varphi_p(y_1,y_3)\cdot\psi_{p+2}(y_1,y_3)\equiv \mathrm{X}_{2p+2}(x_1,x_3)\cdot[\Phi_{p-1}(x)]^{2p+2},$$

so können wir setzen:

$$\sigma\varphi_p(y_1, y_3) \quad = y_1 \cdot y_3 \cdot (y_1 - y_3)(y_1 - k^{(1)}y_3) \ldots (y_1 - k^{(p-3)}y_3)$$
$$\sigma\psi_{p+2}(y_1, y_3) = (y_1 - k^{(p-2)}y_3)(y_1 - k^{(p-1)}y_3) \ldots (y_1 - k^{(2p-1)}y_3).$$

Die Gleichung der Curve hängt also in der That nur von den $2p-1$ *Moduln ab;* und wir haben den Satz:

Jede hyperelliptische Curve kann eindeutig in eine Curve $(p+2)^{ter}$ *Ordnung mit einem p-fachen Punkte so transformirt werden, dass die Tangenten* ($\varphi_p = 0$) *des letzteren zugleich Wendetangenten der Curve sind*), dass also nur noch* $p+2$ *weitere Tangenten* ($\psi_{p+2} = 0$) *von ihm ausgehen. Die Berührungspunkte der letzteren liegen dann auf einer Geraden* ($y_2 = 0$), *wie man aus der Gleichung der Curve:*

$$y_2^2\varphi_p - \psi_{p+2} = 0$$

sofort erkennt.

IV. Verallgemeinerungen der Correspondenzformeln. — Bestimmung einiger Specialschaaren.

In unseren Untersuchungen über den Riemann-Roch'schen Satz haben wir die Bestimmung der Zahl der Lösungen für die sich bietenden Probleme nicht wirklich ausgeführt, wir begnügten uns vielmehr, die Möglichkeit der Lösung nachzuweisen und die Grenzen für diese Möglichkeit zu ziehen. Jene Bestimmung nun soll hier für einzelne Fälle im Anschlusse an gewisse Verallgemeinerungen unserer früheren Correspondenzformeln wirklich geleistet werden.

Die allgemeineren Ueberlegungen, deren Durchführung zuvor nöthig ist, sind jedoch unabhängig von jenen späteren Anwendungen von grossem Interesse für die Theorie der Elimination überhaupt und sollen uns daher ausführlicher beschäftigen. Es handelt sich dabei im Wesentlichen um folgende Aufgabe: *Gegeben sind n Gleichungen:*

$$\varphi_1(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(n)}) = 0,\ \varphi_2(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(n)}) = 0 \ldots,\ \varphi_n(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(n)}) = 0$$

in welchen die Systeme von Variabeln:

$$x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ x_3^{(1)};\quad x_1^{(2)},\ x_2^{(2)},\ x_3^{(2)};\ \ldots\quad x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ x_3^{(n)}$$

einzeln homogen vorkommen, während für dieselben gleichzeitig eine und dieselbe Gleichung $f = 0$ *erfüllt ist, so dass:*

$$f(x^{(1)}) = 0,\quad f(x^{(2)}) = 0 \ldots, f(x^{(n)}) = 0.$$

Es soll die Zahl derjenigen Gruppen von je n getrennt liegenden Punkten $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(n)}$ *auf* $f = 0$ *bestimmt werden, welche den n Bedingungen* $\varphi_i = 0$ *gleichzeitig genügen.*

*) Diese Transformation wurde in anderer Weise von Cremona gegeben: Sulla trasformazione delle curve iperellittiche, Rendiconti del Reale Istituto Lombardo. Serie II, vol. 2, 29 aprile 1869.

Für den Fall $n = 2$ ist diese Frage schon durch die auf p. 445f. aufgestellte Zahl $(\varphi\varphi')$ beantwortet. Eine genauere Untersuchung dieser Formel für den Fall, dass die Correspondenzen φ, φ' mit *Ausnahmepunkten* behaftet sind (p. 679), soll den Ausgangspunkt unserer Betrachtung bilden; insbesondere werden wir dabei wiederum Gelegenheit haben zu erkennen, dass in der That die Anwendung des Chasles'schen Correspondenzprincips zur Beurtheilung der bei algebraischen Eliminationen im Resultate auftretenden fremden Factoren von grossem Nutzen ist (vgl. p. 424.) Der Uebergang zur Bestimmung der *Zahl von Punktetripeln, welche gleichzeitig drei Correspondenzen* genügen, wird sich dann einfach bewerkstelligen lassen. Man wird so im Folgenden auch manche *Ergänzungen* zu unseren früheren Untersuchungen über Correspondenzen finden. —

Um ein einfaches Beispiel für die Behandlungsweise der sich hier bietenden Probleme zu geben, knüpfen wir zunächst an bekannte Resultate an, um dieselben in neuer und später zu verallgemeinernder Weise abzuleiten. Schon bei der Theorie der eindeutigen Transformationen betrachteten wir eine mit $M = 0$ bezeichnete Curve, welche zu einer gegebenen Grundcurve $f = 0$ und einem gegebenen Curvennetze

$$(1) \qquad \alpha_1\psi_1(x) + \alpha_2\psi_2(x) + \alpha_3\psi_3(x) = 0$$

in ganz bestimmter Beziehung stand (p. 663). Diese Curve war als Ort der übrigen Basispunkte eines aus dem Netze (1) herausgewählten Curvenbüschels definirt, wenn ein Basispunkt dieses Büschels die vorliegende Curve $f = 0$ durchläuft: Wir haben die Ordnung der Curve $M = 0$ und deren Verhalten in gemeinsamen festen Punkten der Curven (1) bestimmt und gesehen, dass dieselbe durch alle Schnittpunkte der Jacobi'schen Curve des Netzes (1) mit $f = 0$ hindurchgeht, dass sie aber ausserdem auf $f = 0$ diejenigen Punkte*paare* x-y ausschneidet, durch welche noch *einfach unendlich viele* Curven jenes Netzes hindurchgehen, d. i. deren Coordinaten dem Systeme von Gleichungen genügen (vgl. p. 687):

$$\left\| \begin{matrix} \psi_1(x) & \psi_2(x) & \psi_3(x) \\ \psi_1(y) & \psi_2(y) & \psi_3(y) \end{matrix} \right\| = 0 .$$

Letzteres System kann man — und darin liegt die Wichtigkeit dieser früheren Untersuchungen als einfachster Beispiele für das Folgende — ersetzen durch die *zwei* Gleichungen (abgesehen von $\psi_1(x) = \psi_1(y) = 0$):

$$(2) \quad \psi_1(x)\,\psi_2(y) - \psi_2(x)\,\psi_1(y) = 0, \quad \psi_1(x)\,\psi_3(y) - \psi_3(x)\,\psi_1(y) = 0 .$$

Die beiden Gleichungen (2) stellen in Bezug auf die Grundcurve $f = 0$ zwei Correspondenzen $(\nu - 1, \nu - 1)_1$ dar*), die in den x und

*) In Betreff der Bezeichnungsweise vgl. p. 443 und 662.

y symmetrisch sind; zu jedem Punkte x von $f = 0$ gehört vermöge dieser Correspondenzen je eine Curve des Netzes (1), welche durch x geht, und die übrigen Schnittpunkte dieser beiden Curven beschreiben die Curve $M = 0$, wenn x die Curve $f = 0$ durchläuft. Zu derselben Curve $M = 0$ wird man in Folge der erwähnten Symmetrie aber auch geführt, wenn man die zu Punkten y von f gehörenden Curven (2) betrachtet. Die Zahl der den Gleichungen (2) genügenden Punktepaare x-y muss sich dann aus der früheren Correspondenzformel für $(\varphi\varphi')$ ergeben (p. 446), wenn man die Modificationen berücksichtigt, welche letztere in Folge fester Punkte des Netzes erleiden könnte, und wenn man an der so resultirenden Zahl mit Rücksicht auf die den Gleichungen $\psi_1(x) = 0$, $\psi_1(y) = 0$ entsprechenden Lösungen *eine Reduction* eintreten lässt.

Hiernach liegt es nahe, statt der Gleichungen (2) überhaupt *zwei beliebige Correspondenzen* $(\alpha, \beta)_\gamma$, $(\alpha', \beta')_{\gamma'}$, gegeben durch die Gleichungen

$$\varphi\left(\overset{r}{x}, \overset{s}{y}\right) = 0, \quad \varphi'\left(\overset{r'}{x}, \overset{s'}{y}\right) = 0 \tag{3}$$

auf $f = 0$ anzunehmen. Bewegt sich dann x auf der festen Grundcurve, so werden die übrigen Schnittpunkte der beiden vermöge (3) zu x gehörenden Curven eine Curve durchlaufen, die im Folgenden durch $\mathsf{M}_y = 0$ bezeichnet sei; und eine andere Curve $\mathsf{M}_x = 0$ wird man erhalten als Ort der Schnittpunkte der zu Punkten y von f gehörenden Curven. Beide Curven werden zusammenfallen, wenn beide Correspondenzen (3) symmetrisch in x und y sind, wie im Falle der Gleichungen (2). *Die Eigenschaften dieser Curven* $\mathsf{M}_y = 0$ *und* $\mathsf{M}_x = 0$ *wollen wir zunächst erörtern*, denn diese sind es, welche uns zur genaueren Bestimmung der gleichzeitig beiden Correspondenzen (3) genügenden Punktepaare führen werden.

Zur Erläuterung des dabei einzuschlagenden Weges sei es gestattet, *die aufgeworfene Frage zuvor für den einfacheren Fall der Gleichungen* (2) *zu beantworten*, d. h. ausgehend von den hier massgebenden Gesichtspunkten die Curve $M = 0$ nochmals zu untersuchen. Es wird diese Untersuchung wesentlich auf Anwendungen des Chasles'schen Correspondenzprincips beruhen.*)

Die Curven ψ des Netzes (1) seien von der s^{ten} Ordnung und mögen in ϱ gemeinsamen Basispunkten $S_1, S_2, \ldots S_\varrho$ bez. t_1-, t_2-, ... t_ϱ-fache Punkte (je mit getrennten Tangenten) haben. Die Grundcurve $f = 0$ sei von der n^{ten} Ordnung und möge in den Punkten

*) Die folgende Bestimmung der Eigenschaften von $M = 0$ und der Jacobischen Curve des Netzes (1) verdankt der Herausgeber einer Mittheilung von Brill.

$S_1, S_2, \ldots S_\varrho$ bez. einen a_1-, a_2-, ... a_ϱ-fachen Punkt besitzen (wo diese letzteren Zahlen auch Null sein können). Diejenigen C_s der Schaar, welche durch einen beliebig angenommenen weiteren Punkt x der C_n gehen, schneiden sich noch in $s^2 - \Sigma t_i^2 - 1$ (wo sich das Summenzeichen auf alle ϱ festen Basispunkte des Netzes bezieht) Punkten y, welche auf der Curve $M = 0$ liegen. Um nun die Ordnung m der letzteren zu bestimmen, nehme man zwei beliebige feste Punkte A und B in der Ebene an, lege durch A und x eine C_s des Netzes, ebenso durch B und x eine solche und lasse x sich auf der C_n bewegen. Dann bilden die Schnittpunkte dieser beiden C_s mit einer beliebigen festen Geraden auf letzterer eine Correspondenz

$$(s\,(ns - \Sigma a_i t_i)\,,\quad s\,(ns - \Sigma a_i t_i))\,.$$

Die Coincidenzpunkte derselben sind zum Theil Punkte der C_m $M = 0$, zum Theil solche der C_n, theils endlich Punkte derjenigen Curve C_s des Netzes, welche gleichzeitig durch die beiden festen Punkte A und B hindurchgeht.*) Von letzteren Punkten der Geraden absorbirt jeder $s\,(ns - \Sigma a_i t_i)$ Coincidenzen; denn in so vielen Punkten schneidet die beregte C_s die C_n, und *jedem* derselben entspricht wieder dieselbe C_s als Curve des anderen Büschels. Man hat daher die Beziehung:

$$2\,s\,(ns - \Sigma a_i t_i) = m + n + s\,(ns - \Sigma a_i t_i)\,,$$

woraus sich *die Ordnung der Curve* $M = 0$ bestimmt (p. 663):

$$m = n\,(s^2 - 1) - s\,\Sigma a_i t_i = \nu s - n\,, \tag{4}$$

wenn $\nu = ns - \Sigma a_i t_i$ die Zahl der beweglichen Schnittpunkte einer Curve ψ mit $f = 0$ bedeutet. Ferner bemerke man, dass, wenn x auf der C_n wandert, auch die t_k (mit x beweglichen) Tangenten, welche in einem festen Punkte S_k an die durch x und A, bez. durch x und B gehenden C_s gezogen werden können, eine Correspondenz bilden:

$$(t_k\,(ns - \Sigma a_i t_i)\,,\quad t_k\,(ns - \Sigma a_i t_i))\,.$$

Die Coincidenzen derselben entsprechen aber

1) den a_k Tangenten der Curve C_n in S_k,
2) den t_k Tangenten an jene Curve C_s, welche zugleich durch A und B geht, jede wieder $(ns - \Sigma a_i t_i)$-fach als Coincidenzstrahl zählend,
3) den α_k Tangenten von $M = 0$ in S_k, wo eben α_k noch zu bestimmen ist.

---

*) Diese Punkte müssen so gewählt sein, dass sie nicht Basispunkte eines und desselben im Netze enthaltenen Büschels sind. Ist A ein Schnittpunkt von ψ_1 mit ψ_2 und B ein solcher von ψ_1 mit ψ_3, so sind die beiden betreffenden Curven eben durch (2) gegeben, und die zuletzt erwähnte Curve ist $\psi_1 = 0$.

Wir haben also:

$$2\,t_k\,(ns - \Sigma a_i t_i) = \alpha_k + a_k + t_k\,(n - \Sigma a_i t_i)\,,$$

woraus man die *Vielfachheit des Punktes S_k für die Curve* $M = 0$ findet (p. 664):

$$(5) \qquad \alpha_k = t_k\,(ns - \Sigma a_i t_i) - a_k = \nu t_k - a_k\,.$$

Verbindet man (5) mit (4), so erhält man noch die symmetrisch gestaltete Formel*):

$$(6) \qquad s\,(a_k + \alpha_k) = t_k\,(n + m)\,.$$

Um schliesslich die Zahl der Punktepaare x-y zu finden, hatten wir noch die Eigenschaft der Jacobi'schen Curve $(\psi_1\,\psi_2\,\psi_3) = 0$ nöthig (p. 472), d. i. des Ortes der Punkte, in denen sich zwei Curven des Netzes (und dann jedesmal unendlich viele Curven desselben) und somit zwei Curven der durch A und B gehenden Büschel berühren. Es sei noch bemerkt, dass man die Ordnung dieses Ortes auch in folgender Weise ableiten kann. Ausser den Punkten A und B nehmen wir noch zwei *beliebige* Gerade F und G zu Hülfe. Durch A und einen beweglichen Punkt P von F, ebenso durch B und P lege man je eine Curve C_s und construire an beide die Tangenten in P: Wir suchen die Zahl der Punkte P, für welche diese zwei Tangenten zusammenfallen. Wenn man nun um einen beliebig auf F angenommenen Punkt Q sich eine Gerade drehen lässt und für irgend eine Lage derselben diejenigen Curven C_s des durch A gehenden Büschels sucht, für welche dieselbe Tangente ist, so gibt es deren $2\,(s-1)$, und der Ort der Berührungspunkte für alle Lagen der Geraden durch Q ist eine Curve der Ordnung $2\,(s-1) + 1 = 2\,s - 1$, welche einfach durch Q geht.**) Diese Curve schneidet die Gerade G in $2s - 1$ Punkten; zwischen den Schnittpunkten der Paare von den in Punkten P construirten Tangenten mit G hat man daher eine Correspondenz $(2\,s-1,\ 2\,s-1)$. Unter den $4\,s - 2$ Coincidenzen derselben befinden sich aber ausser den Schnittpunkten von G mit $(\psi_1\,\psi_2\,\psi_3) = 0$ noch die Schnittpunkte der durch A und B zugleich gehenden C_s, sowie der Schnittpunkt der beiden Geraden G und F. Somit bleibt für *die Ordnung der* Jacobi*'schen Curve die Zahl*

$$(7) \qquad 4\,s - 2 - s - 1 = 3\,(s-1)\,.$$

---

*) Die in den Gleichungen (4), (5), (6) ausgesprochenen Resultate sind es, welche von Cayley für den Fall $s = 3$ gelegentlich unter dem Namen des „Geiser-Cotterill“-Theorems ausgesprochen wurden: Math. Annalen, Bd. 8, p. 360.

**) Dies folgt auch aus einem Satze auf p. 414, denn der durch A gehende Büschel von C_s bildet ein Curvensystem mit den Charakteristiken $\mu = 1$, $\mu' = 2\,(s-1)$.

Ganz analoge Betrachtungen kann man anstellen, wenn man statt der demselben Netze angehörigen Büschel durch A und B zwei beliebige Büschel

$$\psi + \lambda\chi = 0, \quad \psi' + \lambda\chi' = 0$$

bez. von den Ordnungen s und s' zu Grunde legt; man hat dann nur an den gewonnenen Resultaten keine Reduction wegen einer beiden Büscheln gemeinsamen Curve anzubringen. An Stelle der Curve $M = 0$ tritt also eine Curve der Ordnung:

$$(8)\quad s(ns' - \Sigma a_i t_i') + s'(ns - \Sigma a_i t_i) - n = n(2ss' - 1) - s\,\Sigma a_i t_i' - s'\,\Sigma a_i t_i,$$

wo sich die Zahlen t_i auf gemeinsame vielfache Punkte des Büschels s^{ter}, die Zahlen t_i' auf solche Punkte des Büschels s'^{ter} Ordnung beziehen. Für die Vielfachheit dieser Curve in einem Punkte, welcher t-facher Punkt des ersten, t'-facher des zweiten Büschels und a-facher von $f = 0$ ist, erhält man an Stelle von (5) die Zahl:

$$(9)\quad \alpha = t'(ns - \Sigma a_i t_i) + t(ns' - \Sigma a_i t_i') - a.$$

Endlich findet man die Ordnung des Ortes derjenigen Punkte, in denen sich zwei Curven der Büschel berühren, gleich

$$(10)\quad (2s - 1) + (2s' - 1) - 1 = 2(s + s') - 3.^{*)}$$

Man könnte diese Resultate endlich noch weiter verallgemeinern, indem man die beiden Curvenbüschel durch zwei einfach unendliche Curvensysteme der Ordnung s bez. s' mit den Charakteristiken μ, ν bez. μ', ν' ersetzt und dann diese Curvensysteme in ihrer Beziehung zu einer *beliebigen* C_n $f = 0$ betrachtet.**) Für uns ist jedoch der

*) Vgl. auch Cremona's Einleitung in die Theorie der algebraischen Curven, p. 127 in der Uebersetzung von Curtze; ib. p. 130 wird auch gezeigt, dass die gemeinschaftlichen Tangenten der Curven beider Büschel in ihren Berührungspunkten im Allgemeinen eine Curve der Klasse $4ss' - 2(s + s')$ umhüllen. — Auch zwei Büschel der hier gemeinten Art kann man für eine eindeutige Transformation benutzen; den Doppelpunkten der neuen Curve entsprechen dann diejenigen Punktepaare, durch welche noch aus *jedem* der beiden Büschel eine Curve hindurchgeht; vgl die Anmerkungen auf p. 693 und 709.

**) Man erhält dann übrigens leicht auf analogem Wege an Stelle von (8) die Zahl:

$$\mu\mu' s(ns' - \Sigma a_i t_i') + \mu\mu' s'(ns - \Sigma a_i t_i) - \mu\mu' n$$
$$= \mu\mu' \{n(2ss' - 1) - s\,\Sigma a_i(t_i + t_i')\},$$

an Stelle von (9) die Zahl:

$$\mu\mu' \{t'(ns - \Sigma a_i t_i) + t(ns' - \Sigma a_i t_i') - a\},$$

endlich an Stelle von (10) die Zahl:

$$\mu'(\mu + \nu) + \mu(\mu' + \nu') - \mu\mu' = \mu\nu' + \nu\mu' + \mu\mu'.$$

Hieran sind wieder noch Reductionen anzubringen, wenn beiden Curvensystemen (für $s = s'$) eine Curve gemeinsam ist, oder wenn (für $s > s'$) eine Curve C_s des ersten Systems in eine Curve $C_{s'}$ des zweiten und in eine andere $C_{s-s'}$ zerfällt.

Fall von hervorragendem Interesse, dass beide Curvensysteme zu der C_n in ganz besonderen Beziehungen stehen, denn *dieser Fall liegt eben vor, wenn zwei beliebige Correspondenzen in der Form* (3) *gegeben sind* (wie sich sogleich zeigen wird). Zur Untersuchung dieser Verhältnisse gehen wir daher jetzt über; allerdings werden wir dabei genöthigt sein, uns in manchen Einzelheiten auf Andeutungen zu beschränken.

In den Gleichungen (3), welche die zu betrachtenden Correspondenzen $(\alpha, \beta)_\gamma$, $(\alpha', \beta')_{\gamma'}$ auf $f = 0$ vermitteln (wo wieder f von der Ordnung n und vom Geschlechte p), können wir etwa die y_i als veränderliche Punktcoordinaten, die x_i dagegen als drei homogen vorkommende Parameter auffassen, die noch an die Bedingung $f(x) = 0$ geknüpft sind. Eine Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ stellt uns dann ein System von Curven dar, welches von einem irrational vorkommenden Parameter in allgemeinster Weise abhängt (vgl. p. 390). In den Gleichungen (3) haben wir also, wie oben behauptet wurde, zwei solche Curvensysteme vor uns, welche mit ihrem Parameter je durch *dieselbe* Irrationalität verknüpft sind. Zu der Curve $f = 0$ stehen diese Systeme aber dadurch noch in besonderer Relation, dass unserer Annahme nach die Functionen $\varphi(x, y)$, $\varphi'(x, y)$ für $x = y$ vermöge $f = 0$ bez. γ- und γ'-fach verschwinden sollen, während letzteres im Allgemeinen für einen beliebigen Punkt der Ebene nicht eintreten wird. Dies können wir auch dahin aussprechen, dass unter den Curven des Systems, welche durch einen beliebigen Punkt x der Curve f gehen, immer eine enthalten ist (nämlich „die vermöge (3) zu x gehörige Curve“), von deren Schnittpunkten mit der Grundcurve γ bez. γ' in x selbst liegen; für jede der übrigen durch x gehenden Curven gibt es einen anderen Punkt von $f = 0$, in welchen γ bez. γ' Schnittpunkte derselben mit $f = 0$ zusammenfallen.

Für das System der Curven s^{ter} Ordnung $\varphi = 0$ mögen nun wieder die Punkte $S_1, S_2, \ldots S_\varrho$ mit den charakteristischen Zahlen $t_1, t_2, \ldots t_\varrho$ und $a_1, a_2, \ldots a_\varrho$ dieselbe Bedeutung haben wie soeben in dem Beispiele eines Curvenbüschels; für die Curven s'^{ter} Ordnung $\varphi' = 0$ bezeichnen wir ferner in entsprechender Weise ausgezeichnete Punkte mit $S_1', S_2', \ldots S_{\varrho'}'$ und die zugehörigen Zahlen mit $t_1', t_2', \ldots t_{\varrho'}'$, $a_1', a_2', \ldots a_{\varrho'}'$. Dabei können von den Punkten S' einige oder auch alle mit Punkten S zusammenfallen. Es bestehen dann die Relationen:

$$(11) \qquad \beta = ns - \Sigma a_i t_i - \gamma, \quad \beta' = ns' - \Sigma a_i' t_i' - \gamma',$$

denn z. B. β ist die Zahl der Punkte, in denen eine zu x gehörige Curve $\varphi(x, y) = 0$ die C_n noch trifft, und welche nicht in x selbst

liegen, aber alle mit x beweglich sind; und $\Sigma a_i t_i$ ist die Zahl der festen Schnittpunkte der Curve C_s $\varphi = 0$ mit der C_n $f = 0$. Es sei noch bemerkt, dass wir nur die Punkte S_i zu berücksichtigen brauchen, für welche $a_i > 1$, d. h. welche auf $f = 0$ liegen; die übrigen festen Punkte der beiden Curvensysteme kommen im Folgenden nicht weiter in Betracht.

Selbstverständlich hätten wir auch die y_i als Parameter, welche an die Bedingung $f(y) = 0$ geknüpft sind, und die x_i als Punktcoordinaten betrachten können. Dann stellen uns die Gleichungen (3) zwei Curvensysteme r^{ter} bez. r'^{ter} Ordnung dar. Letzteren mögen die festen Ausnahmepunkte $R_1, R_2, \ldots R_\sigma$ und $R_1', R_2', \ldots R'_{\sigma'}$ zukommen, und diesen Punkten entsprechend den zu S_i gehörigen Zahlen a_i, t_i die Zahlen α_i, τ_i, α_i', τ_i'; dann haben wir auch die Gleichungen:

$$(12) \qquad \alpha = nr - \Sigma \alpha_i \tau_i - \gamma, \quad \alpha' = nr' - \Sigma \alpha'_i \tau_i' - \gamma'.$$

Um nun *die Ordnung der Curve* $\mathsf{M}_y = 0$ zu bestimmen, welche vermöge $f = 0$ durch die beiden Curvensysteme s^{ter} und s'^{ter} Ordnung erzeugt wird (p. 722), stellen wir auf folgendem Wege eine Correspondenz zwischen den Punkten einer beliebigen Geraden her, analog der früher für die Curve $M = 0$ benutzten (p. 723). Die Zahl der Curven C_s $\varphi(x, y) = 0$, welche durch einen beliebigen Punkt z der Ebene gehen, ist gleich der Zahl der gemeinsamen von z abhängenden (d. i. nicht in feste Ausnahmepunkte S_i fallenden) Lösungen der Gleichungen $\varphi(x, z) = 0$ und $f(x) = 0$, und sie ist für alle Punkte der Ebene dieselbe, mit alleiniger Ausnahme der gemeinsamen festen Punkte des Systems der Curven C_s. Diese Zahl kennen wir aber für den Fall, dass z auf $f = 0$ liegt; dann ist sie nämlich nach (12) gleich $\gamma + \alpha$. Folglich ist sie immer gleich $\gamma + \alpha$.*). Jede der entsprechenden $\gamma + \alpha$ Curven C_s schneidet f in *einem* bestimmten Punkte γ-fach, und in letzterem hat *eine* bestimmte Curve $C_{s'}$ (die zu ihm vermöge $\varphi' = 0$ gehörige) einen γ'-fachen Schnittpunkt mit f. Einem beliebigen Punkte z auf einer festen Geraden sind dadurch auch $\gamma + \alpha$ Curven $C_{s'}$ zugeordnet; und dieselben schneiden auf jener Geraden $s'(\gamma + \alpha)$ Punkte z' als dem Punkte z entsprechende aus. Es entsteht so eine Correspondenz $(s'(\gamma + \alpha), s(\gamma' + \alpha'))$. Ihre Coincidenzen sind diejenigen Punkte der festen Geraden, durch welche „*zwei zusammengehörige*“ *Curven* C_s und $C_{s'}$ (d. i. zu demselben Punkte

---

*) Diese schon mehrfach angewandte Methode (z. B. bei den Sätzen auf p. 414), durch specielle, leicht übersehbare Fälle hinsichtlich der Anzahl von Lösungen das allgemeine Resultat zu bestimmen, ist neuerdings geradezu als *Princip der speciellen Lage* bezeichnet und in sehr ausgedehnter Weise verwerthet; vgl. Schubert: Göttinger Nachrichten, 1874, p. 274 und Math. Annalen, Bd. 10.

von f vermöge (3) gehörige) sich schneiden, also die Schnittpunkte der festen Geraden mit $\mathsf{M}_y = 0$. Da unter diesen noch die n Schnittpunkte mit f enthalten sind, so wird schliesslich *die Ordnung der Curve* $\mathsf{M}_y = 0$ *gleich*

$$(13) \qquad \mu_y = s'(\gamma + \alpha) + s(\gamma' + \alpha') - \Gamma n$$
$$= n(rs' + sr') - s'\Sigma\alpha_i\tau_i - s\Sigma\alpha_i'\tau_i' - \Gamma n,$$

wo Γ *eine noch zu bestimmende Zahl bedeutet.**)

Wir untersuchen ferner das Verhalten der Curve $\mathsf{M}_y = 0$ in den Punkten S_i und S_i' (vgl. p. 723 und p. 726). Wir haben hier folgende Fälle zu unterscheiden:

a) Der Punkt S ist nicht zugleich ein Punkt S',

b) Der Punkt S ist zugleich ein Punkt S'.

Im Falle *a*) gibt es $\gamma' + \alpha'$ bestimmte Curven $C_{s'}$, welche durch S gehen, unter ihnen γ'-fach zählend die zu S' selbst gehörige $C_{s'}$. Es gibt aber auch $\gamma' + \alpha'$ Curven C_s, welche mit ihnen zusammengehören (p. 727). Für jedes Paar solcher zusammengehörigen Curven**) liegen t Schnittpunkte im Punkte S, während dies für ein beliebiges Paar von zusammengehörigen Curven C_s, $C_{s'}$ nicht Statt findet, so dass diese t Schnittpunkte jedenfalls unter den beweglichen, die Curve $\mathsf{M}_y = 0$ beschreibenden Punkten mit zu zählen sind. Während sie also für ein benachbartes Paar noch auf $\mathsf{M}_y = 0$ getrennt liegen, rücken sie für das hier betrachtete Curvenpaar alle nach S, d. h. durch S gehen t Zweige von $\mathsf{M}_y = 0$. *In einem gemeinsamen t-fachen Punkte S der Curven C_s, der nicht ein Punkt S' ist, wird die Vielfachheit von* $\mathsf{M}_y = 0$ *gleich*

$$(14) \qquad \nu_y = t(\alpha' + \gamma');$$

und ebenso in einem gemeinsamen t'-fachen Punkte S' der $C_{s'}$ gleich

$$(14^*) \qquad \nu_y' = t'(\alpha + \gamma).$$

Im Falle *b*) bestimmen wir die Zahl ν_y mittelst einer Correspondenz, welche zwischen den Strahlen des durch S_i gehenden Büschels ganz ebenso durch die beiden Curvensysteme (3) begründet wird, wie

---

*) Es wird sogleich noch gezeigt werden, dass Γ die Zahl der in $x = y$ auf $f = 0$ liegenden Schnittpunkte zweier „zusammengehörigen" Curven φ, φ' ist, so dass der Ort der Schnittpunkte solcher Curvenpaare durch die Curve $\mathsf{M}_y = 0$ *zusammen* mit $f^\Gamma = 0$ gegeben wird.

**) Die zu der dem Punkte S selbst entsprechenden $C_{s'}$ gehörige C_s wird allerdings unbestimmt; statt derselben hat man die einem benachbarten Punkte entsprechende C_s zu nehmen; für das so entstehende Curvenpaar liegen dann noch Γ weitere Schnittpunkte zu S benachbart, dem entsprechend, dass auch $f = 0$ Γ-fach zählend ein Theil der betrachteten Ortscurve ist.

oben im Beispiele durch die beiden Curvenbüschel. Es ist dies eine Correspondenz

$$(t_i' (\gamma + \alpha), \quad t_i (\gamma' + \alpha')) .$$

Von den Coincidenzen fallen Γa_i in die Tangenten des a_i-fachen Punktes, welchen $f = 0$ in S_i besitzt. Die Coincidenzen dieser Correspondenz nämlich beziehen sich überhaupt auf den Ort der Schnittpunkte je zweier zusammengehörigen Curven C_s, $C_{s'}$ unserer beiden ∞^1-Systeme; dieser Ort aber besteht aus der Curve M_y *und* aus der Curve f, wobei letztere Γ-fach zu zählen ist, wenn Γ *bewegliche Schnittpunkte zweier Curven einer solchen Correspondenz in demjenigen Punkte von f liegen, welcher eben die gegenseitige Zuordnung beider Curven vermittelt.**) Hieraus erhellt gleichzeitig auch die Bedeutung der Zahl Γ in (13). Die zuletzt gewonnene Correspondenz dagegen gibt uns den Satz:

In einem Punkte S_i (oder S_i'), welcher gemeinsamer t_i-facher Punkt der C_s, gemeinsamer t_i'-facher Punkt der $C_{s'}$ und a_i-facher Punkt von f ist, hat die Curve M_y einen singulären Punkt, dessen Vielfachheit gegeben ist durch die Zahl

$$\nu_y^{(i)} = t_i' (\gamma + \alpha) + t_i (\gamma' + \alpha') - \Gamma a_i . \tag{15}$$

Ganz entsprechend hat man für die Curve $\mathsf{M}_x = 0$ (p. 722) aus (13), (14), (14*), (15) die Zahlen:

$$\mu_x = r' (\gamma + \beta) + r (\gamma' + \beta') - \Gamma n \tag{16}$$

$$= n (rs' + sr') - r' \Sigma a_i t_i - r \Sigma a_i t_i' ,$$

$$\nu_x = \tau (\beta' + \gamma') , \quad \nu_x' = \tau' (\beta + \gamma) , \tag{17}$$

$$\nu_x^{(i)} = \tau_i' (\gamma + \beta) + \tau_i (\gamma' + \beta') - \Gamma \alpha_i . \tag{18}$$

Die weiteren Untersuchungen, welche wir an diese Abzählungen knüpfen wollen, (insbesondere auch die Bestimmung der Zahl Γ) gestalten sich nun verschieden, je nachdem der γ- bez. γ'-werthige Punkt der Correspondenzen (3) in $x = y$ durch Berührung mit der Grundcurve entsteht oder nicht; und zwar wollen wir hier zunächst drei Hauptfälle unterscheiden:

1) er entsteht in φ und φ' durch einen vielfachen Punkt der Curven C_s und $C_{s'}$ in $x = y$;
2) er entsteht in φ und φ' durch Berührung mit f;
3) seine Entstehung ist in φ und φ' verschieden bedingt.

Diese Fälle sollen nach einander behandelt, und für sie die Formel für $(\varphi\varphi')$ jedes Mal näher untersucht werden. Dabei soll die Curve

*) Vorausgesetzt ist hier wie im Folgenden, dass zwei zu demselben Punkte x von f gehörige Curven $\varphi(x, y) = 0$, $\varphi'(x, y) = 0$ sich ausser in x selbst *nicht* mehr in einem *mit x beweglichen* Punkte von f schneiden. — Es ist ferner immer ausgeschlossen, dass beiden Curvensystemen eine Curve gemeinsam sei.

$f=0$ *nur mit einfachen Doppelpunkten*, nicht mit Rückkehr- oder höheren vielfachen Punkten begabt angenommen werden; *die Zahlen* a_i, α_i *können dann nur den Werth* 1 *oder* 2 *annehmen.*

1) Wir betrachten also zuerst den Fall, wo *der mehrwerthige Punkt in* $x=y$ *bei beiden Correspondenzen durch einen vielfachen Punkt der zu* x *bez.* y *gehörenden Curven bedingt ist.**) Die ersteren bezeichnen wir wieder mit C_s, $C_{s'}$, die letzteren mit C_r, $C_{r'}$. In jedem Punkte x von f liegen hier $\gamma\gamma'$ Schnittpunkte der beiden zu x gehörigen Curven C_s, $C_{s'}$, wenn wir annehmen, dass die γ Tangenten der ersteren in x von den γ' Tangenten der anderen verschieden sind. Nach einer früheren Bemerkung (p. 729) *haben wir also in den Formeln* (13)—(18) $\Gamma=\gamma\gamma'$ *zu setzen.*

Von den Punktepaaren x-y nun, welche gleichzeitig beiden Correspondenzen (3) genügen, werden die Punkte y offenbar durch $M_y=0$ auf $f=0$ ausgeschnitten (vgl. auch p. 721 und p. 722), die zugehörigen Punkte x durch die Curve $M_x=0$, denn für jeden solchen Punkt x liegt ein weiterer Schnittpunkt zweier zusammengehörigen Curven C_s, $C_{s'}$ auf f. Die Gleichung $M_y=0$ ist also das Resultat der Elimination der x_i aus den Gleichungen (3) und aus $f(x)=0$; vorausgesetzt, dass man in diesem Resultate zuvor gewisse uneigentliche Factoren absondert; denn dasselbe würde an und für sich von der Ordnung $n(rs'+sr')$ in den y werden. Unter diesen Factoren ist zunächst, da $\Gamma=\gamma\gamma'$, die Curve f selbst $\gamma\gamma'$-fach enthalten (p. 729). Die *Bestimmung der übrigen Factoren* erfordert die Berücksichtigung und besondere Behandlung sehr vieler einzelnen Fälle, so dass eine vollständige Erledigung derselben uns hier zu weit führen würde. Man wird diese Bestimmung im Anschlusse an die folgenden Ueberlegungen aber leicht in jedem Falle ausführen.

Die fraglichen Factoren können nur von den Ausnahmepunkten der Correspondenzen (3) abhängen, denn durch diese ist ja ihr Auftreten bedingt. Wie dies im Einzelnen geschieht, mag nur an folgendem Beispiele erläutert werden.

Die einem *einfachen* Punkte S_i von f, welcher gemeinsamer t_i-facher Punkt der Curven C_s und τ_i-facher Punkt der Curven C_r dagegen nicht gleichzeitig ein Punkt S' ist, entsprechende Curve C_s wird unbestimmt. Zu S_i gehört dagegen eine ganz bestimmte Curve $C_{s'}$, deren Gleichung $\varphi'_s=0$ sei; und somit kann *jeder* Punkt dieser Curve $\varphi_{s'}=0$ als Schnittpunkt von $\varphi_{s'}$ mit der zu $\varphi_{s'}$ gehörenden Curve C_s aufgefasst werden, d. h. die Curve $\varphi_{s'}$ ist ein Theil des Ortes der übrigen (nicht auf f liegenden) Schnittpunkte zweier zusammengehörigen Curven φ, φ'; und zwar ist dieselbe als solcher nach

*) Vgl. dazu das in der zweiten Anmerkung auf p. 456 Gesagte.

Gleichung (13) τ_i-fach zu zählen (indem $\alpha_i = 1$). Wir haben also den Satz, dass in dem Resultate der Elimination der x_i aus den Gleichungen (3) und aus $f(x) = 0$ der Factor $(\varphi_{\varsigma}')^{\tau_i}$ enthalten ist. Die Schnittpunkte von $\varphi_{\varsigma}' = 0$ mit $\mathsf{M}_y = 0$ sind dann die Schnittpunkte von $\varphi_{\varsigma}' = 0$ mit der einem zu S benachbarten Punkte von f entsprechenden Curve C_s. Analog hat man den Fall zu behandeln, wo S zugleich ein Punkt S' ist, etc. Ist dagegen S Doppelpunkt von f, so gibt es zu S zwei verschiedene benachbarte Punkte, folglich auch zwei verschiedene benachbarte Curven C_s, und somit ist hier φ_{ς}' $2\tau_i$-fach zu zählen, wie es Gleichung (13) verlangt.

Weiter würde man die Fälle zu unterscheiden haben, wo Punkte S nicht zugleich Punkte R sind (p. 727) und umgekehrt etc. Wir unterlassen jedoch hier diese Ausführungen und geben im Folgenden nur noch in Kurzem eine Uebersicht darüber, wie diese Resultate weiter zu verwerthen sind.*)

Wenn von den Schnittpunkten y zweier zu demselben Punkte x gehörigen Curven C_s, $C_{s'}$ ein weiterer auf f liegt, so bildet derselbe zusammen mit x ein Punktepaar, welches gleichzeitig den Correspondenzen (3) genügt; ein solches Paar zählen wir jedoch unter den gesuchten nicht mit, wenn y an x selbst heranrückt. Die Zahl jener Paare ist daher gleich der Zahl der (nicht in festen Punkten der φ, φ' oder in Doppelpunkten von f liegenden) Schnittpunkte von f mit M_y, *vermindert um die Zahl derjenigen Punkte, in welchen ein Zweig der zu x gehörenden Curve C_s einen Zweig der zu x gehörenden Curve $C_{s'}$ berührt.* Letztere Punkte denken wir uns auf $f = 0$ durch eine Curve $\mathsf{X}_y = 0$ ausgeschnitten, deren Ordnung leicht zu bestimmen ist. Nehmen wir dann zunächst an, dass keine Ausnahmepunkte in den Correspondenzen und keine Doppelpunkte von f vorkommen, so wird

$$(19) \qquad \mathsf{M}_y = \mathsf{X}_y \,.\, \mathsf{K}_y + Af,$$

wo nun K_y *die Curve ist, welche die Punkte y der gesuchten Paare x-y auf f ausschneidet.* Nun ist uns die Zahl der Schnittpunkte der letzteren mit f bekannt (p. 446), denn diese ist gleich $(\varphi\varphi')$; und somit ergibt sich, da die Ordnung von M_y durch (13) gegeben ist, für die Ordnung von X_y die Zahl:

$$(20) \qquad \begin{aligned} \chi_y &= \mu_y - \frac{1}{n}(\varphi\varphi') \\ &= \gamma'(r+s) + \gamma(r'+s') - 3\gamma\gamma'. \text{**)} \end{aligned}$$

---

*) Auf einen dieser Fälle kommen wir noch unter 2) zurück (p. 738).

**) Diese Zahl kann man auch leicht direct finden. Setzt man nämlich:

$$\varphi(x, y) = \alpha_x^{\ r}\beta_y^{\ s}, \qquad \varphi'(x, y) = a_x^{\ r'} b_y^{\ s'},$$

Für die Ordnung von $\mathsf{K}_y = 0$ haben wir also die Zahl

(21) $k_y = n(rs' + sr') - \gamma(r' + s') - \gamma'(r + s) - \gamma\gamma'(n-3)$

und es wird:

(22) $$(\varphi\varphi') = nk_y = \alpha\beta' + \beta\alpha' - 2\gamma\gamma' p,$$

wenn $p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$.

Die Ausdrücke M_y, X_y, K_y und A sind simultane Functionalinvarianten der Grundformen f, $\varphi(x, y)$, $\varphi'(x, y)$, und die Gleichung (19) gibt eine zwischen ihnen bestehende Relation an.*) Eine solche aber kann nicht geändert werden, wie auch die Coëfficienten der Grundformen variirt werden mögen; insbesondere also muss sie auch bestehen, wenn wir auf der Curve f durch solche Variationen Doppelpunkte entstehen lassen, ein Fall, den wir zuerst betrachten wollen. Und zwar wollen wir die nicht in Doppelpunkte fallenden Schnittpunkte von $\mathsf{K}_y = 0$ mit $f = 0$ bestimmen.

Da wir den Correspondenzen φ, φ' noch keine Ausnahmepunkte beilegen, so entsprechen diesem Doppelpunkte zwei ganz bestimmte Curven C_s, $C_{s'}$, von deren Schnittpunkten in ihm $\gamma\gamma'$ liegen, wie in einem beliebigen Punkte von f. Die Curve M_y geht also nicht durch den Doppelpunkt, folglich wegen (19) auch nicht die Curven X_y und K_y. Die Zahl der gesuchten Punktepaare ist daher wieder gleich nk_y, d. h. gleich

(23) $$\alpha\beta' + \beta\alpha' - 2\gamma\gamma' p - 2\gamma\gamma' d,$$

wenn d Doppelpunkte auf f vorhanden sind, und wenn $p = \frac{1}{2}(n-1)$. $(n-2) - d$ das Geschlecht von f bedeutet. *Gehen also die Curven C_s, $C_{s'}$ durch d Doppelpunkte von f nicht hindurch, so ist der auf* p. 446 *gefundene Werth für $(\varphi\varphi')$ um $2d\gamma\gamma'$ zu erniedrigen, wenn man unter p das Geschlecht von f verstehen will.*

Wir wollen nun weiter auch die Constanten der Correspondenzen φ und φ' variiren und dadurch auf f Ausnahmepunkte erzeugen. Wir betrachten jedoch auch wieder nur einzelne Fälle, die für spätere Anwendungen nöthig sind. Es möge zunächst φ' noch unverändert

---

so entsteht die Curve $\mathsf{X}_y = 0$ durch Elimination der dx_i aus den Gleichungen:

$$\alpha_x^{r}\beta_x^{s-\gamma}\beta_{dx}^{\gamma} = 0, \qquad a_x^{r'} b_x^{s'-\gamma'} b_{dx}^{\gamma'} = 0, \qquad k_{dx} = 0,$$

wenn $k_x = 1$. Aus dem Resultate, welches unabhängig von den k_i sein muss, lässt sich ein Factor $k_x^{\gamma\gamma'}$ absondern; es bleibt dann in der That ein Ausdruck von der Ordnung (20). So kann man also auch umgekehrt die Zahl $(\varphi\varphi')$ direct ableiten.

*) Dass in (19) als Coëfficient von M_y oder K_y nicht noch eine eigentliche simultane Invariante auftreten kann, erkennt man durch eine ähnliche Ueberlegung, wie sie auf p. 471 angestellt wurde.

bleiben, dagegen ein einfacher Punkt S von f (mit den Coordinaten x_i) gemeinsamer t-facher Punkt der C_s, τ-facher Punkt der $C_{s'}$ werden. Wir kennen das Verhalten von M_y in x nach (14); das Verhalten von X_y bestimmt sich in folgender Weise. Es verschwindet dann $\varphi(x, x)$ jedenfalls $(t + \tau)$-fach, d. h. die zu einem benachbarten Punkte von x gehörige Curve φ hat in x einen $(t + \tau)$-fachen Punkt. Es fallen also $(t + \tau)\gamma'$ Schnittpunkte der letzteren mit der zu x gehörigen Curve φ' in den Punkt x, d. h. *die Vielfachheit von* $\mathsf{X}_y = 0$ *in einem gemeinsamen t-fachen Punkte der* φ *ist gleich*

$$(t + \tau)\gamma' . \tag{24}$$

Haben gleichzeitig die φ' in x einen t'-fachen Punkt, so deformiren wir die Correspondenz $\varphi'(x, y)$ zunächst so, dass dieser t'-fache Punkt von x getrennt, aber noch auf f — sagen wir in y — liegt; dann verschwindet X_y von der Ordnung $(t + \tau)\gamma'$ in x und von der Ordnung $(t' + \tau')\gamma$ in y. Fällt nun x mit y zusammen, so liegen in x $(t + \tau)\gamma' + (t' + \tau')\gamma$ Schnittpunkte der beiden zu $x + dx$ gehörigen Curven φ, φ'. Da aber für *je* zwei zusammengehörige Curven φ, φ' $\gamma\gamma'$ Schnittpunkte in $x = y$ liegen, so ist die Zahl der neu hinzugetretenen Schnittpunkte, d. h. *die Vielfachheit von* $\mathsf{X}_y = 0$ *in einem gemeinsamen t-fachen Punkte der* φ *und t'-fachem Punkte der* φ' *gleich*

$$(t + \tau)\gamma' + (t' + \tau')\gamma - \gamma\gamma' . \tag{25}$$

An Stelle von M_y in (19) tritt nun im ersten Falle nach den obigen Ausführungen (p. 731) das Product $\mathsf{M}_y(\varphi s')^\tau$, so dass die Gleichung (19) übergeht in:

$$\mathsf{M}_y(\varphi s')^\tau = \mathsf{X}_y \,.\, \mathsf{K}_y + Af . \tag{26}$$

Im zweiten Falle dagegen erhalten wir:

$$\mathsf{M}_y(\varphi' s)^\tau (\varphi s)^{\tau'} = \mathsf{X}_y \,.\, \mathsf{K}_y + Af \tag{27}$$

wenn $\varphi s = 0$, $\varphi' s = 0$ die beiden einem zu S benachbarten Punkte von f zugehörenden Curven C_s, $C_{s'}$ sind. Ebenso wird, wenn mehrere Punkte S der Art vorkommen, auf der linken Seite von (19) neben M_y ein Product Π_y auftreten, dessen einzelne Factoren von der Form $(\varphi s')^\tau \ldots$ sind. Die gesuchten Punkte y werden also nicht mehr durch die Curve $\mathsf{K}_y = 0$ allein ausgeschnitten, sondern diese Curve geht auch durch die Schnittpunkte von $\Pi_y = 0$ mit $f = 0$. *Nur die nicht in singulären Punkten liegenden Verschwindungs-Punkte des Quotienten*

$$\Lambda_y = \frac{\mathsf{K}_y}{\Pi_y} = \frac{\mathsf{M}_y}{\mathsf{X}_y} \tag{28}$$

geben uns jetzt die Punkte y der gesuchten Paare x-y. Die zuge-

hörigen Punkte x sind die Verschwindungs-Punkte eines entsprechend zu bildenden Quotienten:

$$(29)\qquad \Lambda_x = \frac{K_x}{\Pi_x} = \frac{M_x}{X_x}.$$

Die Zahl dieser Verschwindungs-Punkte wollen wir noch für die in den Formeln (24) und (25) berücksichtigten Fälle bestimmen. Im ersten Falle, wo also ein Ausnahmepunkt S mit den charakteristischen Zahlen t, τ auftritt, verschwindet wegen (14), (24) und (28) der Quotient Λ_y in diesem von der Ordnung:

$$(30)\qquad t(\alpha' + \gamma') - (t + \tau)\gamma' = t\alpha' - \tau\gamma';$$

die Zahl der einfachen Verschwindungs-Punkte dieses Quotienten ist sonach

$$(31)\qquad \begin{aligned} &n(\mu_y - \chi_y) - t\alpha' + \tau\gamma' \\ &= n\{n(rs' - sr') - \tau s' - \gamma\gamma' n\} - n\{\gamma'(r+s) + \gamma(r'+s') - 3\gamma\gamma'\} - t\alpha' + \tau\gamma' \\ &= \alpha\beta' + \beta\alpha' - \gamma\gamma'(n-1)(n-2), \end{aligned}$$

wenn wieder: $\alpha = nr - \tau - \gamma$, $\beta = ns - t - \gamma$, $\alpha' = nr' - \gamma'$, $\beta' = ns' - \gamma'$. *Die resultirende Zahl wird also durch den festen Punkt S nicht beeinflusst.*

Ist S dagegen zugleich ein Punkt S', so verschwindet wegen (15), (25) und (28) der Quotient Λ_y in S von der Ordnung

$$(32)\qquad \begin{aligned} &t'(\alpha + \gamma) + t(\alpha' + \gamma') - \gamma\gamma' - (t + \tau)\gamma' - (t' + \tau')\gamma + \gamma\gamma' \\ &= t\alpha' + t'\alpha - \tau\gamma' - \tau'\gamma.\text{*)} \end{aligned}$$

Und *die Zahl der einfachen Schnittpunkte von $\Lambda_y = 0$ mit $f = 0$ wird wieder gleich*

$$(33)\qquad \begin{aligned} &n(\mu_y - \chi_y) - t\alpha' - t'\alpha + \tau\gamma' + \tau'\gamma \\ &= \alpha\beta' + \beta\alpha' - \gamma\gamma'(n-1)(n-2) \end{aligned}$$

wo nun:

$$\alpha = nr - \tau - \gamma,\quad \beta = ns - t - \gamma$$
$$\alpha' = nr' - \tau' - \gamma',\quad \beta' = ns' - t' - \gamma'.$$

In ganz analoger Weise lässt sich ferner nachweisen, dass auch für Doppelpunkte von f, durch welche die Curven C_s, C_r, $C_{s'}$, $C_{r'}$ hindurchgehen, die Zahl $(\varphi\varphi')$ in der Form erscheint

$$(\varphi\varphi') = \alpha\beta' + \beta\alpha' - 2\gamma\gamma'(p + d'),$$

wenn man unter p das Geschlecht von f versteht und unter d' die Zahl derjenigen Doppelpunkte von f, welche nicht Ausnahmepunkte der Correspondenzen sind. Das gewonnene Resultat werden wir nach

---

*) Diese Zahl stimmt mit der von Brill in anderer Weise abgeleiteten überein: Math. Annalen, Bd. 6, p. 46.

kurzer Erörterung der beiden noch übrigen (auf p. 729 erwähnten) Fälle in einem Satze zusammenfassen.

2) Wir nehmen zweitens an, dass *der γ- bez. γ'-werthige Punkt in $x = y$ bei beiden Correspondenzen durch Berührung entsteht.* Dieser Fall ist dadurch von Interesse, dass wir nach den früheren Betrachtungen über die Natur solcher Correspondenzen weit bestimmtere Angaben machen können, als im vorigen Falle. Die beiden Correspondenzen nämlich können wir dann in folgender Form gegeben annehmen (vgl. p. 472):

$$(34)\quad \begin{aligned} \varphi(x, y) &\equiv \Phi_0(x) \cdot \varphi_0(y) + \Phi_1(x) \cdot \varphi_1(y) + \cdots + \Phi_\gamma(x) \cdot \varphi_\gamma(y) = 0 \\ \varphi'(x, y) &\equiv \Phi_0'(x) \cdot \varphi_0'(y) + \Phi_1'(x) \cdot \varphi_1'(y) + \cdots + \Phi_{\gamma'}'(x) \cdot \varphi_{\gamma'}'(y) = 0, \end{aligned}$$

wo $\Phi_0 = 0$ diejenige Curve ist, welche die Berührungspunkte der $(\gamma - 1)$-punktig berührenden Curven s^{ter} Ordnung der Schaar

$$\lambda_1 \varphi_1(y) + \lambda_2 \varphi_2(y) + \cdots + \lambda_\gamma \varphi_\gamma(y) = 0$$

auf $f = 0$ ausschneidet, und wo die übrigen Curven $\Phi_i = 0$, $\Phi_i' = 0$ in entsprechender Weise definirt sind. Hier ist die Ordnung r der Curven Φ, so wie die Vielfachheit derselben in den gemeinsamen Punkten der φ und in den Doppelpunkten von f durch das Verhalten der Curven φ vollständig gegeben. In der That kann die Bestimmung von r durch s in folgender Weise geschehen.*) Die Coincidenzcurve einer Correspondenz $\varphi(x, y) = 0$ ist nach p. 452 von der Ordnung

$$r + s + \gamma(n - 3).$$

Insbesondere also für $\gamma = 1$, $r = s$ die Coincidenzcurve der Correspondenz

$$\varphi_0(x)\, \varphi_1(y) - \varphi_1(x)\, \varphi_0(y) = 0$$

von der Ordnung $2s + n - 3$. Für $\gamma = 2$ ist daher in der Correspondenz (vgl. p. 456):

$$\Phi_0(x) \cdot \varphi_0(y) + \Phi_1(x) \cdot \varphi_1(y) + \Phi_2(x) \cdot \varphi_2(y) = 0$$

die Ordnung r der Φ gleich $2s + n - 3$, und also die Ordnung der Coincidenzcurve gleich $3(s + n - 3)$; hieraus findet man ebenso die Ordnung der Coincidenzcurve bei $\gamma = 3$ gleich $4[s + \frac{3}{2}(n - 3)]$, u. s. f. *Allgemein wird die Ordnung der Coincidenzcurve gleich*

$$(35)\quad (\gamma + 1)\left\{s + \tfrac{1}{2}(n - 3)\gamma\right\},$$

Nun sind die Curven r^{ter} Ordnung $\Phi_i = 0$ in (34) Coincidenzcurven einer Correspondenz mit $(\gamma - 1)$-werthigem Punkte in $x = y$, und daher:

$$(35^*)\quad r = \gamma\left\{s + \tfrac{1}{2}(n - 3)(\gamma - 1)\right\}.$$

*) Vgl. auch die Anmerkung auf p. 471.

Wir haben ferner gesehen (p. 455), dass in jedem einfachen Punkte von f, in welchem σ feste Schnittpunkte der Curven φ_i liegen, $\gamma\sigma$ Schnittpunkte der Curven Φ_i liegen, ohne jedoch darauf Rücksicht zu nehmen, ob die Curven φ daselbst einen gemeinsamen σ-fachen Punkt haben, oder ob sie die Curve f daselbst $(\sigma-1)$-punktig berühren, während wir bei Aufstellung der Zahl $\nu_y^{(i)}$ in (15) ausdrücklich ersteres annahmen. Die Zahl (15) ist aber auch für den letzteren Fall richtig. Für einen einfachen Punkt S_i von f (d. i. $a_i = 1$) nämlich möge $t_i = 1$ sein, und die φ' mögen daselbst einen gemeinsamen t_i'-fachen Punkt haben, dann ist die Vielfachheit der Curve $\mathsf{M}_y = 0$ gegeben durch:

$$\nu_y^{(i)} = t_i' (\gamma + \alpha) + \gamma' + \alpha' - \Gamma .$$

Gehen nun die φ auch noch sämmtlich durch $t_i - 1$ zu S_i benachbarte Punkte von f, so ist für jeden von diesen $t_i' = 0$, und in jedem ist also die Vielfachheit von $\mathsf{M}_y = 0$ gleich $\gamma' + \alpha'$; *im Ganzen ist daher die Vielfachheit von* $\mathsf{M}_y = 0$ *in* S_i *in der That gegeben durch die Zahl:*

$$\nu_y^{(i)} = t_i' (\gamma + \alpha) + t_i (\gamma' + \alpha') - \Gamma .$$

Analoges gilt, wenn gleichzeitig die φ' in S_i die Grundcurve $(t'-1)$-punktig berühren; und ebenso erledigt sich diese Frage für einen Doppelpunkt von f (d. i. $a_i = 2$). In letzterem Falle haben wir nur σ durch $2t_i$ zu ersetzen; dann gibt die Zahl $\gamma(\sigma + \gamma - 1)$ wieder die Zahl der in einem solchen liegenden festen Schnittpunkte der Φ.

Die Zahlen τ_i, τ_i' *in obigen Formeln sind also für einen einfachen Punkt von* f*:*

(36) $$\tau_i = t_i \gamma , \quad \tau_i' = t_i' \gamma' ,$$

für einen Doppelpunkt von f*:*

(37) $$\tau_i = \gamma t_i + \tfrac{1}{2}\gamma(\gamma - 1), \quad \tau_i' = \gamma' t_i' + \tfrac{1}{2}\gamma'(\gamma' - 1) .$$

Nehmen wir nun zunächst an, dass $\gamma' > \gamma$. Von den Schnittpunkten je zweier in demselben Punkte x von f $(\gamma-1)$- bez. $(\gamma'-1)$-punktig berührenden Curven liegen γ Punkte zu x benachbart auf f; *es ist daher (vgl. p. 729) in den Formeln* (13)—(18) $\Gamma = \gamma$ *zu nehmen.*

Die Bestimmung der in dem Eliminationsresultate der x aus (34) und aus $f(x) = 0$ neben M_y und f^γ auftretenden Factoren gestaltet sich ganz wie im vorigen Falle und braucht nicht noch einmal erörtert zu werden.

Ein besonderes Verhalten dagegen zeigt hier die für Aufstellung der Gleichung (19) wichtige Curve $\mathsf{X}_y = 0$, welche auf $f = 0$ diejenigen Punkte x ausschneidet, für die ein $(\gamma + 1)^{\text{ter}}$ Schnittpunkt zweier zusammengehörigen Curven C_s, $C_{s'}$ nach x zurückfällt. Da wir aber

$\gamma' > \gamma$ voraussetzen, so muss dann dieser $(\gamma + 1)^{\text{te}}$ Schnittpunkt auch auf der Curve f liegen; und dies tritt nur ein, entweder wenn eine Curve C_s γ-punktig berührt (wo dann $\gamma + 1$ consecutive Punkte gemeinsam sind), also in den Coincidenzpunkten der ersten Correspondenz (34), oder wenn eine Curve φ' in x einen Doppelpunkt hat, wo dann nur γ gemeinsame consecutive Punkte auftreten, von letzteren aber einer als Schnittpunkt von φ und φ' doppelt zählt. Die Punkte der ersteren Art, *von denen jeder γ'-fach zu zählen ist**), werden nach (35) durch eine Coincidenzcurve $L_\gamma = 0$ der Ordnung $(\gamma + 1) \cdot \left\{s + \frac{1}{2}(n-3)\gamma\right\}$ auf f ausgeschnitten; die Punkte der letzteren Art, *von denen jeder γ-fach zählt*, durch eine Curve, welche sich in folgender Weise bestimmt**). Aus der zweiten Gleichung (34) muss sich für $x = y$ ein Factor f absondern, so dass man hat:

$$(38) \qquad \Phi_0'(x) \cdot \varphi_0'(x) + \ldots + \Phi_{\gamma'}'(x) \cdot \varphi_{\gamma'}'(x) = \Psi' \cdot f.$$

Für die Schnittpunkte von Ψ' mit f verschwindet also die linke Seite dieser Gleichung quadratisch, d. h. die zu einem dieser Schnittpunkte gehörige Curve φ' hat in ihm einen Doppelpunkt; und also werden die erwähnten Punkte der zweiten Art ausgeschnitten durch die Curve $\Psi' = 0$, für deren Ordnung man aus (38) die Zahl findet:

$$(39) \quad \psi' = r' + s' - n = (\gamma' + 1)\, s' + \tfrac{1}{2}\gamma'(\gamma' - 1)(n-3) - n\,.$$

Nehmen wir nun zunächst wieder an, dass f keine Doppelpunkte habe, und dass keine gemeinsamen festen Punkte der C_s oder $C_{s'}$ auf f liegen, so tritt hier an Stelle von (19) die Gleichung:

$$(40) \qquad \mathsf{M}_y = (\Psi')^{\gamma}\,(L_\gamma)^{\gamma'} \cdot \mathsf{K}_y + A \cdot f.$$

Die Ordnung von K_y findet man hieraus wie im vorigen Falle wegen (13), (35) und (39) gleich

$$\mu_y - \gamma\psi' - \gamma'(\gamma+1)\left\{s + \tfrac{1}{2}\gamma(n-3)\right\}$$
$$(41) \quad = n(rs' + sr') - \gamma(r' + s') - \gamma'(r+s) - \gamma\gamma'(n-3)\,.$$

Die weiteren Untersuchungen gestalten sich nun auch ganz wie im vorigen Falle; man hat nur immer den Ausdruck X durch das Product $(\Psi')^{\gamma}(L_\gamma)^{\gamma'}$ zu ersetzen. Das Verhalten dieses Productes in Ausnahmepunkten der Curve f oder der Correspondenzen (34) ist auch leicht zu bestimmen, da man nach Früherem das Verhalten von L_γ kennt, und da das von Ψ' aus (38) leicht zu entnehmen ist. Die gesuchten Punkte y werden schliesslich wieder durch die einfachen Verschwindungspunkte von Quotienten Λ_y der Form (28), und die zu-

*) Man erkennt dies sofort aus dem auf p. 444 Gesagten.

**) Ausgenommen ist hier immer der Fall $\gamma' = \gamma$. — Vgl. das Beispiel $\gamma' = 2$ auf p. 456, wo Ψ' in die Jacobi'sche Curve der drei Curven φ'_0, φ'_1, φ'_2 übergeht.

gehörigen Punkte x durch die von Quotienten Λ_x der Form (29) gefunden. Für diese Quotienten bleiben dann auch die Zahlen (30) und (32) gültig; man hat in ihnen nur τ, τ' nach (36) und (37) durch t und t' auszudrücken.

Zu bemerken ist nur, dass der Fall, wo sowohl die C_s, $C_{s'}$ als die C_r, $C_{r'}$ durch einen Doppelpunkt von f nicht hindurchgehen, hier nicht vorkommen kann. Denn wenn auch für einen solchen $t = t' = 0$, so haben wir nach (37) doch:

$$\tau_i = \tfrac{1}{2}\gamma(\gamma - 1), \quad \tau_i' = \tfrac{1}{2}\gamma'(\gamma' - 1).$$

Nehmen wir nun an, es sei ein solcher Doppelpunkt S vorhanden, so entsprechen ihm zwei verschiedene Curven C_s: $\varphi_S = 0$, $\varphi_{S'} = 0$ und zwei verschiedene Curven $C_{s'}$: $\varphi_S' = 0$, $\varphi'_{S'} = 0$; und an Stelle von (40) tritt, wenn keine anderen Ausnahmepunkte vorkommen, die Gleichung:

$$\mathsf{M}_y\,(\varphi_S\varphi_{S'})^{\frac{1}{2}\gamma'(\gamma'-1)}\,(\varphi_S'\varphi_{S'}')^{\frac{1}{2}\gamma(\gamma-1)} = (\Psi')^{\gamma}(L_\gamma)^{\gamma'}\,\mathsf{K}_y + Af$$

Aus dieser Identität können wir hier aber nichts schliessen, denn wir kennen das Verhalten von M_y in S noch nicht. Die Zahl der gesuchten Punkte y ist aber gleich der Zahl der Punkte x, welche mit ihnen je ein Paar bilden. Statt M_y können wir also auch den Ausdruck M_x benutzen. Die Vielfachheit des letzteren ist nach (18) in Rücksicht auf (35*):

$$\pi = \tau_i'(\gamma + \beta) + \tau_i(\gamma' + \beta') - 2\gamma =$$
$$= \tfrac{1}{2}\gamma'(\gamma' - 1)(\gamma + \beta) + \tfrac{1}{2}\gamma(\gamma - 1)(\gamma' + \beta') - 2\gamma,$$

wo $\beta = ns - \gamma$, $\beta' = ns' - \gamma'$. Ferner ist nach (40):

$$\mathsf{M}_x = (\Psi')^{\gamma}(L_\gamma)^{\gamma'}\,\mathsf{K}_x + Af. \tag{42}$$

Nun ist die Vielfachheit von L_γ in S gleich $\frac{1}{2}\gamma(\gamma + 1)$, die von Ψ' nach (38) gleich $\frac{1}{2}\gamma'(\gamma' - 1) - 2$. Die Vielfachheit von K_y in S wird daher gegeben durch die Zahl:

$$\varkappa = \pi - \tfrac{1}{2}\gamma'\gamma(\gamma + 1) - \tfrac{1}{2}\gamma\gamma'(\gamma' - 1) + 2\gamma$$
$$= \tfrac{1}{2}\beta\gamma'(\gamma' - 1) + \tfrac{1}{2}\beta'\gamma(\gamma - 1) - \gamma\gamma'.$$

Die Ordnung k_x von K_x ist nach (42) gleich der in (41) gegebenen Zahl, so dass:

$$nk_x = \alpha\beta' + \beta\alpha' - \gamma\gamma'(n-1)(n-2) + \beta'\gamma(\gamma-1) + \beta\gamma'(\gamma'-1) - 2\gamma\gamma'.$$

Die Zahl der einfachen Schnittpunkte von $\mathsf{K}_x = 0$ mit f wird daher

$$= nk_x - 2\varkappa = \alpha\beta' + \beta\alpha' - \gamma\gamma'(n-1)(n-2).^{*)}$$

Auf dieselbe hat also ein solcher Doppelpunkt keinen Einfluss.

---

*) Man kann hieraus umgekehrt das Verhalten von M_y in S bestimmen. Analoges gilt übrigens auch für den unter 1) besprochenen Fall, wo für einen Doppelpunkt $t = 0$ und τ von Null verschieden ist (p. 732).

Eine besondere Erwähnung verlangt noch *der Fall* $\gamma = \gamma'$. Man übersieht leicht, dass auch hier $\Gamma = \gamma$ zu nehmen ist, dass aber ein Zerfallen der Curve $X = 0$ in die Curven $(\Psi')^\gamma = 0$ und $(L_\gamma)^{\gamma'} = 0$ nicht mehr eintritt, sondern Alles symmetrisch bleibt.

3) Endlich mögen hier noch einige Worte über den dritten oben genannten Fall (p. 729) ihre Stelle finden, *in welchem der γ-werthige Punkt von $\varphi(x, y)$ in $x = y$ durch einen γ-fachen Punkt der Curven φ, der γ'-werthige Punkt von $\varphi'(x, y)$ in $x = y$ dagegen durch $(\gamma' - 1)$-punktige Berührung der Curven φ' entsteht.* Hier ist unabhängig davon, ob $\gamma' > \gamma$ oder $< \gamma$, $\Gamma = \gamma$ zu nehmen. Ferner rückt ein weiterer Schnittpunkt der beiden zu x gehörenden Curven φ, φ' an x heran: erstens, wenn in x eine Coincidenz von $\varphi(x, y)$ eintritt, und zweitens, wenn die in x berührende Curve φ in x einen Doppelpunkt hat. An Stelle der Fundamental-Gleichung (19) tritt daher hier die folgende:

$$M_y = \Psi^{\gamma'} . (L_{\gamma'})^\gamma . K_y + Af,$$

wo $L_{\gamma'} = 0$ die Coincidenzcurve von $\varphi'(x, y) = 0$ bedeutet, während Ψ durch Gleichung (38) definirt ist, wenn man darin die gestrichenen Buchstaben mit den nicht gestrichenen vertauscht. Die Bestimmung des Verhaltens der hier auftretenden Curven in den Ausnahmepunkten der Correspondenzen geschieht dann wieder ebenso, wie im Vorhergehenden. —

Die gewonnenen Resultate fassen wir schliesslich, soweit wir dieselben weiterhin noch benutzen werden, zu folgendem Satze zusammen:

Wenn zwei Correspondenzen $(\alpha, \beta)_\gamma$ und $(\alpha', \beta')_{\gamma'}$, welche beliebige (feste) Ausnahmepunkte besitzen mögen, durch zwei Gleichungen $\varphi = 0$, $\varphi' = 0$ gegeben sind, so ist die Zahl der beiden gleichzeitig genügenden und getrennt liegenden Paare x-y gleich

$$(\varphi\varphi') = \alpha\beta' + \alpha'\beta - 2\gamma\gamma'(p + D), \tag{43}$$

wenn es D Doppelpunkte von f gibt, durch welche weder die zu x noch die zu y gehörenden Curven φ, φ' sämmtlich hindurchgehen. Die Punkte y dieser Paare sind dabei die einfachen, *nicht in Ausnahmepunkten liegenden Verschwindungspunkte des Quotienten $\Lambda_y = \frac{K_y}{\Pi}$, wenn Π das bekannte Product bedeutet, welches durch die Ausnahmepunkte bedingt wird und in (26), (27) etc. als Factor von M_y auftritt. Die Vielfachheit von Λ_y ist für einen t- bez. t'-fachen Ausnahmepunkt der zu x in φ bez. φ' gehörenden Curven, welcher einfacher Punkt von f ist, durch die Zahl (25) gegeben (in der auch einzelne der Zahlen t, τ, t', τ' Null sein können). Ebenso sind die zugehörigen Punkte x die einfachen, nicht in Ausnahmepunkten liegenden Verschwindungspunkte eines Quotienten Λ_x.*

— *Im Falle, dass jede der Correspondenzen φ und φ' bei Vertauschung von x mit y ungeändert bleibt, ist jedoch die Zahl der Punktepaare gleich $\frac{1}{2}(\varphi\varphi')$, indem alsdann die Curven $\Lambda_x = 0$ und $\Lambda_y = 0$ zusammenfallen.**) —

Ein solcher Fall der Symmetrie tritt insbesondere in dem Beispiele ein, von welchem wir ausgingen, und in welchem die Curve $M_y - M_x = 0$ durch die Curve $M = 0$ zu ersetzen ist (p. 721 ff.). Hier erhalten wir eine Gleichung der Form:

$$M . \Pi = (\psi_1 \psi_2 \psi_3) . K_y + Af,$$

in der also die Curve X_y an Stelle der Jacobi'schen Curve des betrachteten Netzes getreten ist, und wo Π ein von den festen Punkten der Curven des Netzes abhängender Ausdruck ist. Von der Zahl $\frac{1}{2}(\varphi\varphi')$ hat man hier noch die Zahl $\frac{1}{2}\nu(\nu - 1)$ der auf $\psi_1 = 0$ gelegenen Punktepaare x-y abzuziehen, welche auch beiden Correspondenzen (2) genügen (wo ν die Zahl der beweglichen Schnittpunkte der Curven des Netzes mit f bedeutet). Die Zahl der gesuchten Punktepaare wird also gleich, indem $\alpha = \beta = \alpha' = \beta' = \nu - 1$:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(\varphi\varphi') - \tfrac{1}{2}\nu(\nu - 1) &= \tfrac{1}{2}(\nu - 1)^2 - p - \tfrac{1}{2}\nu(\nu - 1) - D \\ &= \tfrac{1}{2}(\nu - 1)(\nu - 2) - \tfrac{1}{2}(n - 1)(n - 2) + d'', \end{aligned} \tag{44}$$

wenn sämmtliche Curven ψ durch d'' Doppelpunkte von f hindurchgehen; und diese Zahl stimmt mit der auf p. 673 für γ gefundenen in der That überein. —

Die Formel für $(\varphi\varphi')$ wollen wir noch zur Behandlung einiger Beispiele benutzen, die uns theilweise sogleich noch nützlich sein werden; weiterhin gehen wir dann zur Aufstellung einer entsprechenden Formel für drei Correspondenzen über. Diese Beispiele sollen sich auf die Betrachtung *einer von drei Parametern abhängigen linearen Curvenschaar* beziehen**), nämlich:

$$\lambda_1 \varphi_1(x) + \lambda_2 \varphi_2(x) + \lambda_3 \varphi_3(x) + \lambda_4 \varphi_4(x) = 0. \tag{45}$$

Der Einfachheit wegen nehmen wir dabei an, dass alle Curven des Netzes zu f adjungirt seien (d. i. durch die Doppelpunkte von f

---

*) Solche Symmetrie tritt z. B. ein, wenn der γ-fache Punkt der Curven φ in $x = y$ dadurch entsteht, dass die zu x gehörige Curve in γ getrennte Curven zerfällt, wenn man also z. B. ein einfach unendliches System von Curven betrachtet, von denen γ durch jeden Punkt der Ebene gehen. — Die im Texte noch nicht betrachteten Fälle, wo einzelne Zweige des γ-fachen Punktes der Curven φ die Curve f berühren etc., erledigt man durch Combination der für die getrennten Fälle angewandten Methoden.

**) Diese Beispiele sind für die Theorie der Raumcurven von besonderem Interesse; vgl. Brill: Math. Annalen, Bd. 4, p. 522 und Bd. 6, p. 50.

gehen) und ausserdem f noch in M beweglichen Punkten treffen. Die verschiedenen hier abzuleitenden Sätze sind zum Theil auch mit Rücksicht auf später zu behandelnde Probleme ausgewählt, welche dann den Eingangs erwähnten Zusammenhang dieser Erörterungen mit der Theorie der Specialschaaren klar stellen werden. Die einzelnen Beispiele trennen wir von einander durch grosse lateinische Buchstaben.

A) Durch jeden Punkt von f geht ein Netz von Curven der Schaar (45) mit $M - 1$ beweglichen Schnittpunkten; *zu jedem Punkte von f kann man also nach* (44) *noch*

$$N = \tfrac{1}{2} (M - 2)(M - 3) - p \tag{46}$$

Punktepaare finden, so dass durch alle drei Punkte noch einfach unendlich viele Curven der Schaar (45) *gehen.*

B) Es soll die Zahl der in (45) *enthaltenen Curvenbüschel bestimmt werden, deren Curven f in einem Punkte sämmtlich berühren, während noch ein weiterer (beweglicher) Basispunkt auf f liegt.*)* Wir heben zunächst aus der Schaar (45) die Gesammtheit der zweifach unendlich vielen Curven heraus, welche f berühren; und aus dieser ∞^2-Schaar wiederum die beiden ∞^1-Schaaren, welche bez. durch zwei feste Punkte A und B gehen. Durch A und einen beliebigen Punkt von f gehen dann nach der Formel auf p. 460 noch $2(M + p - 2)$ berührende Curven. Die beiden ∞^1-Schaaren geben uns daher auf f zwei Correspondenzen

$$(M - 2, \ 2(M + p - 2))_2 ;$$

und die Zahl der ihnen gemeinsamen Punktepaare ist gleich

$$4(M - 2)(M + p - 2) - 8p,$$

Nun gehen aber durch A und B noch $2(M + p - 1)$ berührende Curven, welche beiden Correspondenzen gemeinsam sind; und der Berührungspunkt einer jeden von diesen bildet mit jedem ihrer anderen $M - 2$ Schnittpunkte ein Paar der gesuchten Art. *Die verlangte Zahl wird somit gleich*

$$\begin{aligned} &4(M - 2)(M + p - 2) - 8p - 2(M - 2)(M + p - 1) \\ &\quad = 2(M - 2)(M - 3) + 2p(M - 6). \end{aligned} \tag{47}$$

C) Es soll auf f die Zahl der Punktetripel gefunden werden, durch die noch einfach unendlich viele Curven der Schaar (45) *hindurchgehen, während gleichzeitig in einem solchen Büschel eine Curve vorkommt, welche f in zwei von den drei Punkten des Tripels berührt.*

---

*) Diese Zahl z. B. ist gleich der Zahl derjenigen Tangenten einer Raumcurve von der Ordnung M und vom Geschlechte p, welche die Raumcurve noch einmal treffen, während (46) die Zahl der dreifach schneidenden Sehnen gibt, welche durch einen beliebigen Punkt der Raumcurve gehen.

Zu jedem Punkte z von f gehören nach (46) noch $N = \frac{1}{2}(M-2) \cdot (M-3) - p$ Punktepaare x-y, so dass durch z, x und y noch ein Büschel von Curven der Schaar (45) hindurchgeht. Diese $2N$ Punkte (sowohl die x als die y wegen der Symmetrie) sind nach dem Obigen die einfachen Verschwindungspunkte eines Quotienten $\Lambda_y = \frac{K_y}{\Pi}$, worin K_y und Π rational von den Coordinaten des Punktes z abhängen; denn die Gleichung $\Lambda_y = 0$ entsteht hier durch Elimination von x aus $f(x) = 0$ und aus dem Gleichungssysteme:

$$\text{(48)} \qquad \left\| \begin{matrix} \varphi_1(z) & \varphi_2(z) & \varphi_3(z) & \varphi_4(z) \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x) \\ \varphi_1(y) & \varphi_2(y) & \varphi_3(y) & \varphi_4(y) \end{matrix} \right\| = 0 .$$

Aus dieser Bemerkung erkennt man gleichzeitig, dass Λ_y *symmetrisch in y und z ist.* In Rücksicht hierauf wollen wir Λ_{yz} statt Λ_y schreiben, wo dann also $\Lambda_{yz} = 0$ uns eine Correspondenz zwischen y und z gibt, vermöge deren jedem Punkte y $2N$ Punkte z und jedem z $2N$ Punkte y zugeordnet sind, und *deren Werthigkeit in $y = z$ durch die Zahl*

$$\text{(49)} \qquad 2(M-2) - 2 - (M-2) = M - 4$$

gegeben ist. Letzteres folgt daraus, dass man in (32) zu setzen hat:

$$t = t' = \tau = \tau' = \gamma = \gamma' = 1, \quad \alpha = \alpha' = M - 2;$$

von der so resultirenden Zahl hat man dann noch $M - 2$ abzuziehen wegen der Curve, welche durch A, B und z hindurchgeht, wenn A, B wieder zwei beliebige Punkte der Ebene sind, die man wie oben beim Netze zur Aufstellung der Correspondenzen einführt (p. 723). Diese Correspondenz können wir nun, obgleich sie nicht durch das Verschwinden einer ganzen Function von x, y dargestellt wird, ebenso benutzen wie eine Correspondenz der letzteren Art, *so lange die für sie charakteristischen Zahlen α, β, γ (hier bez. $2N$, $2N$, $M-4$) nur linear vorkommen.* Bezeichnen wir nämlich diese Zahlen für K_{yz} mit a, b, c für Π mit a', b', c', so ist:

$$\alpha = a - a', \quad \beta = b - b', \quad \gamma = c - c',$$

und es wird die Zahl der Coincidenzen, da K_{yz} durch alle Schnittpunkte von Π mit f geht, gleich

$$a + b + 2cp - (a' + b' + 2c'p) = \alpha + \beta + 2\gamma p,$$

und die Zahl der ihr und einer anderen Correspondenz $(\alpha', \beta')_{\gamma'}$ gemeinsamen Punktepaare*) gleich

---

*) Auch diese andere Correspondenz braucht nicht durch das Verschwinden einer ganzen Function rein darstellbar zu sein; vgl. die Anmerkung auf p. 747.

$$a\beta' + b\alpha' - 2c\gamma' p - a'\beta' - b'\alpha' + 2c'\gamma' p = \alpha\beta' + \beta\alpha' - 2\gamma\gamma' p .$$

Diese Bemerkung werden wir noch wiederholt benutzen.

Ferner gibt es $2(M+p-3)$ Curven in der Schaar (45), welche f in z und in einem anderen Punkte y berühren, wodurch uns eine Correspondenz

$$(2(M+p-3),\ \ 2(M+p-3))_1$$

gegeben ist. Da wir andererseits durch $\Lambda_{yz} = 0$ eine Correspondenz $(2N,\ 2N)_{M-1}$ dargestellt fanden, so würde die Zahl der gesuchten Punktetripel zunächst gleich

$$\begin{aligned} &8N(M+p-3) - 8(M-4)p \\ &= 8N(M+p-1) - 8(M-2)(M-3) - 8(M-6)p . \end{aligned}$$

Hierunter sind aber noch, je doppelt zählend, die durch (47) bestimmten Tripel enthalten; denn wenn es einfach unendlich viele Curven gibt, welche in z berühren und ausserdem durch x und y gehen; so ist unter diesen jedenfalls eine Curve enthalten, welche auch in x, und eine, welche auch in y die Grundcurve berührt. Ziehen wir also von der gefundenen Zahl das Doppelte der Zahl (47) ab, so wird *die hier gesuchte Zahl gleich*

$$(50)\quad 8N(M+p-1) - 12(M-2)(M-3) - 12(M-6)p .$$

Diese Zahl gibt zugleich, wie leicht zu sehen, die *Zahl der Punkte x von f, für welche zwei der zugehörigen N Punktepaare* (46) *einander benachbart liegen.* Geht nämlich eine Curve der ∞^3-Schaar durch x und berührt in y und z, so gehört sie gleichzeitig dem durch x und dem durch $z + dz$ bestimmten Büschel des durch x gehenden Netzes an. Der letztere Büschel hat aber einen weiteren Basispunkt in der Nähe von y, und dieser muss gleichzeitig auf f liegen, da jene eine Curve dieses Büschels durch den zu y auf f benachbarten Punkt $y + dy$ geht. Es bilden daher in der That sowohl die Punkte y, z als die Punkte $y + dy$, $z + dz$ eines der N zu x gehörenden Punktepaare.

D) Es soll die Zahl der Punktquadrupel auf f ermittelt werden, durch welche noch einfach unendlich viele Curven der Schaar (45) *hindurchgehen; d. h. die Zahl der gemeinsamen Lösungen des Systems von Gleichungen:*

— Darin, dass wir die Darstellbarkeit der hier auftretenden Correspondenzen in der Form $\Lambda_{yx} = 0$ erkannten, liegt eben der grosse Nutzen der vorstehenden Erörterungen für die sich jetzt bietenden Fragen; denn nur dadurch wird die Correspondenzformel anwendbar; vgl. die Anmerkung auf p. 446.

$$f(x)=0, \quad f(y)=0, \quad f(z)=0, \quad f(\xi)=0,$$

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_1(y) & \varphi_1(z) & \varphi_1(\xi) & X_1 \\ \varphi_2(x) & \varphi_2(y) & \varphi_2(z) & \varphi_2(\xi) & X_2 \\ \varphi_3(x) & \varphi_3(y) & \varphi_3(z) & \varphi_3(\xi) & X_3 \\ \varphi_4(x) & \varphi_4(y) & \varphi_4(z) & \varphi_4(\xi) & X_4 \end{vmatrix} = 0,$$

worin die X_i willkürliche Grössen sind (p. 692 und 697).

Durch jeden Punkt z von f geht eine Curve $\Lambda_{yz}=0$, welche nach (49) in $y=z$ einen $(M-4)$-werthigen Punkt besitzt, und welche nach (46) auf f $2N$ weitere Punkte $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots y^{(2N)}$ ausschneidet. Diese Punkte ordnen sich in N Paare, indem jeder Punkt $y^{(i)}$ durch einen anderen Punkt, sagen wir $y^{(N+i)}=x^{(i)}$, zu einem Paare derartig ergänzt wird, dass durch $y^{(i)}$, $x^{(i)}$ und z noch ∞^1-Curven der Schaar (45) gehen. Zu jedem Punkte $y^{(i)}$ construiren wir nun die zugehörige Curve $\Lambda_{y^{(i)}\eta}=0$, welche zu $y^{(i)}$ in derselben Beziehung steht wie $\Lambda_{zy}=0$ zu z. Dieselbe verschwindet $(M-4)$-fach in $y^{(i)}=\eta$, geht einfach durch $x^{(i)}$ und durch z und schneidet auf f ausserdem $2N-2$ (nicht auf $\Lambda_{zy}=0$ gelegene) Punkte η aus, die sich wieder zu Paaren η, ξ anordnen. Das Product aller Ausdrücke $\Lambda_{y^{(i)}\eta}$ bezeichnen wir mit $\Pi_{z\eta}$; dann stellt die Gleichung

$$\Pi_{z\eta} = \Lambda_{y^{(1)}\eta} \cdot \Lambda_{y^{(2)}\eta} \ldots \Lambda_{y^{(N)}\eta} \Lambda_{x^{(1)}\eta} \Lambda_{x^{(2)}} \ldots \Lambda_{x^{(N)}\eta} = 0$$

eine zu z gehörige Curve dar, welche $(M-4+1)$-fach in jedem Punkte $y^{(i)}$ und $2N$-fach in z verschwindet, und welche auf f $2N(2N-2)$ Punkte η, je einfach zählend, ausschneidet. Nimmt man aus letzteren einen Punkt η und den zugehörigen ξ heraus, so hat man, ausgehend von einem Punkte $y^{(i)}$, folgende Beziehungen. Die Punkte z, $y^{(i)}$, $x^{(i)}$ bilden ein Tripel der unter *A*) betrachteten Art, die Punkte $y^{(i)}\eta\,\xi$ bilden ein zweites Tripel der Art: Jede Curve der ∞^3-Schaar, welche durch $y^{(i)}$ und z geht, geht auch durch $x^{(i)}$; und jede, welche durch $y^{(i)}$ und η geht, geht auch durch ξ. Für besondere Lagen von z kann es nun eintreten, dass η mit z zusammenfällt; und dann geht jede Curve durch $y^{(i)}$ und z sowohl noch durch $x^{(i)}$ als durch ξ; d. h. die Punkte z, $y^{(i)}$, $x^{(i)}$, ξ bilden alsdann ein Tripel der gesuchten Art. Es darf jedoch dabei η nicht mit $y^{(i)}$ zusammenfallen, d. h. nicht unter den durch $\Lambda_{z\eta}=0$ auf f ausgeschnittenen Punkten vorkommen, Punkte, durch welche nach Obigem $\Pi_{z\eta}=0$ noch je $(M-3)$-fach hindurchgeht. Die gesuchten Punkte z sind daher die Coincidenzpunkte der durch die Gleichung

$$\frac{\Pi_{z\eta}}{(\Lambda_{z\eta})^{M-3}} = 0$$

dargestellten Correspondenz, welche nach den obigen Bemerkungen über $\Pi_{z\eta}$ in $z=\eta$ einen Punkt von der Werthigkeit

$$2N - (M-3)(M-4) = 2(M-3) - 2p$$

besitzt; und die Zahl ihrer Coincidenzpunkte ist nach den unter C) angegebenen Erörterungen gleich:

$$2N(2N-2) + 2N(2N-2) + 2p\{2(M-3) - 2p\}$$
$$= 2(M-1)(M-2)(M-3)(M-4) - 4p(2M^2 - 11M + 13) + 4p^2.$$

Wenn aber η mit z zusammenfällt, so kann es eintreten, dass gleichzeitig der zugehörige Punkt ξ mit $x^{(i)}$ zusammenfällt, wo dann die beiden Tripel $zy^{(i)}x^{(i)}$ und $y^{(i)}\eta\xi$ identisch werden; dann ist also $y^{(i)}$ einer der unter C) betrachteten Punkte, für welchen zwei der zugehörigen N Paare (46) zusammenfallen. Von der gefundenen Zahl haben wir daher noch die Zahl (50) zu subtrahiren. Da ferner die Punkte z, y, x, ξ in jedem der übrig bleibenden Quadrupel symmetrisch vorkommen, haben wir den Rest noch mit $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ zu dividiren. *Die Zahl der gesuchten Quadrupel findet man sonach schliesslich gleich*

$$(51) \quad \tfrac{1}{12}(M-2)(M-3)^2(M-4) - \tfrac{1}{2}p\{(M-3)(M-4) - p + 1\}.$$

Wir benutzen jetzt ferner die für zwei simultane Correspondenzen und die Zahl ihrer Coincidenzen gewonnenen Resultate für die gleichzeitige Betrachtung dreier Correspondenzen zwischen drei Punkten x, y, z der Grundcurve (vgl. p. 720). Daran soll sich die Behandlung eines für die Theorie der Specialschaaren sehr lehrreichen Beispiels anschliessen.

Es seien also die drei Gleichungen gegeben:

$$(52) \quad \varphi_1(x, y, z) = 0, \quad \varphi_2(x, y, z) = 0, \quad \varphi_3(x, y, z) = 0.$$

und: $\qquad f(x) = 0, \quad f(y) = 0, \quad f(z) = 0;$

es soll die Zahl der aus je drei getrennt liegenden Punkten x, y, z bestehenden Tripel gefunden werden, welche gleichzeitig diesem Systeme von Gleichungen genügen. Vermöge der Bedingungen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$ mögen jedem Punktepaare x, y bez. μ_1, μ_2, μ_3 nicht in x oder y liegende Punkte z von f zugehören, jedem Punktepaare y, z ebenso bez. $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ Punkte x, jedem Paare z, x bez. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ Punkte y. Ferner möge eine Gleichung $\varphi_i = 0$ je α_i-fach verschwinden für $y = z$, β_i-fach für $z = x$, γ_i-fach für $x = y$. Ueberdies nehmen wir der Einfachheit halber an, dass die zu x, y oder z vermöge der Gleichungen (52) gehörenden Curven durch *sämmtliche* Doppelpunkte hindurchgehen.*)

*) Die andernfalls im Folgenden [besonders an den Zahlen $(\varphi_i\varphi_k)_{xy}$ etc.] anzubringenden Modificationen sind nach dem auf p. 732 Gesagten leicht zu bestimmen.

Die Elimination von x bez. y oder z aus $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ gibt uns zunächst die Gleichungen*):

$$\Lambda_{12}(x, z) = 0, \quad \Lambda_{12}(y, z) = 0, \quad \Lambda_{12}(x, y) = 0, \tag{53}$$

wo die Functionen Λ_{ik} (wie auf p. 733) nicht nothwendig ganze Functionen sind. Die Zahl der Punkte x, welche einem Punkte z vermöge $\Lambda_{12}(x, z) = 0$ zugeordnet sind, ist dann gleich $(\varphi_1\varphi_2)_{xy}$, wenn letztere Zahl die Anzahl der Punktepaare x, y bezeichnet, welche bei festem z gleichzeitig den Correspondenzen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ genügen, d. h. wenn:

$$(\varphi_1\varphi_2)_{xy} = \varkappa_1\lambda_2 + \varkappa_2\lambda_1 - 2\gamma_1\gamma_2 p.$$

Ebenso gross ist die Zahl der Punkte y, welche vermöge $\Lambda_{12}(y, z) = 0$ zu z gehören; und entsprechende Bedeutung sollen die Zahlen haben:

$$\begin{aligned}(\varphi_i\varphi_k)_{yz} &= \lambda_i\mu_k + \lambda_k\mu_i - 2\alpha_i\alpha_k p\\ (\varphi_i\varphi_k)_{zx} &= \mu_i\varkappa_k + \mu_k\varkappa_i - 2\beta_i\beta_k p\\ (\varphi_i\varphi_k)_{xy} &= \varkappa_i\lambda_k + \varkappa_k\lambda_i - 2\gamma_i\gamma_k p\end{aligned} \tag{54}$$

Ferner bezeichnen wir mit $[yz]_{ik}$ die Werthigkeit des Punktes $y = z$ in der Gleichung $\Lambda_{ik}(y, z) = 0$, d. i. in dem Resultate der Elimination von x aus den Gleichungen $\varphi_i = 0$, $\varphi_k = 0$; dann ist nach (32):

$$\begin{aligned}[yz]_{ik} &= \alpha_i\varkappa_k + \alpha_k\varkappa_i - \beta_i\gamma_k - \beta_k\gamma_i\\ [zx]_{ik} &= \beta_i\lambda_k + \beta_k\lambda_i - \gamma_i\alpha_k - \gamma_k\alpha_i\\ [xy]_{ik} &= \gamma_i\mu_k + \gamma_k\mu_i - \alpha_i\beta_k - \alpha_k\beta_i.\end{aligned} \tag{55}$$

Durch den Punkt z und durch jeden der $(\varphi_1\varphi_2)_{xy}$ Punkte x, welche vermöge $\Lambda_{12}(x, z) = 0$ zu z gehören, legen wir je die eine Curve $\varphi_3(x, y, z) = 0$, die zu ihm und zu z gehört. Jede solche Curve schneidet noch in λ_3 weiteren Punkten y, während ausserdem γ_3 Schnittpunkte in x und α_3 in z liegen. Das Product dieser sämmtlichen Curven φ gleich Null gesetzt, d. h. das Resultat der Elimination von x aus $\Lambda_{12}(x, z) = 0$ und $\varphi_3 = 0$:

$$\Pi_{yz} = \varphi_3(x^{(1)}, y, z) \cdot \varphi_3(x^{(2)}, y, z) \ldots \varphi_3(x^{(\varrho)}, y, z) = 0,$$

wo $\varrho = (\varphi_1\varphi_2)_{xy}$, stellt dann eine Correspondenz zwischen y und z dar, vermöge deren einem Punkte z der Grundcurve $(\lambda_3 + \gamma_3)(\varphi_1\varphi_2)_{xy}$ Punkte y zugeordnet sind. Von letzteren liegen dabei $\gamma_3(\varphi_1\varphi_2)_{xy}$ in den Schnittpunkten x der Curve $\Lambda_{12}(x, z) = 0$ mit f; *wegen dieser in $x = y$ fallenden Punkte haben wir daher später noch eine Reduction anzubringen.* In $y = z$ hat ferner die Correspondenz $\Pi_{yz} = 0$ einen Punkt von der Werthigkeit $\alpha_3(\varphi_1\varphi_2)_{xy}$. Die Zahl der Punkte z,

*) Ueber die Benutzung solcher durch gebrochene Functionen dargestellter Correspondenzen vgl. das oben unter C) Gesagte (p. 742 f.).

welche umgekehrt zu y gehören, ist nicht unmittelbar aus dem für Π_{yz} gewählten Ausdrucke zu entnehmen, da die $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(\varrho)}$ noch von z abhängen; diese Zahl aber muss gleich der Zahl der Punktepaare x-z sein, welche vermöge der Gleichungen $\Lambda_{12}(y, z) = 0$, $\varphi_3 = 0$ zu einem gegebenen y gehören, und deren Punkte z nicht in y liegen, während die zugehörigen Punkte x nicht mit z, wohl aber wieder mit y zusammenfallen dürfen, d. i. gleich der Zahl:

$$(\varphi_1\varphi_2)_{yz}\,(\varkappa_3 + \gamma_3) + (\varphi_1\varphi_2)_{xy}\,\mu_3 - 2p\beta_2\,[xz]_{12}\,.$$

Die Correspondenz $\Pi_{yz} = 0$ muss nothwendig erfüllt sein, damit es zu y, z einen dritten Punkt x gibt, so dass das Tripel x, y, z den drei Gleichungen $\varphi_i = 0$ genügt. Eine zweite nothwendige Correspondenz der Art zwischen y, z, ist durch die Bedingung $\Lambda_{12}(y, z) = 0$ gegeben; und zwar ist dies eine Correspondenz:

$$((\varphi_1\varphi_2)_{xy},\quad (\varphi_1\varphi_2)_{xz})_{[yz]_{12}}\,.$$

Die Zahl der beiden gemeinsamen Paare finden wir daher gleich*)

$$(\varphi_1\varphi_2)_{xy}\left\{(\varphi_1\varphi_2)_{yz}\,(\varkappa_3 + \gamma_3) + (\varphi_1\varphi_2)_{xy}\,\mu_3 - 2p\beta_3\,[xz]_{12}\right\}$$
$$+ (\varphi_1\varphi_2)_{xz}\,(\varphi_1\varphi_2)_{xy}\,(\lambda_3 + \gamma_3) - 2p\,[yz]_{12}\,\alpha_3\,(\varphi_1\varphi_2)_{xy}\,.$$

Diese Zahl gibt an, wie viele Punktepaare x-z in $\Lambda_{12}(x, z)$ mit einem Paare y-z in $\Lambda_{12}(y, z)$ zusammen ein Tripel x-y-z von $\varphi_3 = 0$ bilden. Aber zu jedem der $(\varphi_1\varphi_2)_{xy}$ zu z gehörigen Paare x-z (vermöge $\Lambda_{12}(x, z)$) gibt es unter den $(\varphi_1\varphi_2)_{xy}$ Paaren y-z nur eines, welches auch der dritten Gleichung (53), nämlich $\Lambda_{12}(x, y) = 0$, genügt, d. i. nur eines, welches zu einem gemeinsamen

---

*) In der That kann man die Formel für $(\varphi\varphi')$ auch direct zur Bestimmung der gemeinsamen Punktpaare zweier Correspondenzen verwerthen, welche in der Form

$$\varphi(x, y) = \frac{\Phi(x, y)}{\Psi(x, y)} = 0, \qquad \varphi'(x, y) = \frac{\Phi'(x, y)}{\Psi'(x, y)} = 0$$

gegeben sind, wo Φ, Φ' bez. durch alle Schnittpunkte von Ψ, Ψ' mit f hindurchgehen, während die Ausführung der Division wegen des Verhaltens in festen Punkten etc. nicht möglich ist. Sei nämlich die Correspondenz Φ, Ψ, Φ', Ψ' bez. charakterisirt durch die Zahlen:

$$(a + \alpha,\ b + \beta)_{c+\gamma},\quad (a,\ b)_c,\quad (a' + \alpha',\ b' + \beta')_{c'+\gamma'},\quad (a',\ b')_{c'},$$

so ist von der Zahl der gemeinsamen Paare der Correspondenzen Φ, Φ', nämlich der Zahl

$$(a + \alpha)(b' + \beta') + (a' + \alpha')(b + \beta) - 2(c + \gamma)(c' + \gamma')p$$

abzuziehen:

1) die Zahl $ab' + ba' - 2cc'p$ der gemeinsamen Paare von Ψ und Ψ'
2) „ „ $a\beta' + b\alpha' - 2c\gamma'p$ „ „ „ „ Ψ' „ Φ
3) „ „ $a'\beta + b'\alpha - 2c'\gamma p$ „ „ „ „ Ψ „ Φ'.

Es bleibt dann eben wieder die Zahl $\alpha\beta' + \beta\alpha' - 2\gamma\gamma' p$, q. e. d.

Tripel der drei Gleichungen $\varphi_i = 0$ Veranlassung geben kann. Da wir nun immer alle $(\varphi_1 \varphi_2)_{xy}$ Paare gleichmässig berücksichtigt haben, haben wir also die gefundene Zahl noch durch $(\varphi_1 \varphi_2)_{xy}$ zu dividiren; dieselbe wird dann gleich

$$(\varphi_1 \varphi_2)_{yz}(\varkappa_3 + \gamma_3) + (\varphi_1 \varphi_2)_{xz}(\lambda_3 + \gamma_3) + (\varphi_1 \varphi_2)_{xy}\mu_3 - 2p\left\{[yz]_{12}\alpha_3 + [xz]_{12}\beta_3\right\}.$$

Hierunter sind aber nach dem Obigen (p. 746) noch solche Tripel vorhanden, für welche x mit y zusammenfällt. Letzteres kann nur in den Coincidenzpunkten der Gleichung $\Lambda_{12}(x, y) = 0$ eintreten, da dieser alle gefundenen Tripel genügen müssen; und es wird auch *jeder* dieser

$$(\varphi_1 \varphi_2)_{xz} + (\varphi_1 \varphi_2)_{yz} + 2\,[xy]_{12}\,p$$

Coincidenzpunkte zu einem solchen uneigentlichen Tripel Veranlassung geben, und zwar wegen des γ_3-werthigen Punktes von φ_3 in $x = y$ je γ_3-fach zählend. Man erhält also die Zahl:

$$(\varphi_1\varphi_2\varphi_3) = (\varphi_1\varphi_2)_{yz}\varkappa_3 + (\varphi_1\varphi_2)_{zx}\lambda_3 + (\varphi_1\varphi_2)_{xy}\mu_3 - 2p\left\{[yz]_{12}\alpha_3 + [zx]_{12}\beta_3 + [xy]_{12}\gamma_3\right\}$$

und schliesslich, da diese Zahl von φ_1, φ_2, φ_3 symmetrisch abhängen muss — wovon man sich in Rücksicht auf (54) und (55) auch durch Ausrechnen überzeugt —, den Satz:

Die Zahl der Punktetripel, welche gleichzeitig den drei Correspondenzen (52) *genügen und aus je drei getrennten Punkten von f bestehen, ist gegeben durch eine der drei Formeln* $(r, s, t = 1, 2, 3)$:

$$(56)\qquad \begin{aligned}(\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3) = (\varphi_r \varphi_s)_{yz}\varkappa_t + (\varphi_r \varphi_s)_{zx}\lambda_t + (\varphi_r \varphi_s)_{xy}\mu_t \\ - 2p\left\{[yz]_{rs}\alpha_t + [zx]_{rs}\beta_t + [xy]_{rs}\gamma_t\right\},\end{aligned}$$

worin $\varkappa_i$, λ_i, μ_i die obigen Bedeutungen haben, wo ferner $(\varphi_i\varphi_k)_{yz}$ etc. durch (54), $[yz]_{ik}$ *etc. durch* (55) *definirt sind. — Wenn insbesondere jede der Correspondenzen in Bezug auf die einzelnen Variabeln symmetrisch gebildet ist, wo dann nothwendig:*

$$\varkappa_i = \lambda_i = \mu_i, \quad \alpha_i = \beta_i = \gamma_i,$$

so wird die Zahl der gemeinsamen Tripel)*:

$$(57)\quad \tfrac{1}{6}(\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3) = \varkappa_1 \varkappa_2 \varkappa_3 - p(\varkappa_1 \alpha_2 \alpha_3 + \varkappa_2 \alpha_3 \alpha_1 + \varkappa_3 \alpha_1 \alpha_2) + 2p\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3.$$

Es sei hervorgehoben, dass die Formel (56) auch noch gilt, wenn die Correspondenzen φ_1, φ_2 nicht durch zwei einzelne Gleichungen, sondern durch das gleichzeitige Bestehen von drei Gleichungen der Form (53):

$$\Phi(y, z) = 0, \quad \Phi'(z, x) = 0, \quad \Phi''(x, y) = 0,$$

*) Diese Formeln sind ebenso wie die entsprechenden für die Zahl der gemeinsamen Quadrupel von vier Correspondenzen von Brill auf anderem Wege abgeleitet: Math. Annalen, Bd. 6, p. 56.

bez. mit den charakteristischen Zahlen:

$$(l,\ m)_a,\quad (m,\ k)_b,\quad (k,\ l)_c$$

dargestellt sind, ohne dass es nothwendig wäre, dieselben als Resultate der Elimination bez. von x, y, z aus $f=0$ und je zweien der Gleichungen $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$, $\varphi_3=0$ aufzufassen, wie es bisher geschah. Dann entsprechen jedem Punkte z jetzt m Paare x-y, die durch $\Phi=0$, $\Phi'=0$ ausgeschnitten werden, und deren paarweise Zuordnung durch $\Phi''=0$ vermittelt wird, etc. Bei Ableitung der Formel (56) nämlich haben wir nirgends von den Gleichungen $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$ Gebrauch gemacht, sondern nur von den Gleichungen (55). Fügt man zu $\Phi=0$, $\Phi'=0$, $\Phi''=0$ eine Correspondenz $\varphi=0$ mit den Zahlen $\varkappa$, λ, μ, α, β, γ, *so gilt also für die Zahl der gemeinsamen Tripel wieder die Formel:*

$$(58)\qquad (\Phi\Phi'\Phi'',\ \varphi)=k\varkappa+l\lambda+m\mu-2p\,(a\alpha+b\beta+c\gamma),$$

indem in (56) zu setzen ist:

$$(\varphi_1\varphi_2)_{yz}=k,\ (\varphi_1\varphi_2)_{zx}=l,\ (\varphi_1\varphi_2)_{xy}=m,\ [yz]_{12}=a,\ [zx]_{12}=b,\ [xy]_{12}=c,$$

$$\varkappa_3=\varkappa,\quad \lambda_3=\lambda,\quad \mu_3=\mu,\quad \alpha_3=\alpha,\quad \beta_3=\beta,\quad \gamma_3=\gamma;$$

und im Falle der *Symmetrie* gewinnt man aus (58) die Formel

$$(59)\qquad \tfrac{1}{6}\,(\Phi\Phi'\Phi'',\ \varphi)=\tfrac{1}{2}\,k\varkappa-pa\alpha. \ —$$

Gerade diese letzte Bemerkung wird uns für die folgende Anwendung von Nutzen sein:

Es ist eine vierfach unendliche lineare Schaar von Curven:

$$(60)\qquad \alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2+\alpha_3\varphi_3+\alpha_4\varphi_4+\alpha_5\varphi_5=0$$

gegeben, welche f in M beweglichen Punkten treffen und zu f adjungirt sind; man soll auf f die Zahl der Punktetripel bestimmen, durch die noch eine doppelt unendliche Schaar dieser Curven hindurchgeht; d. h. man soll die Anzahl von Werthsystemen x, y, z finden, welche dem folgenden Gleichungssysteme genügen):*

$$(61)\quad S(12345)_3=\begin{Vmatrix}\varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x) & \varphi_5(x)\\ \varphi_1(y) & \varphi_2(y) & \varphi_3(y) & \varphi_4(y) & \varphi_5(y)\\ \varphi_1(z) & \varphi_2(z) & \varphi_3(z) & \varphi_4(z) & \varphi_5(z)\end{Vmatrix}=0,$$

$$(62)\qquad f(x)=0,\quad f(y)=0,\quad f(z)=0.$$

*) Die Lösung dieser Aufgabe ist in der That im Allgemeinen möglich; vgl. p. 752. — Mit Hülfe der entsprechenden Formel für vier Correspondenzen findet man bei Brill a. a. O. auch die Aufgabe behandelt, *die Zahl der Punktquadrupel auf f anzugeben, durch welche noch dreifach unendlich viele Curven aus einer sechsfach unendlichen, linearen, zu f adjungirten Schaar hindurchgehen.* Eine allgemeine Formel für die Zahl der Lösungen einer Matrix mit R Horizontalreihen und $R+i$ Verticalreihen, wenn ausserdem R Gleichungen der Form (62) bestehen, ist in dem Aufsatze von Brill und Nöther mitgetheilt; vgl. die Anmk. auf p. 706.

Die gesuchte Zahl bezeichnen wir mit $(12345)_3$ und entsprechend mit $(1234)_3$ die Zahl der Punktepaare y-z, welche bei festem x dem Systeme

$$(63) \qquad S(1234)_3 \equiv \left\| \begin{matrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x) \\ \varphi_1(y) & \varphi_2(y) & \varphi_3(y) & \varphi_4(y) \\ \varphi_1(z) & \varphi_2(z) & \varphi_3(z) & \varphi_4(z) \end{matrix} \right\| = 0,$$

sowie den Gleichungen (62) genügen, ferner mit $[(1234)_3\,(345)_3]$ die Zahl der Tripel, welche gleichzeitig den Gleichungen (63) und der einen Gleichung

$$(64) \qquad \begin{vmatrix} \varphi_3(x) & \varphi_4(x) & \varphi_5(x) \\ \varphi_3(y) & \varphi_4(y) & \varphi_5(y) \\ \varphi_3(z) & \varphi_4(z) & \varphi_5(z) \end{vmatrix} = 0$$

genügen, mit $[(123)_3\,(34)_3]$ die Zahl derjenigen Tripel, welche den Gleichungssystemen genügen:

$$(65) \qquad \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) \\ \varphi_1(y) & \varphi_2(y) & \varphi_3(y) \\ \varphi_1(z) & \varphi_2(z) & \varphi_3(z) \end{vmatrix} = 0, \qquad \left\| \begin{matrix} \varphi_3(x) & \varphi_4(x) \\ \varphi_3(y) & \varphi_4(y) \\ \varphi_3(z) & \varphi_4(z) \end{matrix} \right\| = 0,$$

endlich mit $(3)_3$ die Zahl der durch das System

$$(66) \qquad \left\| \begin{matrix} \varphi_3(x) \\ \varphi_3(y) \\ \varphi_3(z) \end{matrix} \right\| = 0, \text{ d. i. durch: } \varphi_3(x) = 0,\ \varphi_3(y) = 0,\ \varphi_3(z) = 0$$

bestimmten Werthetripel. Zu jedem dieser Gleichungssysteme sind natürlich immer wieder die Gleichungen (62) hinzuzunehmen, wie im Folgenden nicht mehr besonders hervorgehoben werden soll.

Die Lösungen des Systems (61) sind nun jedenfalls unter den $[(1234)_3\,(345)_3]$ gemeinsamen Lösungen der Gleichungen (63) und (64) enthalten, denn nach einem früher erwähnten Satze (p. 703) sind alle gemeinsamen Lösungen einer Matrix mit q Verticalreihen und k Horizontalreihen, wo $q > k$, unter den gemeinsamen Lösungen von irgend $q - k + 1$ von einander unabhängigen k-gliedrigen Determinanten der Matrix enthalten. In unserm Falle haben wir aber $q = 5$, $k = 3$, also $q - k + 1 = 3$; und das System (63) stellt eben nach demselben Satze zwei von einander unabhängige Gleichungen dar. Unter den erwähnten $[(1234)_3\,(345)_3]$ Lösungen befinden sich jedoch auch diejenigen, welche dem Systeme (65) genügen, ohne gleichzeitig *alle* Gleichungen (61) zu befriedigen, wie man wieder mit Hülfe jenes Satzes bestätigt. Unter den Lösungen von (65) sind wieder auch die von (66) inbegriffen, während letztere doch die Gleichungen (63) und (64) nicht befriedigen. Von der Zahl $[(1234)_3(345)]_3$

hat man daher die Zahl $[(123)_3 (34)_3] - (3)_3$ abzuziehen, um die Zahl $(12345)_3$ zu erhalten; d. h. wir haben die Formel*):

(67) $$(12345)_3 = [(1234)_3 (345)_3] - [(123)_3 (34)_3] + (3)_3 .$$

Die hier rechts auftretenden Zahlen haben wir nun durch die Zahlen M und p auszudrücken. Zunächst ist $(3)_3$ gleich der Anzahl der Tripel, welche man aus den M Schnittpunkten von $\varphi_3 = 0$ mit f bilden kann, also:

$$(3)_3 = \tfrac{1}{6} M (M-1)(M-2) .$$

In (65) stellt uns das Verschwinden der dreigliedrigen Determinante eine symmetrische Correspondenz $\varphi(x, y, z) = 0$ dar, für welche nach der in Formel (59) benutzten Beziehungsweise:

$$\varkappa = M - 2, \quad \alpha = 1 .$$

Das Verschwinden der Matrix dagegen ist äquivalent mit zwei Correspondenzen, die durch *drei* Gleichungen $\Phi = 0$, $\Phi' = 0$, $\Phi'' = 0$ dargestellt werden, und zwar:

$$\left\{\begin{vmatrix} \varphi_3(y) & \varphi_4(y) \\ \varphi_3(z) & \varphi_4(z) \end{vmatrix}\right\}^{M-2} = 0, \qquad \left\{\begin{vmatrix} \varphi_3(z) & \varphi_4(z) \\ \varphi_3(x) & \varphi_4(x) \end{vmatrix}\right\}^{M-2} = 0,$$

$$\left\{\begin{vmatrix} \varphi_3(x) & \varphi_4(x) \\ \varphi_3(y) & \varphi_4(y) \end{vmatrix}\right\}^{M-2} = 0 .$$

Zu z gehören nämlich z. B. alle $M-1$ nicht in z liegenden Schnittpunkte von $\varphi_3(z)\varphi_4(y) - \varphi_4(z)\varphi_3(y) = 0$, jeder aber $(M-2)$-fach zählend, da jeder mit jedem andern dieser Punkte ein zu z gehöriges Paar x-y bildet; es ist daher in (59) zu setzen:

$$k = (M-1)(M-2), \quad a = M - 2 ;$$

und somit wird**):

$$[(123)_3 (34)_3] = \tfrac{1}{2}(M-1)(M-2)^2 - p(M-2) .$$

Ebenso haben wir zur Bestimmung der Zahl $[(1234)_3 (345)_3]$ die einzelne Correspondenz (64) mit den Zahlen $\varkappa = M - 2$, $\alpha = 1$ und zwei Correspondenzen, dargestellt durch die drei Gleichungen:

---

*) Vgl. für die Ableitung solcher Formeln Salmon's Raumgeometrie, p. 519 ff. in dem zweiten Theile von Fiedler's Bearbeitung, 2. Auflage. Eine allgemeinere Formel gab Brill: Math. Annalen, Bd. 5, p. 378 ff. — Ein einfachstes Beispiel wurde schon oben p. 389 f. behandelt.

**) Correspondenzen der hier vorkommenden Art, wo links vollständige Potenzen stehen, haben wir bisher nicht berücksichtigt; unsere Formeln bleiben aber gültig, insofern man dieselben durch Grenzübergang aus anderen Correspondenzen entstehen lassen kann. Im Falle des Textes könnte man übrigens auch die durch Verschwinden der einfachen Determinanten gegebenen Correspondenzen zunächst allein betrachten. Wegen der vollkommenen Symmetrie braucht man dann nur das Resultat mit $M - 2$ zu multipliciren.

$$\Lambda(y, z) = 0, \quad \Lambda(z, x) = 0, \quad \Lambda(x, y) = 0,$$

wo z. B. $\Lambda(y, z) = 0$ die Curve ist, welche nach dem unter A) und C) Gesagten (p. 741 ff.) auf $f = 0$ die Punktepaare x-y ausschneidet, welche vermöge des Systems (63) zu z gehören, so dass bez. nach (46) und (49):

$$k = (M - 2)(M - 3) - 2p, \quad a = M - 4;$$

und also nach (59):

$$[(1234)_3, (345)_3] = \left\{\tfrac{1}{2}(M - 2)(M - 3) - p\right\}(M - 2) - p(M - 4).$$

In Rücksicht auf (67) wird daher schliesslich *die Zahl der von uns gesuchten Punktetripel:*

(68) $\quad (12345)_3 = \frac{1}{6}(M - 2)(M - 3)(M - 4) - p(M - 4)$. —

Die zuletzt behandelte Aufgabe ist ein besonderer Fall des früher formulirten allgemeineren Problems, *auf der Grundcurve R Punkte G_R so zu bestimmen, dass die durch sie gehenden Curven einer gegebenen ∞^t-Schaar noch eine ∞^q-Schaar bilden* (p. 704). Als nothwendige Bedingung für die Lösbarkeit des Problems fanden wir

$$R \geqq (q + 1)(R - t + q);$$

und diese Ungleichung ist hier in der That erfüllt, denn wir haben zu setzen:

$$R = 3, \quad q = 2, \quad t = 4.$$

Von besonderem Interesse war jenes Problem für die Schaaren adjungirter Curven $(n - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung, und zwar in Folge der Gültigkeit des Riemann-Roch'schen Satzes für die Schnittpunktsysteme solcher Curven. Von den $2p - 2$ Schnittpunkten derselben sind $p - 1$ durch die andern $p - 1$ bestimmt; wir haben daher

$$M = p - 1 + 4 = p + 3$$

zu nehmen, wenigstens unter der Voraussetzung, dass die gegebene ∞^4-Schaar von C_{n-3} nicht in besonderen Beziehungen zur Grundcurve steht; und diese Schaar ist durch $p - 5$ beliebige Punkte von f festgelegt. Letztere bilden mit jedem Punktetripel der von uns bestimmten Art eine Specialgruppe G_R von Punkten, durch welche noch ∞^2 adjungirte C_{n-3} hindurchgehen; d. h. wir haben:

$$R = p - 2, \quad q = 2.$$

Die Gleichungen des Riemann-Roch'schen Satzes (p. 701):

$$Q + R = 2(p - 1), \quad Q - R = 2(q - r),$$

ergeben dann weiter:

$$Q = p, \quad r = 1.$$

Durch die p weiteren Schnittpunkte jener ∞^2-Schaar gehen also noch ∞^1 adjungirte C_{n-3} hindurch; und die Gruppen $G_R = G_{p-2}$ bilden selbst eine ∞^1-Schaar $g_{p-2}^{(1)}$; Schaaren der letzteren Art gibt es aber noch τ-fach unendlich viele, wenn:

$$\tau = p - (q+1)(r+1) = p - 6.$$

Umgekehrt kann man auch von dem Probleme ausgehen, Gruppen G_p zu finden, durch welche noch ∞^1 adjungirte C_{n-3} hindurchgehen; und *dies letztere Problem geht gerade aus dem unter D) behandelten für $M = p + 2$ hervor* (p. 743 ff.). Die gegebene ∞^3-Schaar ist hier durch $p - 4$ *beliebige* Punkte von f festgelegt; und diese bilden mit jedem der gesuchten Quadrupel eine solche Specialgruppe G_p, während durch die übrigen $p - 2$ Punkte wieder noch ∞^2 C_{n-3} gelegt werden können. Diese Beziehung nun haben wir schon früher eingehend besprochen und dabei gefunden, dass die Zahl der zu $p - 5$ festen Punkten gehörenden (68) Punktetripel, d. i. (wegen $M = p + 3$):

$$\tfrac{1}{2} p (p-1) \left\{\tfrac{1}{6} (p-1)(p-2) - (p-3)\right\}$$

mit der Zahl (40) der zu $p - 4$ Punkten gehörenden Punktequadrupel d. i. (wegen $M = p + 2$) der Zahl

$$p (p-1) \left\{\tfrac{1}{6} (p+1) - 1\right\}$$

für $\tau = 0$, also $p = 6$ übereinstimmen muss. In der That werden dann auch beide Zahlen gleich 5; *für $p = 6$ können aber auch, wenn es sich um Schaaren adjungirter C_{n-3} handelt, beide Probleme wirklich auf einander zurückgeführt werden.*

Für $p = 5$ werden beide Zahlen gleich Null: es gibt keine Specialgruppen dieser Art mehr, was mit Früherem übereinstimmt.

V. Ueber Schnittpunktsysteme algebraischer Curven.

Die wesentliche Grundlage für unsere Untersuchungen über die Punktsysteme auf einer gegebenen Curve bildete der auf p. 427 ausgesprochene Satz, nach welchem *von den Schnittpunkten einer gegebenen Curve n^{ter} Ordnung mit einer Curve m^{ter} Ordnung, welche durch δ Doppelpunkte von $f = 0$ gehen soll, ohne in diesen selbst mehrfache Punkte zu haben,*

1) *wenn $m \geq n$, höchstens $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \delta$;*
2) *wenn $m < n$, höchstens $mn - \frac{1}{2} m (m+3) - \delta$ durch die übrigen bestimmt sind.*

Wenn die C_m durch sämmtliche Doppelpunkte gehen sollte, so entstanden hieraus die Sätze über *adjungirte* Curven, bei denen dann das Geschlecht der Curve $f = 0$ von Wichtigkeit wurde. Wenn wir uns

dann auf letztere hauptsächlich beschränkten, so hatte dies zunächst darin seinen Grund, dass für adjungirte Curven manche Fragen sich einfacher gestalten, besonders aber darin, dass die Schnittpunktsysteme solcher Curven gegenüber eindeutigen Transformationen der Grundcurve invarianten Charakter zeigten (p. 676), während letzteres bei nicht adjungirten Curven nicht ohne Weiteres der Fall ist. Wenn nämlich aus einer durch solche Curven ausgeschnittenen Schaar von Punktgruppen eine Gruppe einen der Doppelpunkte der Grundcurve enthält, welcher nicht zu den festen Punkten der Schaar gehört, so fallen in diesen sogleich *zwei* Punkte der Gruppe. Lösen wir also den Doppelpunkt durch eindeutige Transformation in zwei getrennte Punkte ξ, η einer neuen Grundcurve auf, so entspricht jener Schaar von Punktgruppen auf der neuen Curve eine Schaar, welche zu ξ, η in der besonderen Beziehung steht, dass jede Gruppe derselben, welche ξ enthält, auch η enthalten muss und umgekehrt. Eine solche Schaar ist aber nur noch mit Hülfe neuer fester Punkte (eben ξ und η) zu definiren.

Hier wollen wir nun dazu übergehen, den angeführten Satz in anderer Richtung zu verwerthen, ohne uns auf adjungirte Curven zu beschränken. Insbesondere werden wir die zwischen den Punkten eines Schnittpunktsystems bestehenden Relationen näher betrachten und obiges Theorem in einer allgemeineren Form aussprechen. Daran sollen sich verschiedene *Anwendungen* anschliessen, wobei wir auch wieder auf die Chasles'sche Erzeugungsweise der Curven durch projectivische Curvenbüschel zurückkommen. Wir werden gleichzeitig Gelegenheit haben, im Anschlusse an die früheren Untersuchungen weitere Fragen zu formuliren.

Es sei hier zunächst hervorgehoben, dass *der obige Satz seiner Ableitung nach unabhängig davon gilt, ob die Grundcurve reducibel ist oder nicht.* So kann man zwar auf jedem Kegelschnitte 8 Punkte als Schnittpunkte desselben mit einer C_4 völlig willkürlich wählen; auf einer in zwei Kegelschnitte zerfallenden C_4 sind dagegen 3 Schnittpunkte mit einer anderen C_4 durch die 13 übrigen bestimmt. Hat man also in letzterem Falle etwa auf der einen C_2 8 Punkte einer C_4 willkürlich angenommen, so darf man auf der andern C_2 nur noch 5 Punkte beliebig wählen. Geht hingegen die C_4 durch 1, 2, 3 oder 4 Schnittpunkte beider C_2, so sind bez. noch 12, 11, 10, 8 Schnittpunkte willkürlich und durch diese bez. 2, 1, 0, 0 weitere bestimmt.*)

Ferner aber lässt sich unser Fundamentaltheorem in allgemeinerer Form aussprechen, wenn wir nicht, wie bisher, *eine* C_n $(f = 0)$ als

*) Zerfällt die Grundcurve in lauter Gerade, so lässt sich der Inhalt dieser Schnittpunktsätze algebraisch in dem sogenannten Carnot'schen Theoreme formuliren; vgl. Salmon's Higher plane curves, nr. 124, sowie eine Bemerkung in dem weiterhin folgenden Abschnitte über das Abel'sche Theorem.

fest gegeben annehmen, wie dies z. B. für $m = n$ schon in dem Satze geschah, dass *alle Curven n^{ter} Ordnung, die $\frac{1}{2} n(n+3) - 1$ Punkte mit einander gemein haben, durch bestimmte $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ weitere Punkte hindurchgehen* (p. 428). Sollen allgemein mn Punkte (wo $m > n$ sei) auf einer C_n liegen, so müssen zwischen deren Coordinaten $mn - \frac{1}{2} n(n+3)$ Gleichungen bestehen, denn die C_n ist schon durch $\frac{1}{2} n(n+3)$ Punkte bestimmt. Sollen die mn Punkte dann weiter auf einer Curve m^{ter} Ordnung liegen, so kann man letztere bei nunmehr gegebener C_n immer durch eine Curve ersetzen (p. 426), welche nur von $mn - \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Constanten abhängt. Zwischen den mn Punkten bestehen daher noch weitere $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Relationen, so dass die Gesammtheit der letzteren gleich

$$mn - \tfrac{1}{2} n(n+3) + \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) = mn - 3n + 1$$

wird. Für $m = n$ dagegen haben wir eine ∞^1-Schaar von C_n, welche durch die n^2 Punkte gehen, und daher nur $(n-1)(n-2)$ Relationen zwischen den $2n^2$ Coordinaten der n^2 Punkte; in der That sind dann ja wieder $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Punkte durch die übrigen bestimmt, wie es sein muss. Wir haben also folgenden Satz*):

Wenn mn Punkte auf zwei Curven bez. von der Ordnung m und n liegen und dabei keinerlei anderen Bedingungen genügen sollen und einfache Punkte beider Curven sind, so müssen für $m > n$ zwischen den $2mn$ Coordinaten der mn Punkte $mn - 3n + 1$ Relationen bestehen; für $m = n$ dagegen ist letztere Zahl gleich $n^2 - 3n + 2$.

Ist nun die Curve n^{ter} Ordnung fest gegeben, so sind dadurch $mn - \frac{1}{2} n(n+3)$ Gleichungen absorbirt, und es bestehen nur noch die vorhin zuletzt erwähnten $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Relationen, während gleichzeitig jeder der mn Punkte nur noch von einem Parameter abhängt. Hieraus folgt wieder, dass $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Punkte durch die übrigen bestimmt sind.

Es ist übrigens leicht, die $mn - 3n + 1$ Relationen zwischen den mn Punkten

$$x^{(1)}, \quad x^{(2)}, \ldots x^{(\mu)}, \text{ wo } \mu = mn,$$

wirklich aufzustellen. Verstehen wir nämlich unter:

$$\Psi_1(x) = 0, \quad \Psi_2(x) = 0, \ldots \Psi_{\nu+1}(x) = 0, \text{ wo } \nu = \tfrac{1}{2} n(n+3),$$

die Gleichungen von irgend $\nu + 1$ von einander linear unabhängigen Curven n^{ter} Ordnung, so dass z. B.:

$$\Psi_1(x) = x_1^n, \quad \Psi_2(x) = x_1^{n-1} x_2, \ldots \Psi_{n+1}(x) = x_2^n, \ldots \Psi_{\nu+1}(x) = x_3^n,$$

---

*) Vgl. Jacobi: De relationibus, quae locum habere debent etc. Crelle's Journal, Bd. 15, p. 285.

so ist die Gesammtheit der Curven n^{ter} Ordnung dargestellt in der ∞^{ν}-Schaar:

$$(1) \qquad \alpha_1 \Psi_1(x) + \alpha_2 \Psi_2(x) + \ldots + \alpha_{\nu+1}\Psi_{\nu+1}(x) = 0.$$

Die Bedingungen also dafür, dass $\mu = mn$ Punkte $x^{(i)}$ auf einer C_n liegen, sind gegeben durch das übervollständige System von Gleichungen:

$$(2) \qquad \left\| \begin{array}{cccc} \Psi_1(x^{(1)}) & \Psi_2(x^{(1)}) & \ldots & \Psi_{\nu+1}(x^{(1)}) \\ \Psi_1(x^{(2)}) & \Psi_2(x^{(2)}) & \ldots & \Psi_{\nu+1}(x^{(2)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Psi_1(x^{(\mu)}) & \Psi_2(x^{(\mu)}) & \ldots & \Psi_{\nu+1}(x^{(\mu)}) \end{array} \right\| = 0,$$

wo links eine Matrix mit $\nu + 1$ Vertical- und μ Horizontalreihen steht. Dies System enthält in der That nach einem früheren Satze (p. 703) nur

$$\mu - \nu = mn - \tfrac{1}{2} n(n+3)$$

von einander unabhängige Gleichungen, nämlich z. B. diejenigen, welche aus der Bedingung:

$$(3) \qquad \Psi(x^{(i)}) = \left| \begin{array}{cccc} \Psi_1(x^{(1)}) & \Psi_2(x^{(1)}) & \ldots & \Psi_{\nu+1}(x^{(1)}) \\ \Psi_1(x^{(2)}) & \Psi_2(x^{(2)}) & \ldots & \Psi_{\nu+1}(x^{(2)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Psi_1(x^{(\nu)}) & \Psi_2(x^{(\nu)}) & \ldots & \Psi_{\nu+1}(x^{(\nu)}) \\ \Psi_1(x^{(i)}) & \Psi_2(x^{(i)}) & \ldots & \Psi_{\nu+1}(x^{(i)}) \end{array} \right| = 0$$

entstehen, wenn man dem Index i alle Werthe von $i = \nu + 1$ bis $i = \mu$ nach einander beilegt. Letztere Gleichungen sagen ja auch nichts Anderes aus, als dass die Punkte $x^{(\nu+1)}, \ldots x^{(\mu)}$ auf der durch die Punkte $x^{(1)}, \ldots x^{(\nu)}$ bestimmten C_n liegen sollen. Seien ferner:

$\chi_1(x) = 0, \quad \chi_2(x) = 0, \ldots \chi_{\mu-\pi+1}(x) = 0,$ wo $\pi = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ die Gleichungen von irgend $\mu - \pi$ von einander linear unabhängigen C_m. Dann wird die Gesammtheit der C_m in der Schaar:

$$(4) \qquad \alpha_1 \chi_1(x) + \alpha_2 \chi_2(x) + \ldots + \alpha_{\mu-\pi+1}\chi_{\mu-\pi+1}(x) + A\Psi(x) = 0$$

dargestellt, wo A von der $(m-n)^{\text{ten}}$ Ordnung in x ist; und die weiteren $\pi = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Relationen erscheinen in der Form:

$$(5) \qquad \left\| \begin{array}{cccc} \chi_1(x^{(1)}) & \chi_2(x^{(1)}) & \ldots & \chi_{\mu-\pi+1}(x^{(1)}) \\ \chi_1(x^{(2)}) & \chi_2(x^{(2)}) & \ldots & \chi_{\mu-\pi+1}(x^{(2)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \chi_1(x^{(\mu)}) & \chi_2(x^{(\mu)}) & \ldots & \chi_{\mu-\pi+1}(x^{(\mu)}) \end{array} \right\| = 0.$$

Nach dem mehrfach erwähnten Satze ist die Zahl der von einander unabhängigen Gleichungen in der That gleich π. *Unsere* $mn - 3n + 1$ *Relationen sind also durch die Gleichungen* (3) *und* (5) *gegeben.*

Wenn $m = n$, gestaltet sich dies Resultat etwas anders. Sollen nämlich n^2 Punkte auf zwei Curven n^{ter} Ordnung liegen, so liegen sie mit jedem beliebigen $(n^2 + 1)^{ten}$ Punkte der Ebene auf einer C_n. *Für $m = n$ haben wir daher die Relationen* (vgl. p. 692 Anmk.):

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} \Psi_1(x^{(1)}) & \Psi_2(x^{(1)}) & \dots & \Psi_{\nu+1}(x^{(1)}) \\ \Psi_1(x^{(2)}) & \Psi_2(x^{(2)}) & \dots & \Psi_{\nu+1}(x^{(2)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Psi_1(x^{(\mu)}) & \Psi_2(x^{(\mu)}) & \dots & \Psi_{\nu+1}(x^{(\mu)}) \\ X_1 & X_2 & \dots & X_{\nu+1} \end{vmatrix} = 0,$$

worin die X_i beliebige Grössen bedeuten und wo $\mu = n^2$. Die Zahl der von einander unabhängigen Gleichungen wird in Uebereinstimmung mit dem Obigen gleich $(n-1)(n-2) = n^2 - 3n + 2$.

Zu einem analogen Gleichungssysteme wie der zuletzt behandelte Fall (insofern dieser das Verschwinden aller Unterdeterminanten einer Matrix verlangte) führt die Behandlung der folgenden Aufgabe:

Gegeben ist eine lineare ∞^t-Schaar von Curven n^{ter} Ordnung:

$$\alpha_1 \Psi_1(x) + \alpha_2 \Psi_2(x) + \dots + \alpha_{t+1} \Psi_{t+1}(x) = 0;$$

man soll in der Ebene Gruppen von R Punkten so bestimmen, dass durch dieselben noch eine ∞^q-Schaar von C_n der gegebenen Schaar hindurchgeht, wobei $q > t - R$. Dies Problem ist dem auf p. 702 behandelten genau analog, nur dass damals die R Punkte der beschränkenden Bedingung unterworfen waren, auf einer gegebenen C_n zu liegen. Dasselbe führt daher ebenfalls auf die Forderung, dass alle $(t-q+1)$-gliedrigen Determinanten aus dem Schema

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} \Psi_1(x^{(1)}) & \Psi_2(x^{(1)}) & \dots & \Psi_{t+1}(x^{(1)}) \\ \Psi_1(x^{(2)}) & \Psi_2(x^{(2)}) & \dots & \Psi_{t+1}(x^{(2)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Psi_1(x^{(R)}) & \Psi_2(x^{(R)}) & \dots & \Psi_{t+1}(x^{(R)}) \end{vmatrix}$$

verschwinden sollen. Dies liefert $(q+1)(R-t+q)$ von einander unabhängige Gleichungen zwischen $2R$ Unbekannten: den $2R$ Coordinaten der R Punkte. Für die Möglichkeit der Lösung ist also nothwendig, dass

$$2R \geqq (q+1)(R-t+q).$$

Genauere Untersuchungen über die Zahl der Lösungen in einzelnen Fällen (die analog wie das Beispiel auf p. 749 zu behandeln wären), sind bisher jedoch noch nicht angestellt.*)

---

*) Ein Beispiel für die Lösung des im Texte gestellten Problems werden wir sogleich noch kennen lernen; auch den Fall, wo die m^2 Basispunkte eines C_m-Büschels auf einer festen C_n liegen sollen ($n > m$), werden wir noch besprechen.

Die Modificationen, welche diese Betrachtungen erleiden, wenn eine der betrachteten Curven durch Doppelpunkte der anderen hindurchgeht, sind unschwer anzugeben. Es ist bekanntlich drei Bedingungen äquivalent, wenn ein bestimmter Punkt Doppelpunkt einer Curve sein soll (p. 339). Soll z. B. y Doppelpunkt einer Curve der Schaar (1) sein, so müssen die drei Gleichungen bestehen:

$$\left[\alpha_1 \frac{\partial \Psi_1(x)}{\partial x_i} + \alpha_2 \frac{\partial \Psi_2(x)}{\partial x_i} + \cdots + \alpha_{\nu+1} \frac{\partial \Psi_{\nu+1}(x)}{\partial x_i}\right]_{x=y} = 0 \tag{8}$$
$$i = 1, 2, 3.$$

Für $y = x^{(1)}$ treten also in der Matrix (2) statt der ersten Horizontalreihe drei aus den linken Seiten der Gleichungen (8) entstehende Horizontalreihen auf. Gleichzeitig fallen aber von den μ Punkten des Schnittpunktsystems zwei nach $x^{(i)}$, so dass wir nur noch $\mu - 1$ getrennte Punkte zu betrachten haben. Ebenso haben wir beim Auftreten von δ Doppelpunkten der C_n nur noch $\mu - \delta$ getrennte Punkte $x^{(i)}$. An Stelle der Matrix (2) tritt daher alsdann eine Matrix mit $\mu + \delta$ Horizontal- und $\nu + 1$ Verticalreihen, deren Verschwinden also mit $\mu - \nu + \delta$ Bedingungen äquivalent ist. Sollen ferner ausserdem im Schnittpunktsystem δ' Doppelpunkte der C_m vorkommen, von denen keiner in einem Doppelpunkte der C_n liegt, so besteht jenes Punktsystem nur noch aus $\mu - \delta - \delta'$ getrennten Punkten. Die in (2) auftretende Matrix enthält daher jetzt noch $\mu + \delta - \delta'$ Horizontalreihen; und die Zahl der durch ihr Verschwinden dargestellten Bedingungen wird gleich

$$\mu - \nu + \delta - \delta' = mn - \tfrac{1}{2} n (n + 3) + \delta - \delta'.$$

Ebenso tritt an Stelle von (5) eine Matrix mit $\mu + \delta' - \delta$ Horizontal- und $\mu - \pi + 1$ Verticalreihen. Die Zahl der durch das Verschwinden der letzteren Matrix dargestellten Bedingungen wird daher gleich

$$\pi - \delta + \delta' = \tfrac{1}{2}(n - 1)(n - 2) - \delta + \delta'.$$

Auch in dem hier betrachteten Falle ist daher die Gesammtheit der zwischen den $mn - \delta - \delta'$ Punkten bestehenden Bedingungen gleich $mn - 3n + 1$. Ist wieder die C_n fest gegeben, so sind damit $mn - \frac{1}{2} n (n + 3) + \delta$ Bedingungen als von selbst erfüllt betrachtet; es bestehen also noch $\frac{1}{2}(n - 1)(n - 2) - \delta$ Relationen, woraus sich wieder der Eingangs erwähnte Satz ergibt. —

Den betrachteten Theoremen über die Schnittpunkte *zweier* algebraischen Curven kann man nun zahlreiche andere gegenüberstellen und aus ihnen ableiten, welche sich auf Schnittpunktsysteme *dreier* und *mehrerer* Curven beziehen. Hierfür geben wir im Folgenden einige Beispiele, die ihrer Anwendungen wegen von besonderem

Interesse sind; und zwar sollen sich letztere auf die Chasles'sche Erzeugungsweise einer gegebenen Curve beziehen. Wir beweisen zunächst den folgenden Satz*):

Eine Curve der n^{ten} Ordnung, wo:

$$n > p \quad \text{und} \quad n > q, \quad \text{aber} \quad n < p + q,$$

welche durch

$$pq - \tfrac{1}{2}(p + q - n - 1)(p + q - n - 2)$$

*Schnittpunkte zweier Curven p^{ter} und q^{ter} Ordnung geht, enthält auch die übrigen $\frac{1}{2}(p + q - n - 1)(p + q - n - 2)$ Schnittpunkte der letzteren.***)

Zum Beweise nehmen wir auf der C_p $\frac{1}{2}(n - q)(n - q + 3)$ Punkte beliebig an und legen durch sie eine Curve C_{n-q} der $(n - q)^{ten}$ Ordnung, was immer möglich, wenn $n - q < p$; ebenso legen wir durch $\frac{1}{2}(n - p)(n - p + 3)$ Punkte der gegebenen C_p eine Curve C_{n-p} der $(n - p)^{ten}$ Ordnung. Wir haben dann zwei Curven n^{ter} Ordnung, deren eine aus C_q und C_{n-q}, deren andere aus C_p und C_{n-p} besteht, und durch deren n^2 Schnittpunkte jede Curve n^{ter} Ordnung gehen muss, welche $\frac{1}{2}n(n + 3) - 1$ von denselben erhält. Nun ist aber:

$$(9)\quad \tfrac{1}{2}n(n+3) - 1 = \alpha + \tfrac{1}{2}(p - n)(p - n + 3) + \tfrac{1}{2}(q - n)(q - n + 3),$$
$$\text{wenn: } \alpha = pq - \tfrac{1}{2}(p + q - n - 1)(p + q - n - 2).$$

Alle Curven n^{ter} Ordnung also, welche durch α der gegebenen pq Punkte und durch die auf der C_p bez. C_q willkürlich gewählten Punkte gehen, gehen auch durch die übrigen $pq - \alpha$ Schnittpunkte von C_p und C_q. Dies sind aber auch *alle* Curven n^{ter} Ordnung, welche überhaupt durch die α Punkte gehen; denn die Mannigfaltigkeit *aller* dieser Curven ist gleich

$$\beta = \tfrac{1}{2}n(n + 3) - \alpha;$$

und unsere obige Construction liefert uns ∞^γ verschiedene Büschel von C_n, wo:

$$\gamma = \tfrac{1}{2}(p - n)(p - n + 3) + \tfrac{1}{2}(q - n)(q - n + 3)$$

also im Ganzen eine $\infty^{\gamma+1}$-Schaar von C_n; und wegen der Relation (9) ist in der That $\gamma + 1 = \beta$. *Alle* C_n durch die α Punkte, gehen also wirklich durch die übrigen $pq - \alpha$ Punkte; q. e. d. Vorausgesetzt wurde bei diesem Beweise, dass $n - q < p$, also auch

*) Hier, sowie überhaupt im Folgenden schliessen wir den Fall aus, dass in Schnittpunkten Doppelpunkte der betrachteten Curven liegen; letztere können *ausserdem* aber beliebig viele Doppel- und vielfache Punkte haben, auch in niedrige Curven zerfallen.

**) Vgl. Cayley: Cambridge and Dublin Math. Journal, vol. 3, 1843, p. 211.

$n - p < q$, oder $n < p + q$, wie oben angegeben wurde. Für $n = p + q - 1$ oder $n = p + q - 2$ sagt übrigens unser Satz nichts mehr aus. Für $n < q$ oder $n < p$ würde die Construction der Curven C_{n-q} oder C_{n-p} nicht mehr möglich sein.

Für $p = q = m$ folgt hieraus insbesondere:

Liegen von den m^2 Basispunkten eines Büschels von Curven m^{ter} Ordnung

$$\alpha = m^2 - \tfrac{1}{2}(2m - n - 1)(2m - n - 2)$$

auf einer Curve n^{ter} Ordnung, wo $n > m$ aber $n < 2m$, so liegen auch die übrigen $m^2 - \alpha$ Basispunkte jenes Büschels auf der Curve n^{ter} Ordnung.

Bevor wir dies letztere Resultat zu weiteren Anwendungen benutzen, sei hervorgehoben, dass in Vorstehendem eine specielle Lösung des vorhin gestellten Problems enthalten ist: in der Ebene Q Punkte so zu bestimmen, dass durch sie noch ∞^r Curven einer gegebenen linearen ∞^t-Schaar gehen. Wir haben nämlich hier:

$$t = \tfrac{1}{2} n (n + 3), \quad Q = pq, \quad r = \tfrac{1}{2} n (n + 3) - \alpha .$$

Eine solche Gruppe von Q Punkten ist eben durch jedes beliebige vollständige Schnittpunktsystem zweier Curven p^{ter} und q^{ter} Ordnung gegeben, wenn nur $n > q$, $n > p$, $n \leq p + q$; durch ein beliebiges System von pq Punkten dagegen würden weniger, nämlich $\left\{\tfrac{1}{2} n (n - 3) - pq\right\}$-fach unendlich viele C_n hindurchgehen.

Der zuletzt für $p = q = m$ ausgesprochene Satz wird nun von Wichtigkeit für die Frage, ob es immer möglich ist, für $m < n$ auf einer gegebenen C_n m^2 Punkte so zu bestimmen, dass durch sie noch einfach unendlich viele C_m hindurchgehen, eine Frage, die für die Untersuchung der Chasles'schen Erzeugungsweise der C_n von besonderem Interesse ist (p. 376). Für $n < 2m$ nämlich braucht man nach jenem Satze nur zu fragen, ob es möglich ist, $\alpha = m^2 - \tfrac{1}{2}(2m - n - 1) \cdot (2m - n - 2)$ Basispunkte eines Büschels von C_m auf eine gegebene C_n zu legen; die übrigen Basispunkte liegen dann von selbst auf der C_n. Die dazu nöthigen Bedingungen aber sind durch das Verschwinden aller t-gliedrigen Determinanten des Schemas (7) gegeben (indem dort $q = 1$), wenn:

$$t = \tfrac{1}{2} m (m + 3), \quad R = \alpha ;$$

was $2(\alpha - t + 1)$ Relationen zwischen α Unbekannten gibt (indem die α Punkte gezwungen sind, sämmtlich auf der C_n zu liegen). Von letzteren bleiben also willkürlich:

$$\alpha - 2(\alpha - t + 1) = m(m + 3) - m^2 - 2 + \tfrac{1}{2}(2m - n - 1)(2m - n - 2)$$
$$= \tfrac{1}{2}\left\{(2m - n)^2 + 3n - 2\right\} .$$

So viele von den α Punkten kann man daher auf der C_n beliebig annehmen.

Ist dagegen $n > 2m$, so haben wir in dem Schema (9): $R = m^2$, $t = \frac{1}{2} m (m + 3)$, $q = 1$ und also $m^2 - 3m + 2$ Relationen; d. h. die Zahl der willkürlich bleibenden Punkte ist gleich

$$m^2 - (m^2 - 3m + 2) = 3m - 2.$$

*Soll man also auf einer Curve n^{ter} Ordnung m^2 Punkte $(m < n)$ so bestimmen, dass sie die Basispunkte eines Büschels von Curven m^{ter} Ordnung bilden, so kann man von ihnen für $n \leq 2m$ noch $\frac{1}{2} \{(2m - n)^2 + 3n - 2\}$, dagegen für $n > 2m$ noch $3m - 2$ willkürlich auf der C_n annehmen.**)

Hat man nun diesem Satze gemäss einen Büschel von C_m gefunden, so kann man auch immer einen zweiten Büschel von C_{n-m} angeben, dessen $(n - m)^2$ Basispunkte ebenfalls sämmtlich auf der C_n liegen, und welcher auf den C_m-Büschel derartig projectivisch bezogen ist, dass die Schnittpunkte entsprechender Curven beider Büschel die C_n in Chasles'scher Weise erzeugen. Die Curven des Büschels m^{ter} Ordnung nämlich schneiden die C_n in $m(n - m)$ beweglichen Punkten. Legen wir nun durch $m(n - m) - \frac{1}{2}(m - 1)(m - 2)$ von diesen weiteren Schnittpunkten einer bestimmten Curve C_m des Büschels eine Curve C_{n-m}, *so geht diese auch durch die übrigen $\frac{1}{2}(m - 1)(m - 2)$ Punkte von selbst hindurch.* Sei nämlich C_m' eine zweite Curve unseres Büschels, und beschreibt man durch $\frac{1}{2}(n - m)(n - m + 3)$ der $(n - m) m$ weiteren Schnittpunkte von C_n und C_m' (welche also nicht auch auf C_m liegen) eine C_{n-m}, so haben wir zwei Curven n^{ter} Ordnung: die C_n und die $C_m + C_{n-m}$. Die Curve C_m' enthält nun

$$m^2 - \frac{1}{2}(2m - n - 1)(2m - n - 2) + \frac{1}{2}(n - m)(n - m + 3)$$
$$= nm - \frac{1}{2}(m - 1)(m - 2)$$

Durchschnittspunkte beider Curven, folglich auch noch $\frac{1}{2}(m - 1) \cdot (m - 2)$ weitere Schnittpunkte, und zwar, da C_m' durch alle m^2 Basispunkte des einen Büschels geht,

$$\frac{1}{2}(2m - n - 1)(2m - n - 2)$$

Punkte, die C_n und C_m gemeinsam sind, und also

$$(n - m) m - \frac{1}{2}(n - m)(n - m + 3)$$

Punkte, die C_n und C_{n-m} gemeinsam sein müssen. Die C_{n-m} geht also in der That durch alle $m(n - m)$ Schnittpunkte von C_m' mit

---

*) Vgl. Chasles: Détermination du nombre des points etc., Comptes rendus, 21. Septb. 1857, sowie Cremona's Theorie der ebenen Curven, p. 77 ff. in Curtze's Uebersetzung. — Für $n = 2m + 1$ und $n = 2m + 2$ sind beide Zahlen identisch, so dass die Angaben des Textes mit denen von Chasles übereinstimmen.

C_n.*) Legt man also durch die beregten $m(n-m)$ Schnittpunkte von C_n mit C_m' eine beliebige C_{n-m}, so schneidet letztere die C_n noch in

$$(n-m)\,n - m\,(n-m) = (n-m)^2$$

Punkten. Sind ferner $C_n = 0$, $C_m' = 0$, $C_{n-m} = 0$ die Gleichungen der betrachteten Curven, und ist $C_m = 0$ die Gleichung einer anderen die gewählten m^2 Basispunkte enthaltenden Curve m^{ter} Ordnung, so muss sich eine Curve C'_{n-m} so bestimmen lassen, dass identisch

$$C'_m C'_{n-m} \equiv C_m C_{n-m} + C_n\,,$$

denn wir haben es nur mit einfachen Schnittpunkten zu thun. Dann aber geht die C'_{n-m} ebenfalls durch die $(n-m)^2$ Punkte, welche auf C_n und C_{n-m}, aber nicht auf C'_m, liegen. D. h. der Büschel $C_{n-m} + \lambda C'_{n-m} = 0$ ist dem Büschel $C'_m + \lambda C_m = 0$ projectivisch und erzeugt die C_n in verlangter Weise. Wir sprechen dies in folgendem Satze aus:

*Liegen die m^2 Basispunkte eines Büschels von C_m auf einer C_n, so gibt es immer einen zu ihm projectivischen Curvenbüschel von C_{n-m}, dessen $(n-m)^2$ Basispunkte ebenfalls auf der C_n liegen, und welcher mit jenem ersten Büschel durch den Schnitt je zweier entsprechenden Curven die C_n erzeugt.***)

Durch vorstehende Betrachtungen ist gleichzeitig der vollständige Beweis erbracht, dass *jede* C_n durch zwei projectivische Curvenbüschel m^{ter} und $(n-m)^{\text{ter}}$ Ordnung erzeugt werden kann, von deren Basispunkten keiner in einem Doppelpunkte der C_n liegt; dabei kann m alle Werthe von 1 bis $n-1$ annehmen. —

Von dem hier zuletzt bewiesenen Satze, der offenbar auch für eine zerfallende Curve C_n gültig ist, wollen wir zum Schlusse noch eine andere Anwendung machen, die uns zu interessanten Specialfällen führt.

Es seien $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ zwei Curven n^{ter} Ordnung. Dieselben bestimmen einen Büschel $C_1 + \varkappa C_2 = 0$ von solchen Curven mit $n^2 = p + q$ Basispunkten. Die Zahl q soll nun so gewählt werden, dass durch q jener n^2 Basispunkte eine Curve $K_3 = 0$ der $(n-r)^{\text{ten}}$ Ordnung gerade bestimmt wird, d. h. wir nehmen

---

*) Es folgt dies auch direct aus dem allgemeineren Satze von Cayley: *Liegen von den Schnittpunkten zweier Curven C_m und C_n, wo $m < n$, $mp - \frac{1}{2}(m+p-n-1)(m+p-n-2)$ auf einer Curve C_p, wo $p < n$, so liegen auf dieser Curve noch weitere $\frac{1}{2}(m+p-n-1)(m+p-n-2)$ Punkte, und die übrigen $m(n-p)$ Punkte liegen auf einer Curve der $(n-m)^{ten}$ Ordnung.*

**) Vgl. Chasles: Deux théorèmes généraux sur les courbes et les surfaces géométriques de tous les ordres; Comptes rendus, 28. décb. 1857.

(10) $$q = \tfrac{1}{2}(n-r)(n-r+3),$$
und also:
(11) $$p = n^2 - q = \tfrac{1}{2}n(n+2r-3) - \tfrac{1}{2}r(r-3).$$
Durch die p übrigen Schnittpunkte von C_1 mit C_2 legen wir eine beliebige dritte Curve n^{ter} Ordnung: $C_3 = 0$. Dann bilden die beiden Curven C_3 und K_3 zusammen eine Curve $C_3 \,.\, K_3 = 0$ von der $(2n-r)^{\text{ten}}$ Ordnung, auf welcher die Basispunkte des Büschels $C_1 + \varkappa C_2 = 0$ vertheilt liegen. Nach dem zuletzt bewiesenen Theoreme muss es daher einen zum Büschel $C_1 + \varkappa C_2 = 0$ projectivischen Büschel $(n-r)^{\text{ter}}$ Ordnung geben, dessen $(n-r)^2$ Basispunkte ebenfalls auf $C_3 \,.\, K_3 = 0$ vertheilt liegen, und welcher mit dem Büschel $C_1 + \varkappa C_2 = 0$ durch die Schnittpunkte entsprechender Curven die Curve $C_3 \,.\, K_3 = 0$ erzeugt. Sind nun $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ diejenigen Curven des zweiten Büschels, welche den Curven*) $C_2 = 0$, $C_1 = 0$ bez. des ersten entsprechen, so entsteht die Frage, wie viele von den $(n-r)^2$ Basispunkten des zweiten Büschels auf die C_3, wie viele auf die K_3 fallen. Nun schneidet der Büschel $C_1 + \varkappa C_2 = 0$ die C_3 in $n^2 - p = q$ beweglichen Punkten; Gleiches gilt daher auch von dem Büschel $K_2 + \varkappa K_1 = 0$. Die Curven des letzteren treffen also die C_3 noch in $\lambda = n(n-r) - q$ *festen* Punkten; und folglich liegen auf K_3 noch $\mu = (n-r)^2 - \lambda$ Basispunkte des Büschels, wo nun wegen (10) und (11):

(12) $$\begin{aligned} \lambda &= p - rn &&= \tfrac{1}{2}n(n-3) - \tfrac{1}{2}r(r+3) \\ \mu &= (n-r)^2 - \lambda &&= \tfrac{1}{2}(n-r)^2 + \tfrac{3}{2}(n+r) - nr. \end{aligned}$$

Da ferner die Gleichung der Curve $C_3 \,.\, K_3 = 0$ durch Elimination von $\varkappa$ aus den Gleichungen

$$C_1 + \varkappa C_2 = 0, \quad K_2 + \varkappa K_1 = 0$$

hervorgehen muss, so besteht zwischen C_1, C_2, C_3, K_1, K_2, K_3 eine Identität der Form:

(13) $$\alpha_1 C_1 K_1 + \alpha_2 C_2 K_2 + \alpha_3 C_3 K_3 \equiv 0,$$

wo die α_i Constante bedeuten. Zwischen den drei Curven C_i und den drei Curven K_i herrscht sonach vollkommene Symmetrie, und wir können folgenden Satz aussprechen:

Schneiden sich drei Curven C_1, C_2, C_3 der n^{ten} Ordnung in denselben

$$p = \tfrac{1}{2}n(n+2r-3) - \tfrac{1}{2}r(r-3)$$

Punkten, so schneiden sie sich paarweise noch in weiteren

---

*) Die Indices 1, 2 sind so gewählt, dass die Gleichung der Curve $K_3 C_3 = 0$ in der Form $C_1 K_1 - C_2 K_2 = 0$ erscheint, dass also zwischen C_1, C_2, C_3, K_1, K_2, K_3 eine Identität der Form (13) besteht.

$$q = \tfrac{1}{2}(n - r)(n - r + 3)$$

Punkten und bestimmen dadurch drei Curven K_1, K_2, K_3 *der* $(n - r)^{ten}$ *Ordnung. Diese letzteren gehen alsdann, wenn* λ, μ *wie in* (12) *bestimmt werden, durch dieselben* μ *Punkte der Ebene, während ihre übrigen* λ *Schnittpunkte paarweise genommen bez. auf den Curven* C_1, C_2, C_3 *liegen.**)

Für $n = 2$, $r = 1$ ergibt sich hieraus der bekannte Satz:

*Schneiden sich drei Kegelschnitte in denselben zwei Punkten der Ebene, so schneiden sie sich paarweise in noch weiteren zwei Punkten; die durch diese Punktepaare bestimmten drei Geraden gehen durch denselben Punkt der Ebene.***)

Ebenso folgt z. B. für $n = 3$, $r = 2$:

Schneiden sich drei Curven 3ter *Ordnung in denselben 7 Punkten, so schneiden sie sich paarweise in noch 2 Punkten; die dadurch bestimmten 3 Geraden bilden ein Dreiseit, dessen 3 Eckpunkte bez. auf die drei Curven* 3ter *Ordnung zu liegen kommen.* —

Diese Anwendungen und Beispiele werden hinreichen, um das mächtige Hülfsmittel zu kennzeichnen, welches wir in den Schnittpunktsätzen besitzen, indem letztere auch die ganze Ebene beherrschen, während wir früher immer eine feste Curve zu Grunde legten. Wir wenden uns nunmehr zu Untersuchungen anderer Art, für die dann gerade wieder der Begriff der adjungirten Curven von besonderer Wichtigkeit werden wird.

VI. Die zu einer Curve gehörigen algebraischen Integrale.

Wir haben schon wiederholt auf den innigen Zusammenhang zwischen der Geometrie auf einer Curve und der Theorie gewisser zu ihr gehöriger Integrale hingewiesen, wir haben insbesondere bei den Curven dritter Ordnung diesen Zusammenhang bereits ins Einzelne verfolgt: das elliptische Integral erster Gattung, dessen Modul mit dem Doppelverhältnisse der Curve in bestimmter Weise zusammenhing, erschien hier auf's Engste mit der Theorie der Schnittpunktsysteme verknüpft (vgl. p. 602 ff.). Die allgemeine Erörterung der hier vorkommenden Verhältnisse soll uns nun beschäftigen; und zwar wollen wir zunächst folgende Gegenstände erledigen

1) Einführung einer bestimmten Form für die allgemeinsten algebraischen Integrale,

---

*) Für $r = 1$ und $r = 2$ ist dieser Satz von Olivier gegeben: Crelle's Journal, Bd. 70, p. 156.

**) Dieser Satz ist ja nichts anderes als die projectivische Verallgemeinerung des bekannten, dass die Chordalen dreier Kreise durch denselben Punkt gehen (p. 155).

2) Zurückführung der letzteren auf gewisse Normalformen,

3) Untersuchung der Unendlichkeitspunkte dieser Normalformen.

Die so gewonnenen Normalformen werden weiterhin auf noch einfachere Typen reducirt werden; und es bleibt dann übrig für letztere das Abel'sche Theorem aufzustellen, sowie das sogenannte Umkehrproblem der Abel'schen Integrale zu erledigen*), um alle Mittel für die geometrischen Anwendungen bereit zu haben. Hervorgehoben sei sogleich, dass die Eigenschaften der hier auftretenden Integrale invarianten Charakter gegenüber allen eindeutigen Transformationen der Grundcurve bewahren, wie später genauer gezeigt werden soll; es wird dadurch von Neuem gerechtfertigt erscheinen, wenn wir die Theorie dieser eindeutigen Transformationen an die Spitze gegenwärtiger Untersuchungen stellten.

Unter einem *algebraischen oder* Abel'*schen Integrale* versteht man ein solches, bei welchem die Function unter dem Integralzeichen derartig irrational von der Veränderlichen x abhängt, dass sie als rationale Function *zweier* Veränderlichen x, y darstellbar ist, wenn zwischen letzteren eine bestimmte (und für alle Werthe von x dieselbe) algebraische Gleichung:

$$F(x, y) = 0$$

besteht. Dieselbe ist eben *die Gleichung der Grundcurve*, zu welcher das betreffende Integral gehört. Das Integral selbst kann man dann nach dem Vorgange von Riemann immer in der Form annehmen**):

---

*) Die Theorie der Abel'schen Integrale und Functionen muss hier im Allgemeinen als bekannt vorausgesetzt werden. Nur die rein algebraischen Betrachtungen über die Differentiale der Abel'schen Integrale und das Abel'sche Theorem sollen im Texte etwas ausführlicher gegeben werden. Im Uebrigen stellen wir die benutzten Sätze nur immer kurz zusammen und verweisen wegen näherer Ausführungen auf die betreffenden Originalarbeiten, insbesondere auf folgende Schriften:

B. Riemann: Theorie der Abel'schen Functionen, Crelle's Journal, Bd. 54; im Folgenden kurz bezeichnet mit: *R. A. F.*

A. Clebsch und P. Gordan: Theorie der Abel'schen Functionen, Leipzig 1866; im Folgenden kurz bezeichnet mit: *Cl.* u. *G. A. F.*

Für die *hyperelliptischen* Integrale vgl. besonders Weierstrass: Crelle's Journal, Bd. 47 und 52; C. Neumann: Theorie der Abel'schen Integrale, Leipzig 1865; Prym: Neue Theorie der ultraelliptischen Functionen, Denkschriften der Math.-phys. Classe der Wiener Academie, Bd. 24, 1864 und: Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche, Denkschriften der schweizerischen Gesellschaft, Bd. 22, Zürich 1866. Die späteren Arbeiten von Weierstrass über diese Theorien sind bisher nicht allgemeiner bekannt geworden.

**) Vgl. R. A. F. §. 9. — Ist das Integral sonst nicht in der Form (1) gegeben, so kann man letztere ja immer einfach herstellen, indem man Zähler und Nenner der Function unter dem Integralzeichen mit $\frac{\partial F}{\partial y}$ multiplicirt.

$$(1) \qquad \int \frac{\Psi\, dx}{\frac{\partial F}{\partial y}},$$

wo Ψ eine rationale, gebrochene algebraische Function in x, y bedeutet, während zwischen x, y die Gleichung n^{ter} Ordnung $F = 0$ besteht, d. h. während x, y die Coordinaten eines Punktes der Grundcurve n^{ter} Ordnung bedeuten. Wir wollen das Integral jedoch immer in einer etwas anderen, von Aronhold gegebenen Form annehmen, indem wir statt x, y homogene Coordinaten x_1, x_2, x_3 einführen, wodurch auch äusserlich den Forderungen der Symmetrie sowie der projectivischen Denkweise (dem invarianten Charakter des Differentials) mehr Rechnung getragen wird. Dadurch ist dann zugleich ein Zusammenhang mit der ternären Algebra angezeigt, welcher für die Behandlung der Integrale von Bedeutung sein kann. Wir schreiben nämlich das Integral immer in der Form:

$$(2) \qquad V = \int \frac{\Psi\, \Sigma \pm c_1 x_2 dx_3}{c_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}} = \int \frac{\Psi\, (c\, x\, dx)}{n\, a_x^{\,n-1} a_c},$$

wo nun c_1, c_2, c_3 die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Ebene bedeuten, und x_1, x_2, x_3 durch die Gleichung einer Curve n^{ter} Ordnung $f \equiv a_x^n = 0$ an einander gebunden sind, während Ψ jetzt eine homogene gebrochene Function $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung in den x_i ist. — Ehe wir jedoch allgemein auf das Wesen dieser Darstellung eingehen, möge dieselbe an einem einfachsten Beispiele (für $n = 2$) erörtert werden*); die weiteren Verallgemeinerungen ergeben sich dann von selbst.

Wir behandeln das Integral

$$(3) \qquad V = \int \frac{dx}{\sqrt{A x^2 + B x + C}},$$

welches gewöhnlich mittelst wiederholter Substitutionen auf einen Logarithmus zurückgeführt wird, während wir dasselbe, von der homogenen Schreibweise ausgehend, zugleich in allgemeinerer Form direct auswerthen werden. Wir bringen es zunächst auf die Form der Integrale (1) und (2). Das Wurzelzeichen nämlich können wir dadurch fortschaffen, dass wir x mit einer neuen Variabeln y durch eine quadratische Gleichung verbinden. Letztere sei:

---

*) Vgl. Aronhold: Ueber eine neue algebraische Behandlungsweise der Integrale irrationaler Differentiale von der Form $\Pi\,(x, y)\,dx$, in welcher $\Pi\,(x, y)$ eine beliebige rationale Function ist, und zwischen x und y eine allgemeine Gleichung zweiter Ordnung besteht. Crelle's Journal, Bd. 61. Es sei auf diese Arbeit zur Einführung in die im Texte verfolgten Vorstellungen nachdrücklich verwiesen.

$$f = a_{11}x^2 + 2\,a_{12}\,xy + a_{22}y^2 + 2\,a_{13}x + 2\,a_{23}y + a_{33} = 0;$$

dann findet man durch Auflösung nach y:

$$a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = \tfrac{1}{2}f'(y) = \sqrt{2(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})x - (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)x^2 - (a_{22}a_{33} - a_{23}^2)}.$$

Führen wir also die Bezeichnung ein:

$$A = -(a_{11}a_{22} - a_{12}^2), \quad B = 2(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}), \quad C = -(a_{22}a_{33} - a_{23}^2),$$

so wird in der That:

$$V = \int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}} = 2\int \frac{dx}{f'(y)}. \tag{4}$$

Wir verwandeln nun alle vorkommenden Functionen durch die Substitution:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

in homogene. Unsere Bedingungsgleichung wird dann:

$$f = \Sigma\Sigma a_{ik}x_i x_k \equiv a_x^2 = 0$$

und in V müssen wir setzen:

$$dx = \frac{x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3}{x_3^2}, \quad f'(y) = \frac{1}{x_3}\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{2\,a_x a_2}{x_3},$$

so dass:

$$V = 2\int \frac{dx}{f'(y)} = \int \frac{x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3}{x_3\,.\,a_x a_2}, \tag{5}$$

In dem Nenner tritt also noch eine lineare Function auf; dies war vorauszusehen, denn das Integral (3) wird für $x = \infty$, $y = \infty$, d. h. für einen Schnittpunkt des Kegelschnittes $f = 0$ mit der unendlich fernen Geraden, selbst unendlich; dasselbe muss daher bei der homogenen Form für den Schnittpunkt der Linie $x_3 = 0$ mit dem Kegelschnitte $a_x^2 = 0$ eintreten. Um nun von der Lage des Coordinatendreiecks unabhängig zu sein, werden wir statt V das Integral:

$$W = 2\int \frac{dx}{(u_1 x + u_2 y + u_3)\,f'(y)} = \int \frac{x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3}{u_x\,.\,a_x a_2}, \tag{6}$$

wo:

$$u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3,$$

der Betrachtung zu Grunde legen: *Die Integrale V und W sind also in projectivischem Sinne nicht von einander verschieden.* Zur Auswerthung beider werden wir hier auch auf demselben Wege gelangen, während bei dem gewöhnlich in der Integralrechnung angewandten Verfahren beide Fälle eine gesonderte Betrachtung erfordern.

Das Integral W lässt sich nun auf merkwürdige Weise in eine mehr *symmetrische* Form bringen. Wir haben nämlich zufolge der Bedingungsgleichung $f = 0$, wenn $f_i = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i}$:

$$(7)\qquad \begin{aligned} x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 = f = 0 \\ dx_1 f_1 + dx_2 f_2 + dx_3 f_3 = 0, \end{aligned}$$

und hieraus folgt:

$$(8)\quad f_1 : f_2 : f_3 : = x_2 dx_3 - x_3 dx_1 : x_3 dx_1 - x_1 dx_3 : x_1 dx_2 - x_2 dx_1 .$$

Ferner haben wir aus (6):

$$dW \,.\, f_2 \,.\, u_x = x_3 dx_1 - x_1 dx_3 ,$$

also auch, wenn $(x dx)_1 = x_2 dx_3 - x_3 dx_2$, etc., wegen der Gleichberechtigung der drei Coordinatenseiten nach (8):

$$dW \,.\, f_i \,.\, u_x = (x dx)_i , \quad (i = 1, 2, 3)$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen bez. mit den willkürlichen Grössen c_i und addirt, so kommt:

$$dW (c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3) \cdot u_x = \Sigma \pm c_1 x_2 dx_3 = (c x dx) .$$

Wir erhalten also für das Integral (6) *die folgende homogene Darstellung:*

$$(9)\quad W = 2 \int \frac{dx}{(u_1 x + u_2 y + u_3) f'(y)} = \int \frac{(c x dx)}{u_x \cdot \Sigma c_i f_i} = \int \frac{(c x dx)}{u_x \cdot a_c a_x} .$$

Zur Auswerthung von W, dessen Werth von den c_i vollkommen unabhängig ist, weren wir jetzt diese willkürlichen Grössen passend bestimmen. Zu dem Zwecke benutzen wir den folgenden allgemeinen Satz:

Die Determinante $(c x dx)$, *dividirt durch das Product zweier ternären algebraischen Formen* φ, ψ, *ist proportional zu einem vollständigen Differentiale, wenn man die* c_i *proportional zu den zweigliedrigen Determinanten aus den ersten Differentialquotienten von* φ *und* ψ *nach* x_1, x_2, x_3 *setzt, d h. wenn:*

$$\varrho c_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\frac{\partial \psi}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, \quad \varrho c_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\frac{\partial \psi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3},$$

$$\varrho c_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}.$$

Der Beweis ist ausserordentlich einfach. Sei nämlich:

$$\varphi = a_x^m , \quad \psi = \alpha_x^n ,$$

so wird:

$$\varrho c_i = m n \,.\, (a \alpha)_i \, a_x^{m-1} \alpha_x^{n-1} ,$$

und also nach einer bekannten Identität (vgl. V. p. 283):

$$\begin{aligned} \varrho\,(c x dx) &= mn\,(a_x \alpha_{dx} - \alpha_x a_{dx})\, a_x^{m-1} \alpha_x^{n-1} \\ &= m\varphi \,.\, d\psi - n\psi \,.\, d\varphi , \end{aligned}$$

und somit:

$$(10)\qquad \varrho \frac{(c x dx)}{\varphi \cdot \psi} = m \frac{d\psi}{\psi} - n \frac{d\varphi}{\varphi}, \quad \text{q. e. d.}$$

Für unsern Fall setzen wir nun:

$$(11) \qquad \varphi = u_x, \quad \psi = a_x a_c, \qquad \varrho c_i = (ua)_i a_c;$$

dann wird nach (10):

$$(12) \qquad W = \int \frac{(c\,x\,d\,x)}{u_x \cdot a_x a_c} = \frac{1}{\varrho} \int \left\{ \frac{d\,(a_x a_c)}{a_x a_c} - \frac{d\,(u_x)}{u_x} \right\} = \frac{1}{\varrho} \log \frac{a_x a_c}{u_x},$$

wo ϱ ein noch zu bestimmender Factor ist. Zu dieser Bestimmung führt folgende Betrachtung. Aus (11) ergibt sich:

$$(13) \qquad u_c = 0 \quad \text{und} \quad a_c^2 = 0;$$

wir haben also durch die Substitution (11) *für den Punkt c einen der Schnittpunkte der Geraden* $u_x = 0$ *mit dem Kegelschnitte* $f = 0$ *gewählt.* Wir brauchen nun allerdings nur die Verhältnisse der c_i zu kennen; denn eine gleichzeitige Aenderung derselben um denselben Factor würde nur die willkürliche Constante des Integrals beeinflussen. Gleichwohl müssen wir der Grösse ϱ in (11) hier einen bestimmten Werth beilegen, da auf beiden Seiten der Gleichungen (11) dieselben Verhältnisszahlen c_1, c_2, c_3 vorkommen. In der That durch Multiplication der c_i bez. mit willkürlichen Grössen v_i und durch Addition der Producte ergibt sich die Identität:

$$(14) \qquad \varrho v_c = (a v u)\, a_c;$$

es muss also ϱ ein Ausdruck erster Ordnung in den v_i und a_{ik} sein. Wir wollen nun mit c_i' die Coordinaten des zweiten Schnittpunktes der Linie u mit $f = 0$ bezeichnen, so dass

$$\sigma u_1 = c_2 c_3' - c_3 c_2', \quad \sigma u_2 = c_3 c_1' - c_1 c_3', \quad \sigma u_3 = c_1 c_2' - c_2 c_1';$$

dann folgt aus (14) für $v_i = b_i b_{c'}$ ($f = a_x^2 = b_x^2$):

$$(15) \qquad \begin{aligned} \varrho b_c b_{c'} &= (a b u)\, a_c b_{c'} = \tfrac{1}{2} (a b u)(a_c b_{c'} - b_c a_{c'}) \\ &= \frac{\sigma}{2} (a b u)^2. \end{aligned}$$

Andererseits haben wir wegen $a_c^2 = 0$:

$$\begin{aligned} \sigma \varrho v_c = \sigma\, (a v u)\, a_c &= (a_c v_{c'} - v_c a_{c'})\, a_c \\ &= - v_c \,.\, a_c a_{c'} = - v_c \,.\, b_c b_{c'}, \end{aligned}$$

und also:

$$\sigma = \frac{1}{\varrho} b_c b_{c'}.$$

Setzen wir dies in (15) ein, so kommt schliesslich:

$$\varrho^2 = \tfrac{1}{2} (a b u)^2 = \tfrac{1}{2} F,$$

wenn wir mit F, wie schon früher (p. 285), die zugehörige Form von f bezeichnen:

$$F = (abu)^2 = -2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Damit ist folgendes Theorem bewiesen:

Wenn man unter der Voraussetzung, dass $f(x, y) \equiv f(x_1, x_2, x_3) \equiv a_x^2 \equiv b_x^2 = 0$ *ist, das Integral*

$$W = 2\int \frac{dx}{(u_1 x + u_2 y + u_3) f'(y)} = \int \frac{(c\,x\,dx)}{u_x \cdot a_x a_c}$$

auswerthen soll, so nehme man für die c_i *ein den Gleichungen:*

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad u_x = 0$$

genügendes Werthsystem, was durch Auflösung der linearen Gleichungen:

$$\sqrt{\tfrac{1}{2} F}\, c_1 = (u\,a)_1 a_c, \quad \sqrt{\tfrac{1}{2} F}\, c_2 = (u\,a)_2 a_c, \quad \sqrt{\tfrac{1}{2} F}\, c_3 = (u\,a)_3 a_c$$

geschehen kann), in denen* F *die zugehörige Form* $(a\,b\,u)^2$ *von* f *bedeutet; alsdann ist*

$$W = \frac{1}{\sqrt{\tfrac{1}{2} F}} \log \frac{a_x a_c}{u_x} + C. \tag{16}$$

Das Vorzeichen von $\sqrt{\tfrac{1}{2} F}$ *muss mit dem in den linearen Gleichungen benutzten übereinstimmen, und die in den Differentialausdruck einzuführende Wurzel der Gleichung* $f(x, y) = 0$ *mit der im Integralausdrucke zu wählenden.*

Um ein Beispiel für die Anwendbarkeit der Formel (16) auch in den gewöhnlich vorkommenden Fällen zu geben, sei

$$f = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = (x^2 + y^2 - 1)$$

also:

$$\tfrac{1}{2} F = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2, \quad y = \sqrt{1 - x^2} = \tfrac{1}{2} f'(y);$$

dann wird:

$$W = \int \frac{dx}{(u_1 x + u_2 \sqrt{1 - x^2} + u_3)\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 - u_3^2}} \log \frac{c_1 x + c_2 y - c_3}{u_1 x + u_2 y + u_3},$$

wo die c_i aus zwei der folgenden Gleichungen zu bestimmen sind $(\varrho = \sqrt{\tfrac{1}{2} F})$:

$$\varrho c_1 = -u_2 c_3 - u_3 c_2, \quad \varrho c_2 = u_3 c_1 + u_1 c_3, \quad \varrho c_3 = u_1 c_2 - u_2 c_1. \tag{17}$$

Setzt man noch $u_1 = u_2 = 0$, $u_3 = 1$, so wird $\varrho = \sqrt{-1} = i$ und nach (17): $c_3 = 0$, $c_1 = i\, c_2 = i$, wenn $c_2 = 1$, also:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{i} \log (x i + y) = \operatorname{arc\,sin} x.$$

---

*) Vgl. über die Bestimmung der c_i p. 107 und 116.

Setzt man ferner $u_1 = u_3 = 0$, $u_2 = 1$, so wird $\varrho = 1$, $c_2 = 0$, $c_1 = - c_3$, also $c_1 = 1$, wenn $c_3 = - 1$, und folglich:

$$\int \frac{dx}{y\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{dx}{1-x^2} = \log \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} = \tfrac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}\,.$$

Nehmen wir endlich noch $u_1 = 1$, $u_2 = u_3 = 0$, also $\varrho = 1$, $c_1 = 0$, $c_2 = c_3 = - 1$, so ergibt sich:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \log \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}\,.$$

Dies Beispiel wird genügen, um den Gebrauch der homogenen Form eines algebraischen Integrals zu erklären, und die Vorzüge derselben bei gewissen allgemeineren Fragestellungen zu erläutern. —

Schon an diesem Beispiele trat der invariante Charakter des Differentials dW hervor. In der That kann man jedes Differential dV der Form (2) als simultane Functionalinvariante der Grundcurve $f = 0$ und der auf $f = 0$ gelegenen Null- und Unendlichkeitspunkte der Function Ψ betrachten. Zunächst nämlich ist klar, dass der Differentialausdruck, als homogene Function nullter Ordnung der x_i, sich nicht ändert, wenn man die x_i gleichzeitig um denselben Factor ändert, und dass derselbe, ebenso wie für $n = 2$ in obigem Beispiele, wegen der Gleichungen (7) *völlig unabhängig von dem Punkte c ist* und nur durch die Function Ψ bestimmt wird. Für eine beliebig lineare Transformation aber gilt der Satz, dass *das Differential dV sich be einer solchen nur um den Factor der Substitutionsdeterminante ändert.* *) Setzen wir nämlich:

$$x_i = a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + a_{i3} y_3\,,$$

so wird, wenn k_i die Coordinaten des dem Punkte c entsprechenden Punktes sind (vgl. p. 265):

$$r \,.\, (c\,x\,dx) = (k\,y\,dy)\,,$$

und wenn wir

$$f(x) = F(y)\,, \quad \Psi(x) = \Phi(y)$$

setzen, so kommt:

$$r\,dV = r \,.\, \frac{\Psi\,(c\,x\,dx)}{\Sigma c_i f_i} = \frac{\Phi\,(k\,y\,dy)}{\Sigma k_i F_i}\,.$$

---

*) Analoges gilt für jedes binäre Differential der Form:

$$\frac{\alpha_x^{\,n-2}\,(x\,dx)}{\sqrt[m]{a_x^{\,mn}}}\,.$$

Ein solches ist simultane Covariante der Formen $a_x^{\,mn}$, $\alpha_x^{\,n-2}$. Für $m = 2$ sind dies die hyperelliptischen Differentiale; für $m = 1$, $n = 2$ hat man das elliptische Differential, das als reine Covariante der Grundform aufzufassen ist.

Dies kann man z. B. benutzen, um das Integral V in die Form (1) überzuführen. Zu dem Zwecke setzen wir:

$$x_i = a_i t + b_i x + c_i y\,,$$

wo x, y, t die neuen Coordinaten bedeuten; es wird dann

$$f(x_1, x_2, x_3) = F(t, x, y), \quad \Psi(x_1, x_2, x_3) = \Phi(t, x, y)$$

$$\Sigma c_i f_i = f_1 \frac{\partial x_1}{\partial y} + f_2 \frac{\partial x_2}{\partial y} + f_3 \frac{\partial x_3}{\partial y} = \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{n}\frac{\partial F}{\partial y}\,;$$

endlich:

$$(c\,x\,dx) = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 t + b_1 x + c_1 y & a_1 dt + b_1 dx + c_1 dy \\ c_2 & a_2 t + b_2 x + c_2 y & a_2 dt + b_2 dx + c_2 dy \\ c_3 & a_3 t + b_3 x + c_3 y & a_3 dt + b_3 dx + c_3 dy \end{vmatrix}$$
$$= (abc)\,.\,(t\,dx - x\,dt)\,;$$

und also, wenn man (abc) in Φ eingehen lässt und $t = 1$ setzt:

$$dV = n\,\frac{\Phi\,dx}{\frac{\partial F}{\partial y}}\,,$$

wo mittelst $F = 0$ y als Function von x definirt ist. —

Vermöge $f = 0$ ist das Differential dV natürlich immer nur von *einer* Variabeln abhängig. Um letztere explicite einzuführen, hat man indess im Allgemeinen höhere Gleichungen aufzulösen. Nur bei den hyperelliptischen Curven sind diese vom *zweiten* Grade, wie im Folgenden gezeigt werden soll.

Zunächst wollen wir für den Fall $n = 3$, wo dann $\Psi = 1$ sein mag, das Differential dV in die früher benutzte Form des elliptischen Differentials bringen (p. 649), wie es Aronhold*) zuerst gethan hat. Wir legen den Punkt c auf die Curve $f = 0$ und verstehen unter $u_x = 0$, $v_x = 0$ zwei durch c gehende Gerade. Jeder Strahl des Büschels

$$\varkappa u_x - \lambda v_x = 0 \tag{18}$$

schneidet dann die C_3 noch in zwei beweglichen Punkten; die Coordinaten derselben lassen sich also mittelst einer Quadratwurzel durch $\varkappa, \lambda$ ausdrücken. Es ist aber nicht nöthig dieselben wirklich zu berechnen; vielmehr kann man hier auch auf folgendem Wege zum Ziele gelangen. In dem Büschel (18) sind bekanntlich vier Tangenten der C_3 enthalten, deren Berührungspunkte nicht in c liegen. Die Parameterwerthe $\varkappa, \lambda$ derselben mögen durch die biquadratische Gleichung $\varphi(\varkappa, \lambda) = 0$ gegeben sein, so dass $\varphi(v_x, u_x) = 0$ das Product dieser vier Tangenten darstellt. Die Curve $\varphi = 0$ trifft die C_3 vierpunktig im Punkte c und je zweipunktig in den vier Berührungspunkten; in gleicher Weise aber wird die C_3 von der Curve $[a_x^2 a_c]^2 = 0$ getroffen. Man hat daher bei passender Wahl der in φ eingehenden Constanten:

---

*) Berliner Monatsberichte, 25. April 1861.

$$(19)\qquad [a_x{}^2 a_c]^2 = \varphi(v_x, u_x) + Af.$$

Ferner wird, da $\varrho c_i = (uv)_i$ gesetzt werden kann, und da $\sigma\lambda = u_x$, $\sigma\varkappa = v_x$:

$$(20)\qquad \varrho(cxdx) = u_x v_{dx} - v_x u_{dx} = \sigma^2(\lambda d\varkappa - \varkappa d\lambda)$$
$$\varphi(v_x, u_x) = \sigma^4 \varphi(\varkappa, \lambda),$$

und daher*):

$$dV = \frac{(cxdx)}{a_x{}^2 a_c} = \frac{1}{\varrho}\,\frac{\lambda d\varkappa - \varkappa d\lambda}{\sqrt{\varphi(\varkappa, \lambda)}}.$$

Den hier rechts stehenden Ausdruck erhält man jedoch unmittelbar in der verlangten, von den Invarianten S, T abhängenden Form, wenn man den Punkt c insbesondere in einen *Wendepunkt* der C_3 legt, so dass gleichzeitig:

$$f(c) = a_c{}^3 = 0, \quad \Delta(c) = \alpha_c{}^3 = 0.$$

Das Product der vier von c aus an die C_3 zu legenden Tangenten ist nun gegeben durch die Gleichung (p. 501):

$$(21)\qquad 3(Df)^2 - 4fD^2f = 0,$$

wenn: $\qquad Df = a_x{}^2 a_c, \quad D^2 f = a_x a_c{}^2.$

Unter diesen Tangenten muss auch die Wendetangente von c enthalten sein, und von der linken Seite der Gleichung (21) muss sich ein Factor $D^2 f$ absondern lassen. Um diese Absonderung auszuführen, hat man die Sätze zu benutzen, dass die Curve $f = 0$ als Hesse'sche Curve von drei anderen Curven des Büschels $\varkappa f - \lambda\Delta = 0$ aufgefasst werden kann, die durch die Gleichung (p. 527 und 560):

$$(22)\qquad G_1(\varkappa, -\lambda) = \varkappa^3 - \tfrac{1}{2}S\varkappa\lambda^2 + \tfrac{1}{3}T\lambda^3 = 0$$

bestimmt werden, und dass immer die Hesse'sche Curve von den Wendetangenten der Grundcurve berührt wird.**) Aus der letzteren Bemerkung geht hervor, dass die drei von c ausser $D^2 f = 0$ noch an $f = 0$ gehenden Tangenten eben die Wendetangenten der drei vermöge (22) zu $f = 0$ gehörigen Grundcurven im Punkte c sind. Diese Tangenten sind also durch (22) bestimmt, wenn gleichzeitig:

$$\varkappa D^2 f - \lambda D^2 \Delta = 0,$$

wo $D^2\Delta = \alpha_x \alpha_c{}^2$; das Product ihrer Gleichungen ist daher:

$$(23)\quad G_1(D^2\Delta, -D^2 f) = (D^2\Delta)^3 - \tfrac{1}{2}S\,.\,D^2\Delta\,.\,(D^2f)^2 + \tfrac{1}{3}T(D^2f)^3 = 0.$$

---

*) Die Berührungspunkte der vier Tangenten sind also die Verzweigungspunkte der zu dem Integrale gehörenden Riemann'schen Fläche.

**) Dies folgt unmittelbar daraus, dass die lineare Polare eines Punktes der Hesse'schen Curve in Bezug auf die Grundcurve erstere in einem Punkte berührt (p. 501), denn die Wendetangente der Grundcurve ist eben die lineare Polare des Wendepunktes; vgl. auch die Anmerkung auf p. 648.

Das Product des links stehenden Ausdrucks in $D^2 f$ muss nun mit dem in (21) links stehenden Ausdrucke bis auf einen noch zu bestimmenden constanten Factor M übereinstimmen; d. h. wir haben vermöge $f = 0$*):

$$M \, . \, 3 \, (Df)^2 = D^2 f \, . \, G_1 \, (D^2 \Delta, - D^2 f) \,, \tag{24}$$

was wieder mit Gleichung (19) übereinstimmt, denn der Büschel (18) ist hier durch den Büschel $\varkappa D^2 f - \lambda D^2 \Delta$ ersetzt. Aus dieser Gleichung ersieht man, dass M vom 8ten Grade in den Coëfficienten von f und von der 6ten Ordnung in den c_i sein muss. Da aber jede Covariante sechster Ordnung von f sich durch *eine* solche und durch f, Δ ausdrücken lässt (p. 570), so können wir wegen $a_c{}^3 = 0$, $\alpha_c{}^3 = 0$ setzen:

$$M = \varphi(c) \, C \,,$$

wenn φ jene eine Covariante ist (p. 574):

$$\varphi(x) = (a b \alpha) \, (a b \beta) \, a_x b_x \alpha_x{}^2 \beta_x{}^2$$

und wenn C einen Zahlenfactor bedeutet. Die Bestimmung des letzteren geschieht am einfachsten mit Hülfe der kanonischen Form. Nehmen wir der Einfachheit wegen für f eine Curve mit verschwindender Invariante S (was für die vorliegende Frage sonst irrelevant ist), so wird (p. 568 und 570):

$$f = x_1{}^3 + x_2{}^3 + x_3{}^3, \quad \Delta = 6 \, x_1 x_2 x_3 \,,$$
$$Df = x_1{}^2 c_1 + x_2{}^2 c_2 + x_3{}^2 c_3 \,, \quad D^2 f = x_1 c_1{}^2 + x_2 c_2{}^2 + x_3 c_3{}^2 \,,$$
$$\varphi(c) = 8 \, (c_2{}^3 c_3{}^3 + c_3{}^3 c_1{}^3 + c_1{}^3 c_2{}^3) \,, \quad S = 0 \,, \quad T = -6 \,,$$

oder, wenn wir für c den Wendepunkt mit den Coordinaten 0, 1, -1 wählen:

$$Df = x_2{}^2 - x_3{}^2 \,, \quad D^2 f = x_2 + x_3 \,, \quad \varphi(c) = -8 \,, \quad D^2 \Delta = -2 \, x_1 \,.$$

Hieraus ergibt sich durch eine einfache Rechnung:

$$3 \, (Df)^2 = 4 f \, . \, D^2 f - \tfrac{1}{2} D^2 f \left\{ 2 \, (D^2 f)^3 - (D^2 \Delta)^3 \right\} .$$

Andererseits wird nach (23) für unsern Fall:

$$G_1 \, (D^2 \Delta, - D^2 f) = (D^2 \Delta)^3 - 2 \, (D^2 f)^3 \,.$$

Wegen $M = \varphi(c) \, . \, C = -8 \, C$ folgt also vermöge $f = 0$ aus (24): $C = -\tfrac{1}{4}$, und es wird:

$$M = -\tfrac{1}{4} \varphi(c) \,. \tag{25}$$

---

*) Diese Gleichung besteht übrigens auch noch, wenn c ein beliebiger Punkt von f ist. Dann liegt nämlich der Mittelpunkt des Büschels $\varkappa D^2 f - \lambda D^2 \Delta = 0$ in dem Tangentialpunkte von c und die von dem Mittelpunkte ausgehenden Tangenten sind $D^2 f = 0$ und $G_1 \, (D^2 f, - D^2 \Delta) = 0$; vgl. p. 647. Es ist dann nur M in anderer Weise zu bestimmen.

Ist also c ein Wendepunkt von $f=0$, so besteht vermöge $f(c)=0$, $\Delta(c)=0$, $f(x)=0$ die Identität:

$$-\tfrac{3}{4}\varphi(c)\,.\,(Df)^2 = D^2 f\,.\,G_1(D^2\Delta,\ -D^2 f)\,. \tag{26}$$

Hiermit wäre der Nenner unseres Differentials in Function von $\varkappa = D^2\Delta$ und $\lambda = D^2 f$ berechnet. Für Berechnung des Zählers beachten wir, dass

$$\varrho\, c_i = (\alpha a)_i\, \alpha_c{}^2 a_c{}^2\,, \tag{27}$$

weil c der Schnittpunkt von $a_c{}^2 a_x = 0$ und $\alpha_c{}^2\alpha_x = 0$ ist, also auch:

$$\begin{aligned} \varrho\,(c\,x\,dx) &= \alpha_c{}^2 a_c{}^2\,(\alpha_x a_{dx} - a_x \alpha_{dx}) \\ &= D^2\Delta\,.\,d(D^2 f) - D^2 f\,.\,d(D^2\Delta) \\ &= \varkappa\, d\lambda - \lambda\, d\varkappa\,. \end{aligned} \tag{28}$$

Die Bestimmung des Factors ϱ geschieht nun in ganz derselben Weise, wie die des entsprechenden Factors in den Gleichungen (11). Es sei c' ein beliebiger Punkt der Linie $D^2\Delta = u_x = 0$; dann haben wir:

$$\sigma u_i = \sigma\,\alpha_i \alpha_c{}^2 = (c\,c')_i\,.$$

Ferner folgt aus (27):

$$\varrho v_c = (\alpha a v)\,\alpha_c{}^2 a_c{}^2 = (a v u)\, a_c{}^2\,,$$

also für $v_i = a_i a_c a_{c'} = b_i b_c b_{c'}$:

$$\begin{aligned} \varrho\, b_c{}^2 b_{c'} &= (a b u)\, a_c{}^2 b_c b_{c'} = \tfrac{1}{2}(a b u)\,(a_c b_{c'} - b_c a_{c'})\, a_c b_c \\ &= \frac{\sigma}{2}(a b u)^2\, a_c b_c = \frac{\sigma}{2}(a b \alpha)(a b \beta)\, a_c b_c \alpha_c{}^2 \beta_c{}^2\,. \end{aligned}$$

Andererseits haben wir wegen $a_c{}^3 = 0$:

$$\begin{aligned} \sigma\varrho\,.\,v_c &= \sigma\,(a v u)\, a_c{}^2 = (a_c v_{c'} - v_c a_{c'})\, a_c{}^2 \\ &= -v_c\,.\,a_c{}^2 a_{c'} = -v_c\,.\,b_c{}^2 b_{c'}\,. \end{aligned}$$

Und durch Combination dieser Relationen folgt:

$$\varrho^2 = -\tfrac{1}{2}(a b \alpha)(a b \beta)\, a_c b_c \alpha_c{}^2 \beta_c{}^2 = -\tfrac{1}{2}\varphi(c)\,.$$

Schliesslich geht also die Gleichung (28) über in:

$$-\tfrac{1}{2}\varphi(c)\,.\,(c\,x\,dx) = \varkappa\, d\lambda - \lambda\, d\varkappa\,;$$

und so gewinnen wir in Folge von (26) *das Resultat:*

$$dV = \frac{(c\,x\,dx)}{Df} = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,\frac{\varkappa\, d\lambda - \lambda\, d\varkappa}{\sqrt{\lambda\,(\varkappa^3 - \frac{1}{2}S\varkappa\lambda^2 + \frac{1}{3}T\lambda^3)}}\,,$$

oder endlich für $\varkappa = \mu$, $\lambda = 1$:

$$dV = -\sqrt{\tfrac{3}{2}}\,\frac{d\mu}{\sqrt{\mu^3 - \frac{1}{2}S\mu + \frac{1}{3}T}}\,;$$

und damit haben wir wieder die frühere Form (p. 649).

Die Herstellung dieser Normalform für dV kann noch in anderer, sehr eleganter Weise nach dem Vorgange von Hermite und Brioschi*) bewerkstelligt werden, wenn man eine höhere Substitution benutzt. Diese Transformation beruht auf der zwischen den Formen Ω, ψ, f, Δ bestehenden Identität, die früher von uns abgeleitet wurde (vgl. Gleichung (42), p. 640), nämlich:

$$24^2\Omega^2 = 384\,\psi^3 - 12\,\psi S_{\Delta,-f} + 2\,T_{\Delta,-f}.$$

Für $f=0$ haben wir nun insbesondere (p. 561):

$$S_{\Delta,-f} = S\Delta^4, \quad T_{\Delta,-f} = T\Delta^6,$$

und somit wird:

$$(29) \qquad 24^2\Omega^2 = 384\,\psi^3 - 12\,S\psi\Delta^4 + 2\,T\Delta^6.$$

Ferner ist identisch:

$$\begin{aligned}\Omega u_c &\equiv (a\alpha\psi)\,a_x^2\alpha_x^2\psi_x^5 \cdot u_c \\ &= \left\{(a\alpha u)\,\psi_c - (a\psi u)\,\alpha_c + (\alpha\psi u)\,a_c\right\}\,a_x^2\alpha_x^2\psi_x^5;\end{aligned}$$

und hieraus folgt für $u_i = (x\,dx)_i$, wenn wir $a_x^3 = 0$, $a_x^2 a_{dx} = 0$ voraussetzen:

$$\begin{aligned}\Omega\,(c\,x\,dx) &= a_x^2 a_c\,(\alpha_x^3\psi_x^5\psi_{dx} - \psi_x^6\Delta_x^2\Delta_{dx}) \\ &= \tfrac{1}{3}\,a_x^2 a_c\,(\tfrac{1}{2}\,\Delta\,d\psi - \psi\,d\Delta).\end{aligned}$$

Multipliciren wir also dV in Zähler und Nenner mit Ω, so wird wegen (29):

$$\begin{aligned}dV &= \frac{(c\,x\,dx)}{a_x^2 a_c} = \frac{1}{6}\,\frac{\Delta\,d\psi - 2\,\psi\,d\Delta}{\Omega} \\ &= \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\frac{\Delta\,d\psi - 2\,\psi\,d\Delta}{\sqrt{16\,\psi^3 - \frac{1}{2}\,S\Delta^4\psi + \frac{1}{12}\,T\Delta^6}}.\end{aligned}$$

Hierin endlich braucht man nur noch $4\,\psi = \varkappa$, $\Delta^2 = \lambda$ zu setzen, *um das Resultat zu erhalten:*

$$dV = \sqrt{\tfrac{8}{3}}\,\frac{\lambda\,d\varkappa - \varkappa\,d\lambda}{\sqrt{\lambda\,(\varkappa^3 - \frac{1}{2}\,S\varkappa\lambda^2 + \frac{1}{3}\,T\lambda^3)}}.$$

Diese Darstellung ist jedoch von der Aronhold'schen dadurch unterschieden, dass jetzt allen *achtzehn* Schnittpunkten der Curve sechster Ordnung $\varkappa\Delta^2 - 4\,\psi\lambda = 0$ mit $f=0$ derselbe Parameterwerth $\varkappa:\lambda$ entspricht, während früher nur je *zwei* beweglichen Schnittpunkten des Strahlbüschels $\varkappa D^2 f - \lambda D^2\Delta = 0$ der gleiche Parameterwerth zukam.

Ganz in derselben Weise lassen sich die zu den *hyperelliptischen Curven* gehörigen Integrale mittelst einer Quadratwurzel als Function eines Parameters darstellen, wenn man die Curve zuvor auf die Normalform transformirt hat; d. h. auf die Form (p. 719 f.):

---

*) Vgl. Crelle's Journal, Bd. 63, p. 30.

$$F(x, y) = y^2 \varphi(x) - \psi(x) = 0 .$$

In der That wird dann:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2 y \varphi(x) = 2 \sqrt{\varphi(x) \cdot \psi(x)},$$

und also

$$(30) \qquad \frac{\Psi(x, y) \cdot dx}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\Psi\left(x, \sqrt{\frac{\psi}{\varphi}}\right) \cdot dx}{2 \sqrt{\varphi \cdot \psi}} .$$

Im Nenner tritt hier also die Quadratwurzel aus einem Ausdrucke $(2p + 2)^{\text{ten}}$ *Grades in* x *auf.* Durch das Verschwinden des letzteren sind die vom p-fachen Punkte an die C_{p+2} zu ziehenden Tangenten dargestellt. Letztere Bemerkung gilt auch, wenn man die C_{p+2} in der Form

$$F(x, y) = y^2 \varphi_p(x) + 2 y \varphi_{p+1}(x) + \varphi_{p+2}(x) = 0$$

gegeben annimmt. Die Polare des unendlich fernen Punktes der Y-Axe:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial y} = y \varphi_p(x) + \varphi_{p+1}(x) = 0$$

nämlich schneidet die C_{p+2} in den $2p + 2$ Berührungspunkten der vom p-fachen Punkte ausgehenden Tangenten, deren Gleichung durch $X_{2p+2}(x) = 0$ gegeben sei, und hat im p-fachen Punkte von F ebenfalls einen p-fachen Punkt, dessen Zweige die der Grundcurve berühren, so dass in ihm $p(p + 1)$ Schnittpunkte liegen. Die Schnittpunkte der Curve $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 = 0$ mit $F = 0$ sind daher dieselben, wie die der Curve $X_{2p+2}(x) = 0$ mit $F = 0$; d. i. man kann setzen:

$$(31) \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 = C \cdot X_{2p+2}(x) + A \cdot f,$$

wo C eine Constante ist, eine Relation, welche der Gleichung (19) analog und in gleicher Weise zu verwerthen ist. —

Wir kehren zurück zur näheren Betrachtung unseres allgemeinen Differentials

$$dV = \frac{\Psi(c\, x\, dx)}{a_x^{n-1} a_c},$$

in dem Ψ eine beliebige algebraische Function der Ordnung $n - 3$ in den x_i bedeutet. Durch nähere Festsetzung über die Natur dieser Function wollen wir zunächst gewisse *Normalformen für die später allein zu betrachtenden Differentialausdrücke* herstellen. Dabei werden wir je nach dem Verhalten der Function Ψ in einfachen oder viel-

fachen Punkten von $f=0$ verschiedene Fälle nach einander zu behandeln haben; in allen diesen Fällen werden wir zeigen, dass es vor Allem nothwendig ist, solche Differentiale (und deren Integrale) in's Auge zu fassen, in denen Ψ eine ganze Function ist, oder bei denen im Nenner von Ψ nur die Potenz einer linearen Function der x_i auftritt. Weiterhin soll uns dann noch das Verhalten der gewonnenen Hauptformen in den Doppelpunkten von $f=0$ beschäftigen.

Es sei nun:

$$\Psi = \frac{M}{N},$$

wo der Nenner N eine ganze Function der m^{ten} Ordnung bedeuten möge, und also der Zähler, welcher auch eine ganze Function sei, bis zur $(m+n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung ansteigt. Die Curven $f=0$, $N=0$ schneiden sich in mn Punkten, deren Gesammtheit durch eine Gleichung

$$u_\chi^{mn} = 0$$

dargestellt werden kann.*) Die Coordinaten dieser Schnittpunkte bezeichnen wir bez. mit

$$x^{(1)},\ x^{(2)},\ x^{(3)}, \ldots x^{(mn)},$$

wo man sich für $x^{(i)}$ immer $x_1^{(i)}$, $x_2^{(i)}$, $x_3^{(i)}$ geschrieben denken mag. Diese Punkte verbinden wir mit einem beliebigen festen Punkte ξ. Die Gesammtheit der mn Verbindungslinien ist dann durch $(\chi x \xi)^{mn}=0$ dargestellt; und wir können setzen:

$$(32) \qquad (\chi x \xi)^{mn} = \prod_{i=1}^{i=mn} (x^{(i)}\, x \xi).$$

Wenn wir ferner, wie es zunächst geschehen soll, voraussetzen, dass *die Punkte $x^{(i)}$ sämmtlich von einander verschieden sind* (also auch nicht in vielfachen Punkten von f liegen), so muss sich der Ausdruck (32) jedenfalls in der Form

$$(33) \qquad (\chi x \xi)^{mn} = \mathsf{A} f + \mathsf{B} N$$

darstellen lassen, wo $\mathsf{B}=0$ eine Curve der Ordnung $m(n-1)$ ist, welche durch alle nicht auf $N=0$ liegenden Schnittpunkte der mn Strahlen mit $f=0$ geht. In Folge dessen wird für $f=0$:

---

*) In Betreff einer allgemeinen Methode zur Herstellung dieser Gleichung in symbolischer Form vgl. p. 281. Nimmt man insbesondere $\xi_1=1$, $\xi_2=0$, $\xi_3=0$, so wird die Gleichung des Strahlbüschels durch Elimination von x_1 aus $f=0$ und $N=0$ erhalten. Vgl. Cl. u. G. A. F. p. 5 ff. — Alsdann hängt $(\chi x \xi)^{mn}$ unmittelbar nur von der einen binären Veränderlichen $x_2 : x_3$ ab; vgl. die Fortsetzung des Textes.

$$\Psi = \frac{M \cdot \mathrm{B}}{(\chi x \xi)^{mn}},$$

wo nun wegen (32) im Nenner ein Product von lauter linearen Functionen steht. Die durch Nullsetzen der letzteren dargestellten Linien gehen aber alle durch denselben Punkt ξ, so dass der Nenner in Wahrheit nur von einer binären Veränderlichen abhängt, d. h. von dem Parameter des durch ξ gehenden Strahlbüschels. Man kann daher die Function Ψ nach den Gesetzen der binären Partialbruchzerlegung als Summe von einzelnen Gliedern darstellen, deren jedes nur eine lineare Function im Nenner hat; womit die oben behauptete Zurückführung des Differentials dV auf solche Normaldifferentiale geleistet wäre.

Dasselbe Resultat kann man aber auch leicht erreichen, ohne die binäre Veränderliche des Strahlbüschels explicite einzuführen; und wir gehen darauf hier um so mehr ein, als wir später auf analogem Wege auch complicirtere Reihenentwicklungen erledigen werden, die sich sonst durch wiederholte Partialbruchzerlegungen ergeben würden. Gleichzeitig werden wir in der Normirung der Differentiale noch einen Schritt weiter gehen, indem wir den Zähler so einrichten, dass nur zwei von den Verschwindungspunkten der linearen Function des Nenners zu Unendlichkeitspunkten des Integrals Veranlassung geben.

Zu dem Zwecke ist es nützlich, *den Punkt* ξ *mit einem der Punkte* $x^{(i)}$ — *sagen wir* $x^{(mn)}$ — *zusammenfallen zu lassen,* wie es im Folgenden geschehen soll. Ist dann die Gleichung der übrigen $mn-1$ Punkte $x^{(i)}$ durch $u_\psi{}^{mn-1} = 0$ gegeben, so können wir setzen:

$$(\chi x \xi)^{mn} = (\psi x \xi)^{mn-1} \cdot a_\xi{}^{n-1} a_x,$$

und an Stelle von (32) und (33) treten die Gleichungen:

$$(34) \quad (\psi x \xi)^{mn-1} = \prod_{i=1}^{i=mn-1} (x^{(i)} x \xi), \quad (\psi x \xi)^{mn-1} = Af + BN,$$

wo nun $B = 0$ eine Curve der Ordnung $mn - m - 1$ ist, welche durch alle nicht auf $N = 0$ gelegenen Schnittpunkte von $f = 0$ mit den $mn - 1$ von ξ ausgehenden Strahlen geht, und *von deren Schnittpunkten mit* f $mn - 2$ *in* ξ *selbst liegen.* Es wird dann auch:

$$\Psi = \frac{M\mathrm{B}}{(\chi x \xi)^{mn}} = \frac{MB}{(\psi x \xi)^{mn-1}}.$$

Zur Vereinfachung der Bezeichnungsweise setzen wir nun:

$$mn - 1 = \mu, \quad B = B_x{}^{\mu - m}, \quad M = M_x{}^{m+n-3}.$$

Wir legen sodann eine Curve C der Ordnung $\mu + n - 3$: $C_x{}^{\mu+n-3} = 0$ durch alle $n(\mu + n - 3)$ Schnittpunkte von $M = 0$ und $B = 0$ mit $f = 0$, welche ausserdem noch zu den Schnittpunkten $x^{(i)}$ von $N = 0$

mit $f = 0$ in besonderer Beziehung steht. Jedenfalls haben wir zunächst:

$$(35) \qquad C_x^{\mu+n-3} = M_x^{m+n-3} B_x^{\mu-m} + D \cdot f.$$

Die Curve C bestimmen wir nun näher in folgender Weise. Die Verbindungslinie eines Schnittpunktes $x^{(k)}$ mit dem Punkte ξ schneidet die Grundcurve in $n - 2$ weiteren Punkten, die mit $x^{(k,1)}, x^{(k,2)}, \ldots x^{(k,n-2)}$ bezeichnet seien; durch alle diese $n - 2$ Punkte soll die $(\mu - 1)^{\text{te}}$ Polare des Punktes $x^{(k)}$ in Bezug auf $C = 0$ hindurchgehen*), so dass wir die Gleichungen haben:

$$(36) \quad C_{x^{(k)}}^{\mu-1} C_{x^{(k,1)}}^{n-2} = 0, \qquad C_{x^{(k)}}^{\mu-1} C_{x^{(k,2)}}^{n-2} = 0, \; \ldots \; C_{x^{(k)}}^{\mu-1} C_{x^{(k,n-2)}}^{n-2} = 0$$

für alle Werthe von $k = 1$ bis $k = \mu$. Dies gibt $\mu(n-2)$ lineare Gleichungen für die Coëfficienten von C. Von letzteren sind wegen (35) nur noch $\frac{1}{2}\mu(\mu - 3) + 1$ willkürlich, nämlich die Coëfficienten des Ausdrucks D; und da die Bedingung

$$\tfrac{1}{2}\mu(\mu - 3) + 1 \geqq \mu(n - 2)$$

für $m > 1$ immer erfüllt ist, so ist es in der That möglich, die Curve C den Gleichungen (35) und (36) gemäss zu legen. Auf den Fall $m = 1$ kommen wir zum Schlusse noch zurück.

Mit Hülfe der Curve C bilden wir jetzt den folgenden Ausdruck $(\mu + n - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$S = \mu M_x^{m+n-3} B_x^{\mu-m} \prod_{k=1}^{k=\mu} (\psi x^{(k)} \xi)^{\mu-1} (\psi \eta \xi)$$

$$- C_x^{n-2} \sum_{k=1}^{k=\mu} \Big\{ C_{x^{(k)}}^{\mu-1} (x^{(k)} \eta \xi) \prod_{i=1}^{i=\mu}{}_{\cdot k} (x^{(i)} x \xi) (\psi x^{(i)} \xi)^{\mu-1} (\psi \eta \xi) \Big\}.$$

Hier sind η_i die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Ebene, und der Index k an dem zweiten Productzeichen soll andeuten, dass das betreffende in $C_{x^{(k)}}^{\mu-1} (x^{(k)} \eta \xi)$ multiplicirte (d. i. im k^{ten} Gliede der Summe auftretende) Product aus nur $\mu - 1$ Factoren zu bilden ist, indem der Factor für $i = k$ ausfallen soll; in dem ersten Gliede der Differenz S steht dagegen ein Product aus μ Factoren. *Diese Function S verschwindet zunächst für alle Schnittpunkte von B und f.* In der That fällt für $x = x^{(r,s)}$ das erste Glied von S wegen $B = 0$ fort, und in der Summe verschwinden alle Glieder, welche den Factor $(x^{(r)} x^{(r,s)} \xi)$ enthalten, da ja $x^{(r,s)}$ eben einen Punkt der Verbindungs-

*) Da diese Polare von der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung ist, kann man diese Bedingung noch gerade erfüllen; mehr als $n - 2$ Punkte der Geraden würde die Polare nicht enthalten können, ohne in die Gerade selbst und in eine Curve C_{n-3} zu zerfallen.

linie von $x^{(r)}$ mit ξ bezeichnet. Es bleibt so nur das dem Index $k = r$ entsprechende Glied der Summe; dieses fällt aber wegen (36) ebenfalls fort. *Ferner verschwindet S für alle μ Schnittpunkte von X mit f.* Für $x = x^{(r)}$ nämlich fallen wieder alle Glieder der in S auftretenden Summe, welche einen Factor $(x^{(r)} x^{(r)} \xi)$ enthalten würden, fort; und es bleibt nur das dem Index $k = r$ entsprechende Glied:

$$- C_{x^{(r)}}^{\mu + n - 3} (x^{(r)} \eta \xi) \prod_{i=1}^{i=\mu}{}_r (x^{(i)} x^{(r)} \xi) (\psi x^{(i)} \xi)^{\mu - 1} (\psi \eta \xi) .$$

Nun folgt aber aus (35):

$$C_{x^{(r)}}^{\mu + n - 3} = M_{x^{(r)}}^{m + n - 3} \cdot B_{x^{(r)}}^{\mu - m} ,$$

und aus der ersten Gleichung (34) durch Polarenbildung, da die übrigen Terme der links zunächst auftretenden Summe für $x = x^{(r)}$ Null werden:

$$(x^{(r)} \eta \xi) \prod_{i=1}^{i=\mu}{}_r (x^{(i)} x^{(r)} \xi) = \mu \cdot (\psi x^{(r)} \xi)^{\mu - 1} (\psi \eta \xi) .$$

Jenes aus der in S stehenden Summe übrig bleibende Glied wird daher gleich

$$- \mu M_{x^{(r)}}^{m + n - 3} B_{x^{(r)}}^{\mu - m} \prod_{i=1}^{i=\mu} (\psi x^{(i)} \xi)^{\mu - 1} (\psi \eta \xi) ,$$

d. h. bis auf das Vorzeichen gleich dem ersten Gliede von S für $x = x^{(r)}$; S selbst ist also Null, q. e. d. Die Gleichung $S = 0$ stellt sonach eine Curve dar, welche durch alle einfachen Schnittpunkte von $f = 0$ und $(\psi x \xi)^{\mu} = 0$ hindurchgeht. In ξ selbst jedoch verschwindet jedes Glied von S (nach unserer Bestimmung von $B = 0$), und folglich S selbst, $(\mu - 1)$-fach. Da aber die Curve C (für $m > 1$) durch die Bedingungen (36) noch nicht vollständig bestimmt ist, so können wir über C noch so verfügen, dass ein μ^{ter} Schnittpunkt von $S = 0$ mit $f = 0$ nach ξ fällt. *Deshalb kann man setzen:*

$$S = P \cdot f + R \cdot (\psi x \xi)^{\mu} , \tag{37}$$

wo $R = R_x^{n-3}$ eine homogene ganze Function $(n - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung in den x_i bedeutet. Dividiren wir endlich auf beiden Seiten von (37) mit dem Producte

$$(\psi x \xi)^{\mu} \cdot \prod_{k=1}^{k=\mu} (\psi x^{(k)} \xi)^{\mu - 1} (\psi \eta \xi) = (\psi x \xi)^{\mu} \cdot \Pi ,$$

so erhalten wir wegen (32) und (34) unter der Bedingung $f = 0$ für Ψ folgende Partialbruchzerlegung:

$$(38)\qquad \Psi = \frac{M}{N} = \frac{MB}{(\psi x \xi)^{\mu}}$$

$$= \frac{1}{\mu} \frac{R_x^{n-3}}{\Pi} + \frac{C_x^{n-2}}{\mu} \sum_{k=1}^{k=\mu} \frac{C_{x^{(k)}}^{\mu-1} \cdot (x^{(k)} \eta \xi)}{(\psi x^{(k)} \xi)^{\mu-1} (\psi \eta \xi) \cdot (x^{(k)} x \xi)} .$$

Jede algebraische Function $(n-3)^{ter}$ Ordnung, die nur für einzelne getrennte Punkte von f unendlich wird, können wir also mit Hülfe von $f = 0$ zerlegen in eine ganze Function $(n-3)^{ter}$ Ordnung und in eine Summe von Functionen, deren Nenner linear sind, und die nur in je zwei von den n Verschwindungspunkten des letzteren unendlich werden, indem für die übrigen $n-2$ wegen (36) *auch der Zähler Null wird.**)

Es bleibt uns jetzt noch der Fall $m = 1$ zu erledigen, wo also im Nenner von Ψ eine lineare Function $u = u_x$, im Zähler eine Function M von der $(n-2)^{ten}$ Ordnung steht, so dass $\Psi = \frac{M}{u}$. Die Schnittpunkte von u_x mit f mögen durch $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(n)}$ bezeichnet werden, und es seien $Q_2 = 0$, $Q_3 = 0$, $\ldots$ $Q_n = 0$ specielle Curven $(n-2)^{ter}$ Ordnung, welche alle Schnittpunkte der Geraden mit $f = 0$ enthalten, ausgenommen bez. für Q_2 die Punkte $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$, für Q_3 die Punkte $x^{(1)}$ und $x^{(3)}$, $\ldots$ für Q_n die Punkte $x^{(1)}$ und $x^{(n)}$. Dann kann man in der Gleichung:**)

$$M - k_2 Q_2 - k_3 Q_3 - \ldots - k_n Q_n = 0$$

die $n-1$ Constanten k_i so bestimmen, dass die hierdurch dargestellte Curve durch $n-1$ Schnittpunkte der Geraden mit $f = 0$ geht und also diese Gerade ganz enthält. Man hat nämlich, wenn man durch obere Indices andeutet, dass die Coordinaten des betreffenden Schnittpunktes in die Functionen M und Q_i eingesetzt werden sollen, nur die Gleichungen:

$$M^{(2)} - k_2 Q_2^{(2)} = 0, \quad M^{(3)} - k_3 Q_3^{(3)} = 0, \ldots M^{(n)} - k_n Q_n^{(n)} = 0$$

zu erfüllen, damit die Punkte $x^{(2)}, x^{(3)}, \ldots x^{(n)}$ auf obiger Curve liegen. Bestimmt man hieraus die k_i, so zerfällt jene Curve in eine Curve $(n-3)^{ter}$ Ordnung $R = 0$ und in die Gerade $u_x = 0$, so dass identisch:

---

*) Die Möglichkeit einer solchen Entwicklung ergibt sich übrigens unmittelbar aus den Riemann'schen Anschauungen; denn eine algebraische Function ist in der zu $f = 0$ gehörenden Riemann'schen Fläche (bis auf hinzutretende Constante) durch ihre Null- und Unendlichkeits-Punkte völlig definirt; beide Punktsysteme stimmen aber für die beiden Seiten von (38) überein. Für den Fall, dass mehrere der Schnittpunkte von f und N auf einer durch ξ gehenden Geraden liegen, treten im Texte einige Modificationen ein, die aber das Resultat nicht beeinflussen.

**) Vgl. Cl. u. G. A. F. p. 18.

$$M = k_2 Q_2 + k_3 Q_3 + \dots + k_n Q_n + u_x \, . \, R\,;$$

und somit wird:

$$\Psi = \frac{M}{u_x} = R + \sum_{i=2}^{i=n} \frac{k_i Q_i}{u_x}\,,$$

wo wieder jedes Glied der Summe nur in zwei Punkten unendlich wird. *Auch für $m = 1$ bleibt also obiges Resultat gültig.*

Wir erwähnen noch die Modificationen, welche vorstehende Ueberlegungen erleiden, wenn von den mn Schnittpunkten mehrere zusammenfallen (nur nicht in singuläre Punkte von f). Es mögen von diesen Punkten $x^{(i)}$ nur noch ν getrennt liegen, und jeder von ihnen bez. r_i-fach zählen, so dass:

$$r_1 + r_2 + \dots + r_\nu = mn\,.$$

Den Punkt ξ lassen wir wieder mit einem dieser Punkte, etwa $x^{(\nu)}$, zusammenfallen und setzen zur Abkürzung:

$$\lambda = mn - r_\nu\,,$$

wo r_ν so gewählt sei, dass $mn - 2r_\nu \geqq 0$.*) Die Gleichung der Verbindungslinien von ξ mit den λ übrigen Punkten sei durch $(\psi x \xi)^\lambda = 0$ gegeben, so dass an Stelle der zweiten Gleichung (34) die folgende tritt:

$$(\psi x \xi)^\lambda = Af + B_x^{\lambda - m} N\,,$$

wo nun $\lambda - r_\nu$ Schnittpunkte von $B = 0$ mit $f = 0$ in ξ vereinigt liegen. Ferner bestimmen wir eine Curve $C = 0$ von der Ordnung $\lambda + n - 3$ entsprechend den Gleichungen (35) und (36), so dass die λ^{te} Polare von $x^{(k)}$ in Bezug auf jeden Punkt $x^{(k,i)}$ je r_k-fach verschwindet.**) An Stelle von S tritt dann der Ausdruck:

$$(39)\quad S' = M_x^{m+n-3} B_x^{\lambda - m} \prod_{i=1}^{i=\nu-1} (\psi x^{(i)} \xi)^{\lambda - r_i} (\psi \eta \xi)^{r_i}$$
$$- C_x^{n-2} \sum_{k=1}^{k=\nu-1} \Big\{ Z_k\, C_{x^{(k)}}^{\lambda-1} (x^{(k)} \eta \xi)(x \eta \xi)^{r_k - 1} \prod_{i=1}^{i=\nu-1}{}_k (x^{(i)} x \xi)^{r_i} (\psi x^{(i)} \xi)^{\lambda - r_i} (\psi \eta \xi)^{r_i} \Big\}\,,$$

wo:
$$\frac{1}{Z_k} = \binom{\lambda}{r_k} = \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda - r_k + 1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\dots\,.\,r_k}\,.$$

Aus der an Stelle der ersten Gleichung (34) tretenden Gleichung:

---

*) Unter den ν Punkten wird im Allgemeinen ein solcher enthalten sein, denn man kann über die Zahlen r nicht willkürlich verfügen, da z. B. für $m > n - 3$ $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ durch die übrigen bestimmt sind.

**) Die Bedingung für die Möglichkeit dieser Bestimmung ist hier (vgl. p. 780):

$$\lambda(\lambda - 3) + 2 \geq 2\lambda(n-2)\,.$$

Für $r_\nu = 1$, $m > 1$ ist dieselbe z. B. immer erfüllt. Für Ausnahmefälle muss man wieder besondere Betrachtungen anstellen, wie im vorigen Falle.

$$(40)\qquad (\psi x\,\xi)^\lambda = \prod_{i=1}^{i=\nu-1} (x^{(i)} x\,\xi)^{r_i}$$

folgt nun durch Polarenbildung:

$$\binom{\lambda}{r_k} (\psi x^{(k)}\xi)^{\lambda - r_k} (\psi\eta\xi)^{r_k} = (x^{(k)}\eta\xi)^{r_k} \prod_{i=1}^{i=\nu-1}{}_k (x^{(i)}x^{(k)}\xi)^{r_i};$$

und in Rücksicht hierauf und auf (35) erkennt man, dass S' in jedem der Punkte $x^{(i)}$ einfach verschwindet, nur in ξ selbst von der Ordnung $\lambda - r_\nu$ (wegen der Eigenschaften von B); durch passende Verfügung über die Constanten von C wird man es indess erreichen können, dass noch ein $(\lambda - r_\nu + 1)^{\text{ter}}$ Schnittpunkt von $S' = 0$ mit $f = 0$ nach ξ fällt. Ferner verschwindet S' r_k-fach in jedem r_k fachen Schnittpunkte $x^{(k,i)}$ von B mit f. Versteht man also unter $R = 0$ eine Curve der Ordnung $\lambda + n - \nu - 2$, welche jeden r_k-fach zählenden Punkt $x^{(k,i)}$ nur $(r_k - 1)$-fach, die Punkte $x^{(k)}$ dagegen nicht enthält, und welche in ξ Null von der Ordnung $\lambda - r_\nu - \nu + 2$ wird, so hat man analog zu Gleichung (37):

$$(41)\qquad S' = Pf + R \prod_{i=1}^{i=\nu-1} (x^{(i)} x\,\xi).$$

Trägt man dies in (39) ein, dividirt auf beiden Seiten mit $(\psi x\xi)^\lambda$ und setzt noch zur Abkürzung:

$$\mathsf{N} = \prod_{i=1}^{i=\nu-1} (x^{(i)} x\,\xi)^{r_i - 1},$$

so wird wegen (34) und (40) vermöge $f = 0$:

$$(42)\quad \Psi = \frac{R}{\mathsf{N}} + C_x^{n-2} \sum_{k=1}^{k=\nu-1} \frac{1}{\binom{\mu}{r_k}} \left\{ \frac{C_y^{\lambda-1} (y\eta\xi)(x\eta\xi)^{r_k - 1}}{(\psi y\xi)^{\lambda - r_k} (\psi\eta\xi)^{r_k} (yx\xi)^{r_k}} \right\}_{y = x^{(k)}}.$$

Wegen der über R gemachten Festsetzungen wird der Quotient $R : \mathsf{N}$ nur in den Schnittpunkten von N mit f unendlich, also in denselben Punkten wie Ψ, in jedem von ihnen (auch in $\xi = x^{(\nu)}$) aber von niedrigerer Ordnung, und zwar von der Ordnung $r_k - 1$ in $x^{(k)}$. Die Function Ψ ist also zurückgeführt auf eine Function, die in denselben Punkten von je um eine Einheit geringerer Ordnung unendlich wird und also in gleicher Weise wie Ψ weiter behandelt werden kann, um auf Functionen der Art zu führen, wie sie in der Summe (42) auftreten, in deren Nenner also nur Potenzen linearer Functionen vorkommen. Für letztere ist aber:

$$-\frac{(x\eta\xi)^{r_k - 1}}{(yx\xi)^{r_k}} = \frac{1}{r_k - 1} \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial \dfrac{(x\eta\xi)^{r_k - 2}}{(yx\xi)^{r_k - 1}}}{\partial y_i} \eta_i.$$

Die Glieder der Summe (42) entstehen also bis auf constante Factoren aus den Gliedern der in (38) auftretenden Summe durch wiederholte Anwendung des Polarisations-Processes $\Sigma \frac{\partial}{\partial y_i} \eta_i$.

Schliesslich wollen wir noch die Annahme hinzufügen, dass die Curve $N = 0$ einen q-fachen Punkt in einem Doppelpunkte P von f habe. In letzterem liegen dann im Allgemeinen $2q$ Schnittpunkte beider Curven; die Gleichung $(\chi x \xi)^{mn} = 0$ enthält also einen $2q$-fachen Strahl. Man hat daher, wie in dem zuletzt besprochenen Falle, zur Aufstellung der Partialbruchzerlegung eine Function S' zu benutzen, wie sie in Gleichung (39) gebildet wurde. Die Curve $S' = 0$ geht dann einfach durch den Doppelpunkt, ebenso wie die aus $mn - 2q + 1$ Strahlen bestehende Curve $\Pi(x^{(i)} x \xi) = 0$. In Folge dessen besteht wieder die Gleichung (41) und auch die aus ihr und (39) hervorgehende Gleichung (42). In letzterer erscheint dann als erstes Glied auf der rechten Seite eine Function, die im Doppelpunkte P nur $(q-1)$-fach verschwindet. Das Resultat bleibt also dasselbe. In ähnlicher Weise endlich wird man auch beim Auftreten vielfacher Punkte verfahren müssen, so dass *jede algebraische Function* Ψ *vermöge* $f = 0$ *in eine Summe der Form* (42) *entwickelt werden kann.*

Verwerthen wir diese Betrachtungen über die Function Ψ nun für unser Differential dV, so zeigt sich, dass *jedes Differential der von uns betrachteten Art auf Aggregate von Differentialen der folgenden Formen zurückgeführt werden kann:*

1) *Differentiale der Form:* $\frac{R_x^{n-3}(c x d x)}{a_x^{n-1} a_c}$.

2) *Differentiale der Form:* $\frac{Q_x^{n-2}(c x d x)}{u_x \cdot a_x^{n-1} a_c}$, *wo die Curve* $Q_x^{n-2} = 0$ *durch* $n-2$ *der* n *Schnittpunkte von* $u_x = 0$ *mit* $f = 0$ *hindurchgeht.*

3) *Differentiale, welche aus den letztgenannten durch den (eventuell wiederholt anzuwendenden) Process* $\Sigma \frac{\partial}{\partial y_i}$ *abgeleitet werden*, *wo* y_i *die Coordinaten eines der Schnittpunkte von* $u_x = 0$ *mit* $f = 0$ *bedeuten.* — Dieselben kann man dann weiter als Summen von Differentialen darstellen, von deren Integralen jedes entweder in zwei Punkten logarithmisch oder in einem Punket (im Allgemeinen von höherer Ordnung) algebraisch unendlich wird, in analoger Weise wie dies unten für den Fall geschieht, wo im Nenner das *Quadrat* einer linearen Function steht.

Unsere bisherigen Betrachtungen bezogen sich auf solche Unendlichkeitspunkte der in V unter dem Integralzeichen stehenden Function

(d. i. der Differentialquotienten $\frac{dV}{dx_i}$), welche durch die Natur der Function Ψ bedingt waren. Die Differentialquotienten $\frac{dV}{dx_i}$ können aber auch unendlich gross werden, wenn der im Nenner stehende Ausdruck $Df = a_x^{n-1} a_c$ verschwindet. Letzteres tritt zunächst ein, wenn x ein Berührungspunkt der von c aus an die Curve zu legenden Tangente ist (vgl. p. 309). Dann liegt der Punkt $x + dx$ mit c und x auf einer Geraden, und also wird der Ausdruck $(c x dx)$, welcher im Allgemeinen von der ersten Ordnung unendlich klein ist, unendlich klein von der zweiten Ordnung; der Quotient $(c x dx) : a_x^{n-1} a_c$ bleibt folglich unendlich klein von der ersten Ordnung: *Für einen Berührungspunkt der von c an die Curve zu legenden Tangenten**) *wird daher das Integral V nicht unendlich;* in der That ist ja auch der Werth desselben von dem Punkte c völlig unabhängig (p. 771).

Der Ausdruck Df verschwindet ferner — und zwar unabhängig von den Grössen c_i — sobald x ein vielfacher Punkt von f ist; doch wollen wir hier nur das Auftreten von Doppel- und Rückkehr-Punkten der Grundcurve voraussetzen. In diesem Falle bleibt die Determinante $(c x dx)$, in welcher sich die dx_i aus der quadratischen Gleichung $a_x^{n-2} a_{dx}^2 = 0$ bestimmen, unendlich klein von der ersten Ordnung, und die Differentialquotienten von V nach den x_i werden unendlich. Um die Art des Unendlichwerdens genauer zu bestimmen, gehen wir, indem wir dV in der unter 2) genannten Form annehmen, von der Gleichung aus:

$$(43) \qquad a_x^{n-1} a_c \,.\, u_x' \,.\, dV = Q_x^{n-2} \,.\, (c x dx)\,,$$

Unter ξ verstehen wir einen Punkt der einen, unter η einen Punkt der andern Tangente des Doppelpunktes y. Aus (43) erhalten wir dann für einen auf dem einen Zweige zu y benachbarten Punkt den Werth von dV, wenn wir setzen $x_i = y_i + \varepsilon\xi_i$, $dx_i = \varepsilon d\xi_i$, wo ε eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung bedeutet. Nun wird in erster Annäherung:

$$(n-1)\, u_y \,.\, a_y^{n-2} a_\xi a_c \,.\, dV = Q_y^{n-2}\, (c y d\xi)\,.$$

*) Legt man (bei rechtwinkligen Coordinaten) den Punkt c in den unendlich fernen Punkt der Y-Axe, was projectivisch irrelevant, so sind diese Berührungspunkte die Verzweigungspunkte der Riemann'schen Fläche. In einem solchen wird dx auch unendlich klein von der zweiten Ordnung; ist also für ihn $x = a$, so muss dV in dem Punkte $x = a$ sich verhalten wie $\frac{dx}{\sqrt{x-a}}$, was man leicht direct bestätigt; vgl. Cl. u. G. A. F. p. 11, R. A. F. §. 7 u. 9. In der That ist ja $\sqrt{x-a}$ in dem Verzweigungspunkte eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung; und also bleibt der Quotient dx dividirt durch $\sqrt{x-a}$ in $x = a$ unendlich klein von der ersten Ordnung, wie es sich im Texte ergab.

Für c wählen wir nun den Punkt η; dann wird, da die Tangente der ersten Polare von η im Doppelpunkte y mit der Linie $(\eta y x) = 0$ zusammenfällt, wenn C eine Constante bedeutet:

$$a_y^{n-2} a_\xi a_\eta = C \,.\, (\eta y \xi)\,,$$

und also:

$$(44) \qquad dV = \frac{Q_y^{n-2}}{C(n-1)^n{}_y} \cdot \frac{(\eta y d\xi)}{(\eta y \xi)} = C' \,.\, d\,[\log\,(\eta y \xi)]\,,$$

wo C' eine neue Constante ist. *Das Integral V wird sonach in einem Doppelpunkte y von f logarithmisch unendlich*, und zwar wie $+\log(\eta y \xi)$ in der dem Punkte ξ entsprechenden, wie $-\log(\eta y \xi)$ in der dem Punkte η entsprechenden Fortschreitungsrichtung. Eine Ausnahme tritt ein, wenn auch die Curve $Q = 0$ durch y geht, indem dann das Integral endlich bleibt.

Die vorstehende Betrachtung gibt kein Resultat, wenn der Doppelpunkt in einen Rückkehrpunkt übergeht, indem dann die Punkte η und ξ zusammenfallen. Um den Werth des Integrals in der Nähe des Rückkehrpunktes zu finden, müssen wir daher noch Glieder von zweiter Ordnung der Kleinheit berücksichtigen, was mittelst Einführung neuer Veränderlichen r, s, t für die Umgebung des Punktes y in folgender Weise passend geschieht. Wir setzen:

$$(45) \qquad x_i = r y_i + s \xi_i + t \zeta_i\,.$$

Um die Gleichung der Curve $f = 0$ in den Veränderlichen r, s, t in möglichst einfacher Gestalt zu erhalten, legen wir ζ in den Wendepunkt der $(n-3)^{\text{ten}}$ Polare von y, d. h. der Curve dritter Ordnung $a_y^{n-3} a_x^3 = 0$, und ξ in den Schnittpunkt der Wendetangente von ζ mit der Rückkehrtangente von y, so dass die Gleichungen bestehen:

$$a_y^{n-3} a_\zeta^3 = 0, \quad a_y^{n-2} a_\xi^2 = 0, \quad a_y^{n-2} a_\zeta a_\xi = 0,$$
$$a_y^{n-3} a_\zeta^2 a_\xi = 0, \quad a_y^{n-3} a_\xi^2 a_\zeta = 0\,.$$

Für einen Punkt in der Nähe von y (d. i. für unendlich kleine Werthe von s und t) wird daher:

$$f(x) = a_x^n = \tfrac{1}{2} n (n-1) r^{n-3} \left\{ r t^2 a_y^{n-2} a_\zeta^2 + \tfrac{1}{3} (n-2) s^3 a_y^{n-3} a_\xi^3 \right\} + \ldots,$$

und somit geht die Gleichung $f = 0$ über in:

$$(46) \qquad 3 r t^2 a_y^{n-2} a_\zeta^2 + (n-2)\, s^3 a_y^{n-3} a_\xi^3 = 0.^{*)}$$

Lassen wir ferner c mit ζ zusammenfallen, so ergibt sich:

$$(47) \qquad Df \equiv a_x^{n-1} a_\zeta = (n-1)\, r^{n-2} \,.\, a_y^{n-2} a_\zeta^2 \,.\, t\,,$$

oder wegen (46):

*) Es wird in der Nähe von y also t^2 mit s^3 vergleichbar, was mit Früherem übereinstimmt, vgl. p. 329 und 521.

$$Df = (n-1)\, r^{n-3} \sqrt{s^3 r} \sqrt{-\tfrac{1}{3}(n-2)\, a_y^{n-2} a_\zeta^2 \,.\, a_y^{n-3} a_\xi^3}\,.$$

Für den Zähler von dV endlich findet man:

$$(\zeta x\, dx) = (\zeta y\, \xi)\,(r\, ds - s\, dr)\,. \tag{48}$$

Zur Berechnung von dV müssen wir noch die Function $\frac{Q}{u_x}$ nach Potenzen von s und t entwickeln. Es wird in Folge der Substitution (45) in erster Annäherung:

$$Q_x^{n-2} = r^{n-2} Q_y^{n-2} + (n-2)\, r^{n-3} Q_y^{n-3} (s\, Q_\xi + t\, Q_\zeta) + \ldots$$

$$\frac{1}{u_x} = \frac{1}{r\, u_y + s\, u_\xi + t\, u_\zeta} = \frac{1}{r\, u_y} - \frac{s\, u_\xi + t\, u_\zeta}{r^2 u_y^2} + \ldots$$

und also:

$$\frac{Q_x^{n-2}}{u_x} = r^{n-3} \frac{Q_y^{n-2}}{u_y} - \frac{r^{n-4}}{u_y^2} \left\{ Q_y^{n-2} (s\, u_\xi + t\, u_\zeta) - Q_y^{n-3} (n-2)(s\, Q_\xi + t\, Q_\zeta)\, u_y \right\} + \ldots,$$

und somit in Rücksicht auf (47) durch Einsetzen der gefundenen Werthe, wenn man $\frac{r}{s} = \mu$ setzt und die Grösse t vermöge (46) durch μ ausdrückt:

$$(n-1)\, dV = \frac{(\zeta y\, \xi)\, Q_y^{n-3}}{\sqrt{a_y^{n-2} a_\zeta^2 \,.\, a_y^{n-3} a_\xi^3}} \sqrt{\frac{-3}{n-2}} \left(\frac{Q_y}{u_y} \cdot \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^3}} + \frac{(n-2)\, Q_\xi u_y - Q_y u_\xi}{u_y^2} \cdot \frac{d\mu}{\sqrt{\mu}} \right)$$

$$+ \frac{(\zeta y\, \xi)}{a_y^{n-2} a_\zeta^2 \,.\, u_y^2} \left(Q_y^{n-2} u_\zeta - (n-2)\, Q_y^{n-3} Q_\zeta u_y \right) d\mu + \ldots$$

Durch Integration ergibt sich hieraus endlich, wenn A, B, C Constante bedeuten, deren Werthe aus dem für dV gefundenen Ausdrucke leicht zu entnehmen sind*):

$$V = \frac{A}{\sqrt{\mu}} + B\sqrt{\mu} + C\mu + \ldots$$

oder da nach (45): $\mu = \frac{s}{r} = \frac{(y x \xi)}{(x \xi \zeta)}$

$$V = A\sqrt{\frac{(x\xi\zeta)}{(y x \zeta)}} + B\sqrt{\frac{(y x \zeta)}{(x \xi \zeta)}} + C\sqrt{\frac{(y x \xi)}{(x \xi \zeta)}} + \ldots \tag{49}$$

Dies ist der Werth von V in der Nähe des Rückkehrpunktes y:

Das Integral V wird nach (49) *in einem Rückkehrpunkte algebraisch unendlich von der ersten Ordnung.***)

---

*) Vgl. Cl. u. G. A. F. p. 13.

**) Nicht von der Ordnung $\frac{1}{2}$, denn der Rückkehrpunkt ist ein Verzweigungspunkt der zugehörigen Riemann'schen Fläche, und in einem solchen ist, wenn in ihm $x = a$, $\frac{1}{\sqrt{x-a}}$ eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung; vgl. die Anmerkung auf p. 786.

In ähnlicher Weise muss man nun auch ein Integral behandeln, welches in einem vielfachen Punkte von f unendlich wird. Am einfachsten geschieht dies indess, wenn man sich den vielfachen Punkt zuvor in bekannter Weise (p. 491 ff.) durch eindeutige Transformation aufgelöst denkt, denn bei einer solchen Transformation ändert das Differential seinen Charakter nicht, was man in analoger Weise beweist, wie dies weiterhin für Differentiale dritter Gattung geschieht. Das Differential erscheint dann als Combination der oben unter 2) und 3) genannten Differentiale (p. 785).

VII. Die Normalintegrale erster, zweiter und dritter Gattung.

Die Integrale der auf p. 785 unter 1) und 2) genannten Differentiale sollen jetzt hinsichtlich ihrer Eigenschaften genauer untersucht werden.

Zunächst ist klar, dass es Integrale geben kann, welche für keinen Punkt der Curve unendlich gross werden, deren Differentiale also in allen Punkten der Curve unendlich klein von der ersten Ordnung bleiben: es sind dies offenbar die Differentiale der Form:

$$\frac{R_x{}^{n-3}(c\,x\,d\,x)}{a_x{}^{n-1}a_c},$$

wenn man die Curve R so bestimmt, dass sie in allen Punkten von f in ebenso hoher Ordnung Null wird, wie der Nenner, ausgenommen die Berührungspunkte der von c an die Curve zu legenden eigentlichen Tangenten, für welche auch die Determinante $(c\,x\,d\,x)$ Null wird (p. 786). Dazu aber ist nur nöthig, dass wir für $R_x{}^{n-3}=0$ eine zu f adjungirte Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung wählen, wie aus der für eine solche gegebenen Definition unmittelbar hervorgeht (p. 678): In der That hat sie ja in jedem singulären Punkte von f ebenso viele Punkte mit f gemein, wie die Polare $a_x{}^{n-1}a_c$, wenn man von der Zahl der letzteren die der etwa in dem vielfachen Punkte liegenden Verzweigungspunkte (p. 494) abzieht. Für die letzteren aber wird wieder die Determinante $(c\,x\,d\,x)$ unendlich klein von der zweiten Ordnung, wenn man von dem vielfachen Punkte x aus auf demjenigen Zweige von f zu einem Punkte $x+dx$ fortschreitet, auf welchem der Verzweigungspunkt an x herangerückt ist; und so bleibt unser Differential in der That eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung, wie man auch den Punkt $x+dx$ in der Nachbarschaft von x wählen mag. Eine adjungirte Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung soll nun, nach dem Vorgange von Riemann, immer durch φ bezeichnet werden und das überall endliche Integral durch J. Das Differential des letzteren nennen wir ein *Differential erster Gattung:*

$$(1)\qquad dJ = \frac{\varphi\,.\,(c\,x\,d\,x)}{c_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + c_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + c_3\frac{\partial f}{\partial x_3}} = \frac{\varphi\,.\,(c\,x\,d\,x)}{n\,.\,a_x^{n-1}\,a_c}\,.$$

Aus unseren früheren Bemerkungen über adjungirte Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung (p. 677) folgt dann unmittelbar der Satz:

Es gibt p linear von einander unabhängige Differentiale erster Gattung; oder mit anderen Worten: *Jedes zu f gehörige Differential erster Gattung kann als lineare Conbination von p beliebigen anderen solchen Differentialen dargestellt werden.* —

Von den auf p. 785 unter 1) aufgeführten Differentialen werden uns im Folgenden zunächst nur noch die soeben definirten Differentiale erster Gattung beschäftigen, indem alle anderen als besondere Fälle der daselbst unter 2) und 3) genannten aufgefasst werden können, wie sich sogleich noch ergeben wird. Ebenso wollen wir bei den unter 2) aufgeführten Differentialen zunächst nur solche betrachten, welche in den Doppelpunkten von f nicht endlich werden, d. h. wir ersetzen die Curve $Q = 0$ durch eine *adjungirte* Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung $\Omega_x^{n-2} = 0$. Dies ist immer möglich, denn die Curve $\Omega = 0$ ist ausserdem nur der Bedingung unterworfen, durch $n-2$ Schnittpunkte der Geraden $u_x = 0$ zu gehen, wenn u_x die im Nenner des Differentials auftretende lineare Function bedeutet. *Von den Schnittpunkten der Curve $\Omega = 0$ mit $f = 0$ bleiben daher immer noch*

$$n\,(n-2) - \Sigma\,\alpha_i\,i\,(i-1) - (n-2) - p = p$$

willkürlich wählbar. Die beiden übrigen Schnittpunkte von $u_x = 0$ mit $f = 0$ mögen durch ξ, η bezeichnet werden; dann werden die Differentialquotienten des Integrals nach den x_i nur in ξ und η unendlich. *Ein solches Differential, welches nur in zwei getrennten Punkten von f einen endlichen Werth annimmt, heisst ein Differential dritter Gattung, und das zugehörige Integral, welches dann nur in diesen beiden Punkten unendlich wird, heisst ein Integral dritter Gattung.**)

Letzteres soll im Folgenden mit $S_{\xi\eta}$ bezeichnet werden, wenn ξ und η die beiden Unendlichkeitspunkte desselben sind. Sein Differential ist also definirt durch:

$$(2)\qquad dS_{\xi\eta} = \frac{\Omega_x^{n-2}\,(c\,x\,d\,x)}{(\xi\,\eta\,x)\,\Sigma\,c_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i}} = \frac{\Omega_x^{n-2}\,(c\,x\,d\,x)}{n\,(\xi\,\eta\,x)\,.\,a_x^{n-1}\,a_c}\,,$$

*) Das Differential zweiter Gattung wird sogleich noch definirt werden. — Vgl. R. A. F. §. 2; Cl. u. G. A. F. p. 20. — Es ist zu beachten, dass die Bezeichnungsweise des Textes mit der von Jacobi und Legendre für elliptische Integrale eingeführten nicht übereinstimmt; in der That hat Legendre's elliptisches Normalintegral dritter Gattung *vier* Unendlichkeitspunkte. Vgl. Königsberger's Theorie der elliptischen Functionen, Th. 1, p. 276.

wenn man das Bestehen der folgenden Gleichungen voraussetzt:

$$f(\xi) \equiv a_\xi{}^n = 0, \quad f(\eta) \equiv a_\eta{}^n = 0,$$

$$(3) \qquad \Omega_x{}^{n-2}(\eta\zeta x)(\zeta\xi x) \equiv (\xi\eta\zeta)^2 \,.\, f + (\xi\eta x)\,.\,N\,.$$

Die letzte Gleichung folgt unmittelbar aus den Bedingungen, welche wir der Function Ω auferlegten; in ihr sind ξ_i die Coordinaten eines beliebigen Punktes (die nur dazu eingeführt sind, um die Gleichung homogen zu schreiben, ebenso wie der Factor $(\xi\eta\zeta)^2$ bei f); und N ist eine ganze Function $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Diese Gleichung ist für eine spätere Anwendung besonders wichtig.

Die Art, wie das Differential $dS_{\xi\eta}$ in den Punkten ξ und η unendlich wird, ist leicht zu bestimmen. Wir setzen (wie auf p. 786) $x = \xi + \varepsilon\zeta$, wo ε eine unendlich kleine Grösse und ζ ein Punkt der Tangente von ξ ist, dann wird in erster Annäherung für $c_i = \eta_i$:

$$n\, a_\xi{}^{n-1} a_\eta (\xi\eta\zeta)\,.\, dS_{\xi\eta} = \Omega_\xi{}^{n-2}(\eta\xi d\zeta)\,.$$

Aus Gleichung (3) folgt aber, wenn man auf beiden Seiten derselben die erste Polare von η für $x = \xi$ bildet:

$$(4) \qquad \Omega_\xi{}^{n-2} = -\, n\, a_\xi{}^{n-1} a_\eta\,;$$

und somit ergibt sich für die Nähe des Punktes ξ:

$$dS_{\xi\eta} = \frac{(\xi\eta dx)}{(\xi\eta x)}\,.$$

*Das Integral $S_{\xi\eta}$ verhält sich also in der Nähe des Unendlichkeitspunktes ξ wie $+\log(\xi\eta x)$, mithin in der Nähe des Unendlichkeitspunktes η wie $-\log(\xi\eta x)$.**)

Es ist oben bemerkt worden, dass für die Curve Ω noch p Schnittpunkte auf f beliebig angenommen werden können. Das Differential $dS_{\xi\eta}$ ist also durch die Punkte ξ und η noch keineswegs bestimmt; vielmehr erhalten wir eine andere Curve Ω' und ein anderes Differential $dS'_{\xi\eta}$, wenn wir diese p Punkte sämmtlich oder theilweise durch andere ersetzen. Für die Function Ω' besteht dann (bei passender Festsetzung über die absoluten Werthe ihrer Coëfficienten) ebenfalls die Gleichung (3) und folglich auch die aus ihr abgeleitete Gleichung (4), d. h. es ist:

$$\Omega_\xi{}^{n-2} = -\, n\, a_\xi{}^{n-1} a_\eta\,, \quad \Omega_\eta{}^{n-2} = -\, n\, a_\eta{}^{n-1} a_\xi$$
$$\Omega'_\xi{}^{n-2} = -\, n\, a_\xi{}^{n-1} a_\eta\,, \quad \Omega'_\eta{}^{n-2} = -\, n\, a_\eta{}^{n-1} a_\xi\,.$$

---

*) Dies ändert sich nicht, wenn auch ein Unendlichkeitspunkt in einen Berührungspunkt der von c an f zu ziehenden Tangenten fällt. Die Lage von c ist vollkommen gleichgültig. — Es können ferner die Punkte ξ, η auch in einen Doppelpunkt zusammenfallen, wie weiterhin noch erörtert werden soll.

Hieraus folgt, dass die Differenz $\Omega_x^{n-2} - \Omega'^{n-2}_x$ verschwindet für $x = \xi$ und $x = \eta$. Die Curve $\Omega - \Omega' = 0$ enthält also die Gerade $\xi\eta$ ganz, und man kann setzen:

$$\Omega - \Omega' = (\xi\eta x) \cdot \varphi ,$$

wo $\varphi = 0$ eine adjungirte C_{n-3} ist. *Wenn man also das Differential dritter Gattung $dS_{\xi\eta}$ auf zwei verschiedene Weisen für dieselben Unendendlichkeitspunkte ξ, η bildet, so unterscheiden sich beide Bildungen bei passender Verfügung über die in ihnen auftretenden Constanten nur um ein Differential erster Gattung.* —

Lassen wir die beiden Unendlichkeitspunkte des Differentials dritter Gattung einander auf demselben Curvenzweige von f unendlich nahe rücken, so entsteht aus $dS_{\xi\eta}$ ein *Differential zweiter Gattung.* Die Linie $\overline{\xi\eta}$ wird dann zur Tangente von f in dem einen Punkte, welcher mit ξ bezeichnet sei; und *man kann also ein (mit dE_ξ bezeichnetes) Differential zweiter Gattung definiren durch die Gleichung:*

$$dE_\xi = \frac{\Omega_x^{n-2}(cx\,dx)}{n^2 \cdot a_\xi^{n-1} a_x \cdot a_x^{n-1} a_c} ;$$

nun wieder Ω zu f adjungirt ist und durch die $n-2$ übrigen Schnittpunkte der Tangente von f in ξ mit f hindurchgeht. Für Ω besteht daher, wenn η ein beliebiger Punkt ist, eine Gleichung der Form

$$(5) \qquad \Omega_x^{n-2}(\xi\eta x)^2 = [a_\xi^{n-1} a_\eta]^2 \cdot f + a_\xi^{n-1} a_x \cdot M_x^{n-1} ;$$

wo f von der Curve M in allen Schnittpunkten der Linie $(\xi\eta x) = 0$ berührt wird, ausgenommen den Punkt ξ selbst.

In Betreff der Differentiale zweiter Gattung sei hier ohne Angabe des Beweises noch bemerkt, dass ein solches auch immer bis auf ein additiv hinzutretendes Differential erster Gattung aus einem Differentiale dritter Gattung durch einen Differentiationsprocess abgeleitet werden kann; es ist nämlich, wenn $a_\xi^{n-1} a_\zeta = 0$*):

$$dE_\xi = \frac{\partial dS_{\xi\eta}}{\partial \xi_1} \zeta_1 + \frac{\partial dS_{\xi\eta}}{\partial \xi_2} \zeta_2 + \frac{\partial dS_{\xi\eta}}{\partial \xi_3} \zeta_3 + dJ .$$

Mit Hülfe dieser Relation kann man Sätze über Differentiale dE_ξ aus solchen über Differentiale $dS_{\xi\eta}$ ableiten. Insbesondere ergibt sich so, dass $\int dE_\xi$ für $x_i = \xi_i$ unendlich wird wie $\int \frac{dx}{(x-\xi)^2}$ für $x = \xi$. *Das Integral zweiter Gattung E_ξ wird also im Punkte ξ algebraisch unendlich von der ersten Ordnung;* was man unter Anwendung von Gleichung (5) auch leicht direct bestätigt.

---

*) Vgl. darüber Cl. u. G. A. F. p. 28.

Auf die unter 3) auf p. 785 genannten Differentiale wollen wir hier nicht weiter eingehen, man wird ihre Eigenschaften aus denen der Integrale erster, zweiter und dritter Gattung durch Benutzung des früher angegebenen Differentiationsprocesses ableiten können. Es sei indess hervorgehoben, dass ein Differential, in dessen Nenner das *Quadrat* einer linearen Function vorkommt, d. i. *ein Differential der Form*

$$dV = \frac{Q_x^{n-1}(c\,x\,dx)}{u_x^2 \cdot a_x^{n-1}\; a_c}$$

sich immer direct auf Differentiale zweiter und dritter Gattung zurückführen lässt. Dieser Fall gewinnt noch dadurch an Interesse, dass das zu einer in rechtwinkligen Coordinaten x, y gegebenen Curve $F(x, y) = 0$ gehörige Flächenintegral $\int y\,dx$ als Specialfall des Integrals V erscheint. In der That für $x = x_1 : x_3$, $y = x_2 : x_3$ wird ja:

$$\int y\,dx = \int \frac{(x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3)\,x_2}{x_3^2}.$$

Dasselbe entsteht also aus V, wenn man setzt:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = u_x = 1, \; a_x^n = F(x, y), \quad Q_x^{n-1} = y\,\frac{\partial F}{\partial y}.$$

Zum Beweise der ausgesprochenen Behauptung bestimmen wir n Curven $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0, \ldots Q_n = 0$ so, dass $Q_k = 0$ die Grundcurve f in allen Schnittpunkten $x^{(i)}$ von $u_x = 0$ berührt, ausgenommen den Punkt $x^{(k)}$. Alsdann können wir n Constante k_i so bestimmen, dass die Curve

$$Q - k_1 Q_1 - k_2 Q_2 - \ldots - k_n Q_n = 0$$

durch alle n Punkte $x^{(i)}$ hindurchgeht, denn dafür brauchen nur die Gleichungen erfüllt zu sein:

$$Q^{(1)} - k_1 Q_1^{(1)} = 0, \quad Q^{(2)} - k_2 Q_2^{(2)} = 0, \ldots . \; Q^{(n)} - k_n Q_n^{(n)} = 0,$$

wo die oberen Indices analoge Bedeutung haben, wie in den entsprechenden Gleichungen auf p. 782. Es wird daher:

$$Q = \Sigma k_i Q_i + u_x \Omega, \tag{6}$$

wo $\Omega = 0$ eine Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung ist, und zwar eine zu f adjungirte, wenn wir annehmen — wie es Kürze wegen geschehen möge — die Curven $Q = 0$ und $Q_k = 0$ seien sämmtlich zu f adjungirt. Wegen (6) wird nun:

$$dV = \frac{Q\,(c\,x\,dx)}{u_x^2 \cdot a_x^{n-1}\; a_c} = \sum \frac{k_i Q_i\,(c\,x\,dx)}{u_x^2\, a_x^{n-1}\; a_c} + \frac{\Omega\,(c\,x\,dx)}{u_x \cdot a_x^{n-1}\; a_c}. \tag{7}$$

Hier ist aber jedes Glied der rechts auftretenden Summe ein Differential zweiter Gattung, denn wegen der Bestimmungen über $Q_i = 0$ kann man setzen:

$$Q_i \cdot a_{x^{(i)}}^{n-1} a_x = u_x^2 \Omega_i ,$$

wo $\Omega_i = 0$ eine durch alle $n - 2$ weiteren Schnittpunkte der Tangente von $x^{(i)}$ mit $f = 0$ gehende C_{n-2} bedeutet. Das letzte Glied des in (7) rechts stehenden Ausdrucks kann in eine Summe von $n - 1$ Integralen dritter Gattung zerlegt werden. Man hat also schliesslich:

$$V = E_{x^{(1)}} + E_{x^{(2)}} + \ldots + E_{x^{(n)}} + S_{x^{(1)}x^{(2)}} + S_{x^{(1)}x^{(3)}} + \ldots + S_{x^{(1)}x^{(n)}}.$$

Das Integral V wird sonach in jedem der Punkte $x^{(i)}$ unendlich, wie die Function $\log(x - \xi) + \frac{1}{x - \xi}$ *für $x = \xi$ unendlich wird.**) —

Von besonderer Wichtigkeit für die späteren Anwendungen sind noch die folgenden Bemerkungen über die Differentiale zweiter und dritter Gattung. Die in dem Differentiale $dS_{\xi\eta}$ auftretenden Punkte ξ, η können wir insbesondere in einen Doppelpunkt von f zusammenrücken lassen. Durch diesen Doppelpunkt aber geht Ω als zu f adjungirte Curve hindurch und hat folglich dann mit der Linie $\overline{\xi\eta}$ $n - 1$ Schnittpunkte gemein; d. h. Ω enthält diese Gerade ganz. Daher wird

$$\Omega_x^{n-2} = u_x \cdot \mathsf{H}_x^{n-3},$$

wenn u_i die Coordinaten der im Nenner von $dS_{\xi\eta}$ auftretenden Geraden sind. Das Differential selbst also nimmt die Form an:

$$(8) \qquad dS_{\xi\eta} = \frac{\mathsf{H}_x^{n-3}(c\,x\,dx)}{n\,a_x^{n-1}a_c},$$

wo nun H durch alle vielfachen Punkte von f geht, ausgenommen den auf u_x liegenden Doppelpunkt; dasselbe ist übrigens von u_x ganz unabhängig geworden. Dieses Differential liefert dann zugleich das Schema für die auf p. 785 unter 1) angeführten nicht überall endlichen Differentiale, soweit dieselben in Doppelpunkten von f unendlich werden; denn es ist leicht zu übersehen, dass jedes Differential der Form 1), welches in mehreren Doppelpunkten unendlich wird, in eine Summe von Differentialen entwickelt werden kann, deren jedes nur in einem Doppelpunkte unendlich ist. *Auch solche Differentiale rechnen wir zu denen dritter Gattung;* auch sie nämlich werden in zwei Punkten logarithmisch unendlich (vgl. p. 787), insofern man den

---

*) Aus der für dV in (7) gegebenen Darstellung wird man alle diejenigen Eigenschaften des Integrals $\int y\,dx$ (insbesondere die Bestimmung seiner Perioden) entwickeln, welche von M. Marie (ohne vollständige Benutzung der früheren Arbeiten von Riemann, Clebsch und Gordan) angegeben worden sind; Comptes rendus, 1874, p. 692, 757, 865, 943. — Vgl. auch für Curven vom Geschlechte $p = 0$, 1: Hermite, Cours d'analyse de l'école polytechnique, 1ière partie, Paris 1873.

Doppelpunkt einmal als auf dem einen, einmal als auf dem anderen durch ihn gehenden Zweige von f gelegen ansehen kann. Letzteres wird recht deutlich, wenn man den Doppelpunkt durch eindeutige Transformation der Grundcurve in zwei getrennte Punkte auflöst, wie sogleich noch erörtert werden soll.

Man erkennt, dass in analoger Weise *ein nur in einem Rückkehrpunkte unendliches Differential als ein Differential zweiter Gattung zu betrachten ist**); denn jede durch den Rückkehrpunkt gelegte Gerade verbindet in diesem zwei unendlich benachbarte Punkte, ungleich einer durch einen Doppelpunkt gehenden Geraden, welche als Verbindungslinie zweier verschiedenen Punkte der Curve zu betrachten ist.

Die letzten Erörterungen werden, wie schon erwähnt, von besonderem Interesse, wenn man die Curve f einer eindeutigen Transformation unterwirft. Wir wenden uns jetzt zur Untersuchung des *Einflusses, welchen eine solche eindeutige Transformation der Grundcurve auf ein Differential erster, zweiter oder dritter Gattung ausübt.* Die Transformation von $f(x) = 0$ in eine Curve der ν^{ten} Ordnung $F(y) = 0$ sei, wie auf p. 661, durch Gleichungen der Form:

$$\mu y_1 = \Phi_1(x), \quad \mu y_2 = \Phi_2(x), \quad \mu y_3 = \Phi_3(x)$$

gegeben; und vermittelst derselben möge wieder $\mu^\nu F(y) = F(\Phi)$ in $M \cdot f$ übergehen. Dann ist für alle Punkte von $f = 0$:

$$M \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial F(\Phi)}{\partial \Phi_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F(\Phi)}{\partial \Phi_2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_i} + \frac{\partial F(\Phi)}{\partial \Phi_3} \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_i},$$

und also, da nach p. 671 $\mu^{\nu-1} \frac{\partial F(y)}{\partial y_i} = \frac{\partial F(\Phi)}{\partial \Phi_i}$:

$$\left(c_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}\right) \cdot M = \mu^{\nu-1} \left(\frac{\partial F(y)}{\partial y_1} k_1 + \frac{\partial F(y)}{\partial y_2} k_2 + \frac{\partial F(y)}{\partial y_3} k_3\right),$$

wenn wir setzen:

$$k_i = c_1 \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_1} + c_2 \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_2} + c_3 \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_3}.$$

Ferner wird nach dem Multiplicationssatze der Determinanten:

$$\mu^2 (k y d y) = (k \Phi d \Phi) = \frac{1}{s} (c x d x) \cdot (\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3),$$

wo $(\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3)$ wieder die Functionaldeterminante, und s die Ordnung der Φ_i bedeutet. Die hier abgeleiteten Relationen reichen nun zur Umformung unserer Differentiale aus. Ein solches sei für die Curve F gegeben, und zwar von der dritten Gattung; die beiden Unendlichkeitspunkte desselben mögen auf der Linie v liegen. Man findet dann unmittelbar:

*) In der That wird dasselbe im Rückkehrpunkte ja auch algebraisch unendlich von der ersten Ordnung, vgl. p. 788.

$$s \cdot \frac{\Omega(y) \cdot (k y d y)}{\Sigma v_i y_i \cdot \Sigma k_i \frac{\partial F}{\partial y_i}} = \frac{\Omega(\Phi) \cdot (\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3) \cdot (c x d x)}{\Sigma v_i \Phi_i \cdot M \cdot \Sigma c_i \frac{\partial f}{\partial x_i}}.$$

Hier ist der Ausdruck rechts ganz ähnlicher Natur, wie der Ausdruck links, nur dass an Stelle der Functionen Ω und v_y bez. die Functionen $\Omega(\Phi) \cdot (\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3)$ und $\Sigma v_i \Phi_i \cdot M$ getreten sind, und dass an Stelle der ganz willkürlichen Grössen k die ebenso willkürlichen Grössen c erscheinen.

Es ist aber Ω eine zu F adjungirte Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, und also nach einem früheren Satze (p. 676):

$$(\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3) \cdot \Omega(\Phi) = M \cdot \omega(x) + C \cdot f,$$

wo $\omega(x) = 0$ eine Curve der Ordnung $s + n - 3$ darstellt, welche f ausser in den vielfachen Punkten und den gemeinsamen Punkten der Φ nur in den Punkten trifft, die den Schnittpunkten von Ω mit F entsprechen. Insbesondere also geht $\omega(x)$ auch durch die $n-2$ Schnittpunkte der Curve $\Sigma v_i \Phi_i = 0$ mit f, welche den $n-2$ auf Ω liegenden Punkten von $v_y = 0$ entsprechen. Die rechte Seite der Gleichung

$$s \cdot \frac{\Omega(y) \cdot (k y d y)}{v_y \cdot \Sigma k_i \frac{\partial F}{\partial y_i}} = \frac{\omega(x) \cdot (c x d x)}{\Sigma v_i \Phi_i \cdot \Sigma c_i \frac{\partial f}{\partial x_i}}$$

stellt daher ein Differential dar, welches nur in *den zwei* Punkten endlich wird, in welchen dies für das Differential auf der linken Seite eintritt, also wieder ein Differential dritter Gattung; in der That verschwindet nach dem Früheren für einen gemeinsamen r-fachen Punkt der Φ, welcher i-facher Punkt von f ist $(i \geqq 1)$, $\omega(x)$ immer $(r + i - 1)$-fach, also immer ebenso oft wie der Nenner der rechten Seite. Weiter wird man das rechts stehende Differential auch so darstellen können, dass im Nenner nur eine lineare Function steht. Denn sind ξ, η die Unendlichkeitspunkte unseres Differentials, und ist $\Omega' = 0$ eine zu f adjungirte Curve, welche durch die übrigen $n-2$ Schnittpunkte der Geraden $(x \xi \eta) = 0$ mit f hindurchgeht, so besteht offenbar vermöge $f = 0$ eine Gleichung der Form:

$$\omega \cdot (\xi \eta x) = \Omega' \cdot \Sigma v_i \Phi_i.$$

Insbesondere können die Punkte ξ, η eins der Punktepaare von f bilden, welche sich zu einem Doppelpunkte von F vereinigen; dann ist $\Omega(y)$ durch v_y theilbar, und auf der linken Seite obiger Gleichung steht ein Differential dritter Gattung der zuletzt erwähnten Art. Wir haben also folgenden Satz:

Bei eindeutiger Transformation der Curve f geht ein Differential dritter Gattung immer wieder in ein Differential dritter Gattung über; und zwar gilt dies unabhängig davon, ob die beiden Unendlichkeitspunkte

desselben auf f getrennt liegen oder in einem Doppelpunkte von f vereinigt; vielmehr kann ein Differential der einen Art dabei in ein Differential der andern Art übergeführt werden.

Dasselbe gilt natürlich, wenn die beiden Unendlichkeitspunkte einander benachbart liegen, oder wenn man $\Omega = v_y \,.\, \Theta$ setzt, wo $\Theta = 0$ eine zu F adjungirte C_{n-3} ist. Also*):

Ein Differential erster oder zweiter Gattung geht bei eindeutiger Transformation der Grundcurve immer wieder in ein Differential bez. der ersten oder zweiten Gattung über.

Unsere bisherigen Untersuchungen waren rein algebraischer Natur, sie bezogen sich auf Quotienten algebraischer Functionen. Indem wir zu den Integralen unserer Differentiale übergehen, müssen wir aber noch andere Untersuchungen in Betracht ziehen, insbesondere solche über die Periodicitäts-Eigenschaften der algebraischen Integrale; denn gerade auf letzteren beruhen die späteren geometrischen Anwendungen dieser Theorien (vgl. das Beispiel der elliptischen Integrale auf p. 607 ff.). Es ist hier indess nicht der Ort, eine ausführliche Darstellung der betreffenden Verhältnisse zu geben; wir beschränken uns auf eine kurze Uebersicht der Resultate, die um so nützlicher sein wird, als wir so Gelegenheit finden, unsere späteren Bezeichnungsweisen im Zusammenhange einzuführen und zu definiren.

Bei Betrachtung eines algebraischen Integrals ist vor Allem zu bemerken, dass der Werth eines solchen immer von dem benutzten Integrationswege abhängen kann, und also kein völlig bestimmter ist. Die hieraus fliessenden Fragen erledigen sich am einfachsten, wenn man sich der Riemann'schen Vorstellungen bedient, d. h. die Gleichung der Grundcurve in rechtwinkligen Coordinaten zu Grunde legt und dann die eine der letzteren als Function der andern über die zugehörige Riemann'sche Fläche ausbreitet; eine Vorstellungsweise, die übrigens auch für die rein algebraische Untersuchung des durch $f = 0$ dargestellten Werthgebietes von grossem Nutzen ist (vgl. p. 610 und p. 682). Die dadurch gewonnenen Resultate sollen im Folgenden kurz zusammengestellt werden, soweit wir dieselben für spätere Untersuchungen benutzen werden, ohne dass jedoch die betreffenden Beweise vollständig erbracht würden.

Wir betrachten zunächst die *Integrale erster Gattung*. Der Werth eines solchen ist bestimmt, wenn die untere und obere Grenze nebst dem Wege gegeben sind, auf welchem das Integral von der ersten zur zweiten geführt wird. Zwei Integrationswege, welche durch das Endliche oder Unendliche ohne Ueberschreitung eines Verzweigungs-

*) Für Differentiale erster Gattung vgl. Cl. u. G. A. F. p. 50.

punktes der Fläche in einander überführbar sind, liefern dann immer dasselbe Resultat für den Werth des Integrals; denn letzteres (als von der ersten Gattung) wird in keinem Punkte der Fläche unendlich. Wenn die beiden Wege aber Verzweigungspunkte einschliessen und zwar weder alle noch keinen, so dass eine directe Ueberführung eines Integrationsweges in den andern nicht möglich ist, so hat man im Allgemeinen zwei verschiedene Werthe des Integrals vor sich, obgleich die oberen und unteren Grenzen dieselben sind. Man kann dann statt des zweiten Weges den ersten setzen, vermehrt um eine geschlossene Curve, welche den zweiten Integrationsweg in directer, den ersten in entgegengesetzter Richtung enthält; man kann daher den zweiten aus dem ersten durch Hinzufügen eines Weges entstanden denken, welcher die überschrittenen Verzweigungspunkte umschliesst und um diese beliebig nahe zusammengezogen werden kann, welcher also äquivalent ist mit einem *geschlossenen* um die betreffenden Verzweigungspunkte gelegten Wege, indem der Verbindungsweg des letzteren mit jenem ersten Wege zweimal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird und also keinen Beitrag für das Integral liefert. Alle Aenderungen, welche das Integral durch Aenderung des Integrationsweges erleidet, sind somit darstellbar durch die Werthe des Integrals, welche dasselbe beim Herumführen um Verzweigungspunkte annimmt. Es wird also zunächst darauf ankommen, die Zahl der von einander unabhängigen (durch Verzerrung und Combination nicht aus einander ableitbaren) Wege dieser Art zu bestimmen, welche auf der Fläche möglich sind.

Zu dem Zwecke ist es nützlich, sich über die Gestalt der Riemann'schen Fläche bestimmtere Vorstellungen zu bilden und Festsetzungen zu machen. Zunächst kann man nach dem Vorgange von Lüroth immer eine gewisse *Normalform* für dieselbe zu Grunde legen, d. h. gewisse einfache Annahmen über die Gruppirung der Verzweigungspunkte und der durch sie verbundenen Blätter machen*); dabei erkennt man insbesondere, dass sich die Untersuchung der Periodicitätsmoduln auf das einfachere Schema der hyperelliptischen Integrale zurückführen lässt. Der dazu leitende Gedankengang ist kurz folgender. — Die Zahl der Blätter unserer Fläche möge durch m, die ihrer Verzweigungspunkte durch r bezeichnet sein**); ferner verstehen wir unter einer *Gruppe von Verzweigungspunkten* die Gesammtheit aller solchen Punkte, welche dieselben beiden Blätter

*) Vgl. Lüroth, Math. Annalen, Bd. 4, p. 181 und Clebsch, ib. Bd. 6, p. 216.

**) Es ist dann immer $2p = r - 2(m-1)$. Im Allgemeinen wird m gleich der Ordnung der Grundcurve sein; dann ist r gleich der Klasse derselben, vermehrt um die Zahl der Rückkehrpunkte (vgl. die Anmk. auf p. 494).

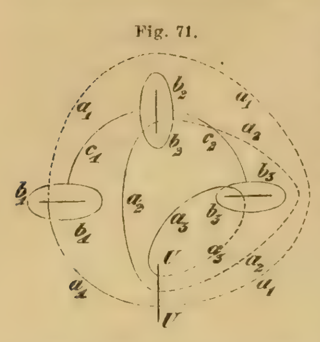
verbinden, der Art, dass diese Blätter durch weitere Verzweigungspunkte nicht mehr verbunden erscheinen. In einer jeden Gruppe ist dann nothwendig eine *gerade* Anzahl von Verzweigungspunkten enthalten, wie die Anschauung direct ergibt. Eine nähere Ueberlegung zeigt nun, dass weder in der Anordnung der Verzweigungspunkte, noch in der Folge, in der die Blätter verbunden werden, etwas Specifisches liegt, noch endlich in der Zahl der Punkte, welche bei gegebener Anordnung für jede Gruppe benutzt werden; die letztere darf nur nicht Null werden. Insbesondere kann man daher eine Anordnung bevorzugen, bei welcher eine Gruppe aus $r - 2(m-2)$ Verzweigungspunkten besteht, alle übrigen nur aus je zweien derselben. Es sind dann zwei Blätter, etwa das erste und zweite, mit einander durch $r - 2(m-2)$ Verzweigungspunkte verbunden; die übrigen $m - 2$ Blätter hängen aber nicht mehr unter einander zusammen, sondern jedes derselben ist nur durch zwei Verzweigungspunkte mit dem ersten oder mit dem zweiten Blatte verknüpft. Damit wäre die vorhin erwähnte Normalform der Riemann'schen Fläche hergestellt.

Eine so verzweigte Fläche lässt sich nun in derselben Weise durch ein *kanonisches Querschnittsystem* in eine einfach zusammenhängende zerlegen, wie die bei den hyperelliptischen Integralen benutzte zweiblättrige Fläche, d. i. durch ein Querschnittsystem, wie es Riemann seinen Betrachtungen zu Grunde legt.*) In der That braucht man bei unserer Anordnung der Verzweigungspunkte nur die Verbindung des ersten und zweiten Blattes zu berücksichtigen; denn ein Blatt, welches z. B. nur mit dem ersten durch zwei Verzweigungspunkte, d. i. durch eine Uebergangslinie (Verzweigungsschnitt) zusammenhängt, kann man immer so verzerren, dass es zusammen mit dem ersten Blatte nur ein Blatt bildet, wie dies bei einer zweiblättrigen Fläche, deren Blätter durch nur 2 Verzweigungspunkte verbunden sind, bekannt ist. Zwischen dem ersten und zweiten Blatte haben wir $r - 2(m-2) = 2p + 2$ Verzweigungspunkte, also $p + 1$ Verzweigungsschnitte; um sie legt man dann bekanntlich jenes kanonische Schnittsystem in folgender Weise. Zuerst legt man, etwa im ersten Blatte, p Schnitte $b_1, b_2, \ldots b_p$: je einen um eine der p Uebergangslinien, so dass eine Uebergangslinie nicht durch einen Schnitt b_ν umkreist ist. Die Schnitte b verbindet man dann unter einander in irgend welcher Reihenfolge durch die Verbindungsschnitte $c_1, c_2, \ldots c_{p-1}$; endlich legt man p weitere Schnitte $a_1, a_2, \ldots a_p$ so, dass jeder von ihnen, von jener $(p+1)^{\text{ten}}$ Uebergangslinie U ausgehend, theils im ersten, theils

*) Vgl. R. A. F. §. 10 und p. 405 ff. in dem erwähnten Werke von C. Neumann. Das im Texte gegebene Querschnittsystem ist von dem Riemann'schen übrigens noch etwas verschieden.

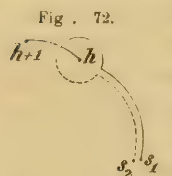
im zweiten Blatte verläuft und zu je einer der p anderen Uebergangslinien hinführt, wie es in Fig. 71 für $p = 3$ dargestellt ist (die im zweiten Blatte verlaufenden Schnitte sind durch punktirte Linien bezeichnet). Das so gezogene Curvensystem kann man sich nun aus $2p$ Querschnitten zusammengesetzt denken*); und dieselben bilden in ihrer Gesammtheit eine in sich zurücklaufende Curve, wenn man alle Schnitte einmal in positiver, einmal in negativer Richtung durchläuft, d. h. die so zerschnittene Fläche hat eine einzige Randcurve. Sie ist dann gleichzeitig durch die $2p$ Schnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche zerlegt; *ihr Zusammenhang ist also gleich* $2p + 1$.**)

Fig. 71.



Unter Benutzung dieses kanonischen Querschnittsystems erledigt sich nun die Frage nach den Werthänderungen, welche ein Integral erster Gattung durch Abänderung des Integrationsweges erleiden kann, von selbst. Jeder geschlossene Weg nämlich, welcher in der zerschnittenen *einfach zusammenhängenden* Fläche verläuft, d. h. die Schnitte a_ν, b_ν, c_ν nicht überschreitet, kann auf einen Punkt zusammengezogen werden; ein überall endliches Integral I, geführt über einen solchen Weg, gibt daher jederzeit Null, und zwei verschiedene Wege der Art, welche dieselben Punkte verbinden, führen zu demselben Integralwerthe. Wir haben also nur noch die Aenderungen zu betrachten, *welche beim Ueberschreiten jener Schnitte eintreten können.* Alle diese Werthänderungen aber lassen sich aus $2p$ Grössen linear und ganzzahlig zusammensetzen, wie man in folgender Weise erkennt. Wir denken uns die in Betracht kommenden $2p + 2$ Verzweigungspunkte (zwischen dem ersten und zweiten Blatte) numerirt, und zwar so, dass der erste mit dem zweiten, der dritte mit dem vierten, ... der $(2p + 1)^{\text{te}}$ mit dem $(2p + 2)^{\text{ten}}$ durch einen Verzweigungsschnitt verbunden ist. Wir wählen ferner zwei beliebige Punkte s_1 und s_2 der Fläche, welche bez. im ersten und zweiten Blatte über einander liegen und bezeichnen mit α_h den Werth des Integrals I geführt auf einem Wege, welcher von s_1 aus im obern Blatte verläuft, sich in kleinem Kreise um den h^{ten} Verzweigungspunkt windet und dann im untern Blatte nach s_2 zurückkehrt (Fig. 72). Das Inte-

Fig. 72.



*) Als erster Querschnitt ist die Curve b_1 aufzufassen, nachdem man zuvor die (geschlossene) Riemann'sche Kugelfläche durch Herausheben eines Punktes in eine nicht geschlossene verwandelt hat. Die übrigen $2p - 1$ Querschnitte sind: c_1 und b_2, c_2 und b_3, ... c_{p-1} und b_p, a_1, a_2, a_3 ... a_p.

**) Vgl. R. A. F. §. 7 und Neumann a. a. O.

gral I gibt nun offenbar Null, wenn man dasselbe auf einem alle $2p+2$ Verzweigungspunkte umschliessenden Wege herumführt, denn ein solcher Weg kann (durch's Unendliche hindurch) auf einen Punkt zusammengezogen werden. Andererseits aber kann man diesen Weg zusammenziehen auf eine Reihe einzelner Schleifen, die von den Punkten s_1, s_2 aus um die einzelnen Verzweigungspunkte in geschilderter Weise zu legen sind. Der Beitrag, welchen zwei um die Punkte $2h-1$ und $2h$ gelegte Schleifen zu dem Werthe von I geben, ist dann $\alpha_{2h-1}-\alpha_{2h}$. Denn hier wird der erste Weg von s_1 nach s_2, der zweite aber von s_2 nach s_1 zurückgelegt; der letztere gibt somit den negativen Werth von α_{2h} (Fig. 73). Führt man also I von s_1 aus um sämmtliche Schleifen zu s_1 zurück, so ergibt dies die Gleichung:

Fig. 73.

$$(7) \qquad \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4+\ldots+\alpha_{2p+1}-\alpha_{2p+2}=0\,.$$

Die Differenz irgend zweier Integrale α_h und α_k ist aber von den Punkten s_1, s_2 völlig unabhängig; denn den Integrationsweg des Integrals $\alpha_h-\alpha_k$ können wir zusammenziehen auf eine Schleife, welche die Verzweigungspunkte h und k beliebig eng umspannt, und auf einen von s_1 zu einem Punkte dieser Schleife und dann zu s_1 ebenso zurücklaufenden Weg; der Beitrag des letzteren aber hebt sich auf, und somit folgt, dass $\alpha_h-\alpha_k$ eine von s_1 und s_2 unabhängige *Constante* ist. Aus allen möglichen solchen Constanten lassen sich aber alle Werthänderungen von I zusammensetzen (vgl. p. 798). Diese Differenzen $\alpha_h-\alpha_k$ ferner kann man aus $2p+1$ solcher Differenzen linear zusammensetzen, welche man erhält, wenn man eines der Integrale α_h, etwa α_{2p+2}, von allen anderen abzieht, d. h. aus den $2p+1$ Grössen:

$$\beta_1=\alpha_1-\alpha_{2p+2}\,,\quad \beta_2=\alpha_2-\alpha_{2p+2}\,,\ \ldots\ \beta_{2p+1}=\alpha_{2p+1}-\alpha_{2p+2}\,.$$

Zwischen diesen Grössen erhält man noch aus Gleichung (7) die Relation:

$$(8) \qquad \beta_1-\beta_2+\beta_3-\beta_4+\cdots+\beta_{2p+1}=0\,;$$

es drückt sich also eine linear durch die übrigen aus, und es bleiben $2p$ linear unabhängige Werthänderungen von I, oder — wie man sich ausdrückt — $2p$ *„Periodicitätsmoduln" des Integrals I.* Wir können sonach folgenden Satz aussprechen:

Ein Integral erster Gattung hat im Allgemeinen $2p$ Periodicitätsmoduln. Nennen wir I den Werth des Integrals, genommen auf beliebigem Integrationswege, $I^{(1)}$, $I^{(2)}$, ... $I^{(2p)}$ seine Periodicitätsmoduln, so ist

$$I+m^{(1)}I^{(1)}+m^{(2)}I^{(2)}+\ldots+m^{(2p)}I^{(2p)}$$

der allgemeinste Werth, welchen das Integral durch Abänderung des

Integrationsweges erhalten kann, wo $m^{(1)}, m^{(2)}, \ldots m^{(2p)}$ *positive oder negative ganze Zahlen sind.*

Dies gilt für jedes einzelne der $(p-1)$-fach unendlich vielen Integrale erster Gattung. Wir werden von diesen aber immer nur p *beliebige* zu betrachten haben, denn aus ihnen lassen sich alle anderen linear zusammensetzen, vorausgesetzt dass man für die gewählten p Integrale immer denselben Integrationsweg zu Grunde legt; und *Letzteres soll im Folgenden immer geschehen.* Sind $I_1, I_2, \ldots I_p$ irgend p solche Integrale, genommen auf beliebigem (aber alle auf demselben) Wege, so ist das allgemeinste Werthsystem dieser Integrale auf irgend einem anderen Wege dargestellt durch das Schema:

$$\begin{array}{l} I_1 + m^{(1)} I_1^{(1)} + m^{(2)} I_1^{(2)} + \ldots + m^{(2p)} I_1^{(2p)} \\ I_2 + m^{(1)} I_2^{(1)} + m^{(2)} I_2^{(2)} + \ldots + m^{(2p)} I_2^{(2p)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ I_p + m^{(1)} I_p^{(1)} + m^{(2)} I_p^{(2)} + \ldots + m^{(2p)} I_p^{(2p)}. \end{array}$$

Die Periodicitätsmoduln bilden ein System von $2p^2$ Constanten, bei welchen die $2p$ Grössen derselben Horizontalreihe sich auf dasselbe Integral und von einander unabhängige Umgänge um Verzweigungspunkte, die p Grössen derselben Verticalreihe sich auf denselben Umgang und verschiedene Integrale beziehen. Diese Periodicitätsmoduln $I_h^{(k)}$ sind aber nicht von einander unabhängig; zwischen ihnen bestehen vielmehr noch algebraische Relationen, und zwar insbesondere zwischen den $I_h^{(k)}$ zweier Horizontalreihen bestehen Gleichungen, welche linear für die $I_h^{(k)}$ jeder der beiden Reihen sind.

Um diese Gleichungen zu entwickeln, wählt man für $I_h^{(k)}$ am besten die $2p$ Werthe des Integrals I_h, welche dasselbe, geführt über einen der Schnitte a_ν und b_ν, annimmt; in der That sind dies ja auch Umgänge um je zwei Verzweigungspunkte, und zwar der Art, dass sich keiner von ihnen aus den anderen zusammensetzen lässt. Wir wollen nun den Werth des Integrals I_h geleitet über b_ν mit $B_h^{(\nu)}$, geleitet über a_ν mit $A_h^{(\nu)}$ bezeichnen. Wir setzen also:

$$\begin{array}{lll} I_h^{(1)} = B_h^{(1)}, & I_h^{(2)} = B_h^{(2)}, & \ldots I_h^{(p)} = B_h^{(p)}, \\ I_h^{(p+1)} = A_h^{(1)}, & I_h^{(p+2)} = A_h^{(2)}, & \ldots I_h^{(2p)} = A_h^{(p)}. \end{array}$$

Da sich die Schnitte b_ν und a_ν durchkreuzen, und da beide Schnitte noch in beliebiger Entfernung oder Nähe um die betreffenden Verzweigungspunkte gelegt werden dürfen, so kann man offenbar dies auch so aussprechen, dass *sich das Integral* I_h *beim Ueberschreiten des Schnittes* a_ν *um die Grösse* $B_h^{(\nu)}$ *ändere, beim Ueberschreiten des Schnittes* b_ν *um die Grösse* $A_h^{(\nu)}$, *an den Schnitten* c_ν *dagegen constant bleibt.* Das Integral ist also bei der von uns über die Lage der Querschnitte

gemachten Annahme an den Schnitten a_ν und b_ν unstetig, während es im Uebrigen auf der Fläche allenthalben endlich und stetig verläuft.

Um nun die beregten Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln aufzustellen, führt man das Integral $\int I_h \, d I_k$ über die ganze Begrenzung der zerschnittenen, einfach zusammenhängenden Fläche, d. i. einmal in positiver und einmal in negativer Richtung über alle Schnitte a_ν, b_ν und c_ν, was den Werth Null ergeben muss; und so findet man die Relationen*):

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=p} \left(A_h^{(\nu)} B_k^{(\nu)} - B_h^{(\nu)} A_k^{(\nu)} \right) = 0. \tag{9}$$

Diese Relationen bestehen also zwischen den Periodicitätsmoduln je zweier Integrale I_h und I_k. —

Diese Betrachtungen führen endlich auf eine bestimmte *Normalform der Integrale erster Gattung.* Die Integrale $I_1, I_2, \ldots I_p$ hatten wir ganz beliebig aus den $(p-1)$-fach unendlich vielen Integralen I ausgewählt. Statt derselben kann man nun insbesondere solche lineare Combinationen der $I_1, I_2, \ldots I_p$ zu Grunde legen, deren Periodicitätsmoduln besonders einfache Werthe haben; und zwar zeigt sich, dass man die entsprechenden Grössen $B_h^{(k)}$ für $h \lesseqgtr k$ alle zu Null machen kann, während die Grössen $B_h^{(h)}$ alle gleich demselben beliebigen Werthe genommen werden dürfen, wofür man den Werth $2i\pi$ wählt.**) Dann folgt aber aus (9), dass $A_h^{(k)} = A_k^{(h)}$ wird. Um dies anzudeuten, schreiben wir dafür a_{hk}; also ist:

$$a_{hk} = a_{kh} = A_h^{(k)} = A_k^{(h)}.$$

Die so gewählten Integrale, welche gewissermassen ein (von der Wahl des kanonischen Querschnittsystems abhängiges) kanonisches Coordinatensystem in der $(p-1)$-fach unendlichen Mannigfaltigkeit von Integralen I bilden, sollen Normalintegrale genannt und mit $u_1, u_2, \ldots u_p$ bezeichnet werden. Ihre Eigenschaften sind in folgendem Satze ausgesprochen:

---

*) Vgl. R. A. F. §. 20, Cl. u. G. A. F. p. 106. Für hyperelliptische Integrale wurden diese Gleichungen von Weierstrass (a. a. O.) gefunden, für $p=2$ schon vorher von Rosenhain: Mémoire sur les fonctions de deux variables à quatre périodes, qui sont les inverses des intégrales ultra-elliptiques de la première classe, Mémoires présentées par divers savants, Paris 1851. — Ausserdem bestehen noch andere Relationen, die jedoch im Allgemeinen nicht bekannt sind; vgl. darüber die Einleitung zu R. A. F. und Fuchs: Crelle's Journal, Bd. 71 und 73, Thomae, ib. Bd. 66 und 71.

**) R. A. F. §. 20, Cl. u. G. A. F. p. 108; vgl. dazu Prym, Crelle's Journal, Bd. 71, p. 231, und Schläfli, ib. Bd. 76, wo gezeigt wird, dass die Determinante der für die Integrale J entstehenden linearen Gleichungen im Allgemeinen nicht verschwindet. — Es sei hervorgehoben, dass Riemann den Werth $i\pi$ statt $2i\pi$ wählt.

Ein Normalintegral erster Gattung u_h ändert sich nicht beim Ueberschreiten eines Querschnittes a_ν, nur an a_h um $2i\pi$. Die erste Hälfte der Periodicitätsmoduln der u_h ist daher gegeben durch das Schema:

$$\begin{array}{lllll} u_1) & 2i\pi & 0 & 0 \dots & 0 \\ u_2) & 0 & 2i\pi & 0 \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ u_p) & 0 & 0 & 0 \dots & 2i\pi . \end{array}$$

Die zweite Hälfte der Periodicitätsmoduln bildet ein System von symmetrischer Determinante, indem $a_{ik} = a_{ki}$:

$$\begin{array}{lllll} u_1) & a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1p} \\ u_2) & a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots & a_{2p} \\ . & . & . & . & . \\ u_p) & a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} \dots & a_{pp} ; \end{array}$$

d. h. das Integral u_h ändert sich um $a_{h\nu}$ beim Ueberschreiten von b_ν. Und die allgemeinsten Werthe, welche die Normalintegrale $u_1, u_2, \dots u_p$ durch Abänderung des Integrationsweges annehmen können, sind:

$$\begin{aligned} u_1' &= u_1 + 2i\pi\, m_1 + a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \dots + a_{1p}q_p \\ u_2' &= u_2 + 2i\pi\, m_2 + a_{21}q_2 + a_{22}q_2 + \dots + a_{2p}q_p \\ & \dots \\ u_p' &= u_p + 2i\pi\, m_p + a_{p1}q_1 + a_{p2}q_2 + \dots + a_{pp}q_p , \end{aligned}$$

wo die m, q positive oder negative ganze Zahlen bedeuten. —

In ähnlicher Weise lassen sich nun auch die *Integrale zweiter und dritter Gattung* normiren. Ein Integral dritter Gattung $S_{\xi\eta}$ war nach unserer früheren Definition nur bis auf additiv hinzutretende Integrale erster Gattung bestimmt (p. 792). Durch Hinzufügen eines geeigneten Integrals kann man zunächst $S_{\xi\eta}$ in ein anderes Integral überführen, dessen Periodicitätsmoduln an den Schnitten a_ν *sämmtlich* Null sind. Dies Integral nennen wir dann *ein Normalintegral dritter Gattung*; es soll im Folgenden immer durch $\Pi_{\xi\eta}$ bezeichnet werden. Die Werthänderungen desselben an den Schnitten b_ν erhält man durch Bestimmung der Werthe der Integrale $\int \Pi_{\xi\eta}\, du_\nu$, in positiver Richtung um die ganze Begrenzung der zerschnittenen Fläche geführt. Diese Werthe müssen gleich den entsprechenden Integralen sein, geführt über beliebige Curven in der einfach zusammenhängenden Fläche, welche die Unendlichkeitspunkte ξ, η einschliessen. Das Integral ergibt, auf diese Weise behandelt*), den Periodicitätsmodul von $\Pi_{\xi\eta}$ am Schnitte b_ν gleich $\int_\eta^\xi du_\nu$. Die zweite Hälfte der Periodicitätsmoduln des Integrals dritter Gattung drückt sich also durch die

*) Vgl. Cl. u. G. A. F. Fünfter Abschnitt.

zwischen den Unendlichkeitspunkten genommenen Integrale erster Gattung aus. Endlich ändert sich noch $\Pi_{\xi\eta}$ beim Umgange um ξ oder η um $+2i\pi$ bez. $-2i\pi$, denn das Integral wird in ihnen logarithmisch unendlich (p. 791), und wir können die absoluten Werthe der in $\Pi_{\xi\eta}$ vorkommenden Constanten immer so bestimmt annehmen, dass die logarithmische Periode gerade gleich $2i\pi$ wird. *Der allgemeinste Werth, welchen das Integral $\Pi_{\xi\eta}$ durch Abänderung des Inetgrationsweges annehmen kann, ist daher:*

$$\Pi'_{\xi\eta} = \Pi_{\xi\eta} + 2i\pi m + q_1 \int_\eta^\xi du_1 + q_2 \int_\eta^\xi du_2 + \ldots + q_p \int_\eta^\xi du_p,$$

wo $m, q_1, q_2 \ldots q_p$ positive oder negative ganze Zahlen sind. — Durch diese Festsetzungen über die Perioden ist das Differential $d\Pi_{\xi\eta}$ durch die Punkte ξ und η völlig und eindeutig bestimmt (im Gegensatze zu $dS_{\xi\eta}$).

Wir erwähnen hier noch einen wichtigen Satz, zu welchem das Integral $\int \Pi_{\xi\eta} d\Pi_{\alpha\beta}$ Veranlassung gibt, wenn man dasselbe in analoger Weise behandelt, wie dies eben für das Integral $\int \Pi_{\xi\eta} du_\nu$ erwähnt wurde. Derselbe lautet:

Das Normalintegral dritter Gattung Π ändert sich nicht, wenn man die Grenzen mit den Unendlichkeitspunkten vertauscht, d. h. es ist:

$$\int_\xi^\eta d\Pi_{\alpha\beta} = \int_\alpha^\beta d\Pi_{\xi\eta}.$$

Aus dem Integrale $\Pi_{\xi\eta}$ lässt sich endlich auch das „*Normalintegral zweiter Gattung*“ ableiten nach dem Satze, dass (vgl. p. 792):

$$E_\xi = \frac{\partial S_{\xi\eta}}{\partial \xi_1} \alpha_1 + \frac{\partial S_{\xi\eta}}{\partial \xi_2} \alpha_2 + \frac{\partial S_{\xi\eta}}{\partial \xi_3} \alpha_3,$$

wo $a_\xi^{n-1} a_\alpha = 0$. Hier haben wir $S_{\xi\eta}$ durch $\Pi_{\xi\eta}$ zu ersetzen, um das Normalintegral zweiter Gattung zu erhalten:

$$Z_\xi = \frac{\partial \Pi_{\xi\eta}}{\partial \xi_1} \alpha_1 + \frac{\partial \Pi_{\xi\eta}}{\partial \xi_2} \alpha_2 + \frac{\partial \Pi_{\xi\eta}}{\partial \xi_3} \alpha_3.$$

Es ergeben sich dann unmittelbar die Sätze*):

Die Periodicitätsmoduln von Z_ξ an den Schnitten a_ν sind sämmtlich Null.

Die Periodicitätsmoduln von Z_ξ an den Schnitten b_ν sind algebraische Functionen des Parameters ξ; und zwar ist der Periodicitätsmodul am Schnitte b_ν

$$\text{für } du_h = \frac{\varphi_h(x) \cdot (c x dx)}{a_x^{n-1} a_c} \quad \text{gleich: } \frac{\varphi_h(\xi) \cdot (c \xi \alpha)}{a_\xi^{n-1} a_c}.$$

---

*) Vgl. Roch: Ueber die Zahl der Constanten etc., Crelle's Journal, Bd. 64 und Cl. u. G. A. F. p. 120.

— Es sei schliesslich noch hervorgehoben, wie sich die Eigenschaften des Integrals dritter Gattung $\Pi_{\xi\eta}$ aus denen der Integrale erster Gattung u_h durch einen Grenzprocess ableiten lassen, wenn die Unendlichkeitspunkte von $\Pi_{\xi\eta}$ in einen Doppelpunkt der Grundcurve $f = 0$ zusammenfallen*); und auf diesen Fall lassen sich ja alle anderen durch eindeutige Transformation von f reduciren (p. 796). Die dazu nöthige Betrachtung wird für uns von Wichtigkeit werden, indem man vermöge derselben das sogenannte *erweiterte Umkehrproblem* als einen Grenzfall des Jacobi'schen Umkehrproblems der Abel'schen Integrale auffassen darf; wir können uns dann später auf das Folgende zurückbeziehen.

Lassen wir durch continuirliche Aenderung der Coëfficienten von $f(x)$ oder $F(x, y)$ einen Doppelpunkt entstehen, so fallen in diesen für jeden Punkt der Ebene zwei Berührungspunkte der von ihm ausgehenden Tangenten zusammen, ohne dann noch als eigentliche Berührungspunkte zu zählen (vgl. Fig. 52, p. 343). Insbesondere gilt dies auch für den unendlich fernen Punkt der Y-Axe; d. h. auf der zu $F = 0$ gehörigen Riemann'schen Fläche rücken zwei Verzweigungspunkte einander immer näher, indem sich der sie verbindende Verzweigungsschnitt immer mehr verkürzt. Sind beide Punkte zusammengefallen, so stossen in ihm zwar zwei Blätter der Fläche zusammen; indess kann man nicht mehr durch einen Umgang um den Punkt von einem Blatte in's andere gelangen: Man kann die Blätter in dem Punkte durch Biegung von einander entfernen, ohne den Charakter der Fläche dadurch zu ändern; auch darf man nicht einen Weg, der in dem einen Blatte bis zu dem Punkte läuft, in dem andern Blatte fortsetzen. Es haben dort zwar beide Blätter *diesen einen* Punkt gemein; die hier vereinigten Punkte sind aber sonst wie zwei ganz verschiedene Punkte zu behandeln und sollen demgemäss durch zwei verschiedene Buchstaben, ξ und η, bezeichnet werden. Wir sagen dann, dass dem Doppelpunkte der Curve die beiden Punkte ξ und η der Fläche entsprechen.

Die Normalform der Fläche und unser kanonisches Querschnittsystem auf ihr mögen nun so gewählt sein, dass die beiden nachher zusammenfallenden Verzweigungspunkte ein solches Paar bilden, um welches ein Schnitt b_ν — sagen wir b_p — herumgelegt ist. Nach der Deformation ist dann b_p eine in einem der beiden Blätter um den Punkt ξ herumlaufende geschlossene Curve. Der zugehörige Schnitt a_ν aber besteht jetzt aus einer Curve, welche von ξ ausgeht, bei dem

*) Aehnliche Grenzbetrachtungen sind auch von M. Marie a. a. O. angestellt, indem der Einfluss eines Doppelpunktes auf die Periodicitäts-Eigenschaften des Integrals $\int y\,dx$ bestimmt wird; vgl. die Anmerkung auf p. 794.

durch das Ziehen des Querschnittsystems ausgezeichneten Verzweigungsschnitte U in das andere Blatt übertritt (p. 799) und sodann in letzterem zum Punkte η zurückkehrt; dieser Weg verbindet also jetzt nur die Punkte ξ und η mit einander, *ohne jedoch eine geschlossene Curve zu bilden.*

Betrachten wir jetzt unsere p Integrale u_ν. Wenn auf $f = 0$ ein neuer Doppelpunkt entsteht, so wird ein beliebiges Integral erster Gattung I dadurch in ein Integral dritter Gattung übergehen, denn die im Zähler des Differentials dI auftretende Function φ wird, gleich Null gesetzt, nicht nothwendig eine Curve darstellen, welche durch den neuen Doppelpunkt hindurchgeht. Es ist aber sehr wichtig, dass *die $p - 1$ Normalintegrale erster Gattung $u_1, u_2, \ldots u_{p-1}$ von $f = 0$ in die $p - 1$ Normalintegrale erster Gattung $u'_1, u'_2, \ldots u'_{p-1}$ der deformirten Curve $f' = 0$ übergehen*, wenn wir voraussetzen, dass die beiden durch den Schnitt b_p umschlossenen Verzweigungspunkte sich zu dem Doppelpunkte von f' vereinigt haben. Die Integrale $u_1, \ldots u_{p-1}$ nämlich ändern sich bei einem Umgange um den Querschnitt b_p nicht, da sie alle am Schnitte a_p die Periode Null haben. Folglich bleiben auch die Integrale $u'_1, u'_2, \ldots u'_{p-1}$ bei einem Umgange um b_p, d. i. um den innerhalb b_p liegenden Doppelpunkt, ungeändert; sie werden also in letzterem nicht logarithmisch unendlich: Es sind *keine* Integrale dritter Gattung; es sind vielmehr Normalintegrale erster Gattung, da auch ihre sonstigen Eigenschaften den betreffenden Forderungen genügen. Das Integral u_p dagegen hat am Schnitte a_p die Periode $2i\pi$; das aus ihm bei der Deformation entstehende Integral erhält also bei einem Umgange um den Schnitt b_p, d. i. um den Punkt ξ bez. η, einen Zuwachs gleich $2i\pi$; dasselbe wird somit in der That in ξ bez. η logarithmisch unendlich: *Es ist ein Integral dritter Gattung* und soll demgemäss mit $\Pi_{\xi\eta}$ bezeichnet werden.

Für die Integrale u'_ν nun sind die Grössen $a_{1p}, a_{2p}, \ldots a_{p-1,p}$ nicht mehr als Perioden zu betrachten; denn sie waren bez. gleich den Werthen der Integrale $u_1, u_2, \ldots u_{p-1}$, geführt über den Schnitt a_p, und letzterer ist für die deformirte Fläche keine geschlossene Curve mehr, stellt also auch nicht mehr einen selbstständigen Umgang dar. Da er aber die Punkte η und ξ unter einander verbindet, so haben wir:

$$a_{1p} = \int_\eta^\xi du'_1, \quad a_{2p} = \int_\eta^\xi du'_2, \ldots a_{p-1,p} = \int_\eta^\xi du'_{p-1}.$$

Es ist ferner $a_{ik} = a_{ki}$; und die Grössen $a_{p1}, a_{p2}, \ldots a_{p-1,p}$ sind Perioden des Integrals u_p, welches in $\Pi_{\xi\eta}$ übergeht. *Die $p - 1$ Perioden des Integrals $\Pi_{\xi\eta}$ an den Schnitten $b_1, b_2, \ldots b_{p-1}$ sind also in der That durch die Integrale $\int_\eta^\xi du_\nu$ gegeben.* Es ist somit $\Pi_{\xi\eta}$ für die

Curve f' auch direct ein *Normalintegral* dritter Gattung. In der That sind ja auch die Perioden desselben an den Schnitten $a_1, a_2, \ldots a_{p-1}$, wie die des Integrals u_p, sämmtlich Null; die Periode $2i\pi$ von u_p am Schnitte a_p dagegen gibt jetzt die logarithmische Periode des Integrals $\Pi_{\xi\eta}$; die Periode a_{pp} dagegen wird unendlich gross, denn es ist:

$$a_{pp} = \int_{\eta}^{\xi} d\Pi_{\xi\eta},$$

und ξ, η sind Unendlichkeitspunkte von $\Pi_{\xi\eta}$. Eine unendlich grosse Periode aber ist als solche nicht mehr mitzuzählen. Damit hätten wir alle für das Normalintegral charakteristischen Eigenschaften abgeleitet.

VIII. Das Abel'sche Theorem und das Jacobi'sche Umkehrproblem.

Die Differentiale und Integrale, deren wichtigste Eigenschaften wir erörtert haben, sind nun für die Formulirung gewisser geometrischer (oder algebraischer) Probleme von grosser Wichtigkeit, und zwar zunächst für die Fragen, welche wir früher mit Hülfe des Restsatzes behandelt hatten (vgl. p. 432 ff.). An den letzteren knüpfen wir hier wieder an.

Den Inhalt desselben kann man in einer symbolischen Form darstellen, welche dann direct zu den Anwendungen des Abel'schen Theorems hinüberleitet. Wenn nämlich zwei Punktgruppen G_Q und G_R durch eine adjungirte Curve ausgeschnitten werden, so können wir diesen Umstand symbolisch durch die Gleichung:

$$G_Q + G_R = 0 \tag{1}$$

darstellen. Werden nun G_Q und G_R durch eine adjungirte Curve $A = 0$, G_Q und $G_{R'}$ durch eine andere $B = 0$, G_R und $G_{Q'}$ durch eine dritte $\alpha = 0$ ausgeschnitten, so sagt der Restsatz aus, dass auch $G_{Q'}$ und $G_{R'}$ durch eine adjungirte Curve ausgeschnitten werden. In der bezeichneten symbolischen Fassung heisst dies aber, dass aus den drei Gleichungen:

$$G_Q + G_R = 0, \quad G_Q + G_{R'} = 0, \quad G_{Q'} + G_R = 0 \tag{2}$$

die vierte Gleichung: $G_{Q'} + G_{R'} = 0$ folgen soll; und hierin ist es ausgesprochen, dass *wir verschiedene symbolische Gleichungen der Form* (1) *beliebig nach den Gesetzen der Addition und Subtraction combiniren dürfen.* Die dadurch erhaltenen Resultate stimmen dann ihrem Inhalte nach mit dem Restsatze überein. Unsere Eintheilung der Schnittpunkte von $A = 0$ mit der Grundcurve $f = 0$ in zwei Gruppen G_Q und G_R war noch sehr willkürlich: wir hätten statt derselben ebenso gut andere (und auch gleichzeitig mehr als zwei) Gruppen aus den $G + R$ Schnittpunkten bilden können. Um diese Gleichberechtigung

aller (nicht in vielfachen Punkten von f liegenden) Schnittpunkte von $A = 0$ auszudrücken, werden wir diese Punkte einzeln einführen. Bezeichnen wir sie der Reihe nach mit $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(\varrho)}$, wo $\varrho = Q + R$, so werden wir also an Stelle von (1) die folgende symbolische Gleichung setzen können:

$$(3) \qquad G_{x^{(1)}} + G_{x^{(2)}} + G_{x^{(3)}} + \cdots + G_{x^{(\varrho)}} = 0,$$

wo nun die einzelnen Gruppen G aus je einem Punkte bestehen.

Es liegt die Frage nahe, ob man diese symbolischen Relationen durch wirkliche ersetzen kann, d. h. ob es solche Functionen $F(x)$ von x_1, x_2, x_3 gibt, dass für die nicht in singuläre Punkte von f fallenden Schnittpunkte $x^{(i)}$ einer adjungirten Curve mit f die *wirkliche* Gleichung besteht:

$$(4) \qquad F(x^{(1)}) + F(x^{(2)}) + \ldots + F(x^{(\varrho)}) = 0,$$

wo auf der rechten Seite an Stelle von Null auch eine beliebige Constante stehen könnte.

Als solche Functionen werden wir nun die von uns behandelten algebraischen Integrale erkennen, und zwar, wenn es sich um Schnittpunktsysteme adjungirter Curven handelt, die (überall endlichen) Integrale erster Gattung. In der That erkennt man, dass die Function $F(x)$ *in keinem Punkte von f unendlich werden darf*. Wäre dies nämlich etwa in $x^{(1)}$ der Fall, so würde die Gleichung (4) nur noch bestehen können, wenn F gleichzeitig in einem anderen der ϱ Schnittpunkte negativ unendlich wird; legt man aber durch $x^{(1)}$ alle möglichen anderen Curven, so werden auch die $\varrho - 1$ übrigen Schnittpunkte andere und andere werden*), indem sie die ganze Curve f durchlaufen; d. h. F müsste in jedem Punkte von f unendlich werden, wodurch die Gleichung (4) wiederum illusorisch werden würde. F ist daher jedenfalls eine überall endliche Function von x; und es liegt somit nahe, für die Function $F(x)$ ein Integral erster Gattung zu wählen. Wir gehen daher jetzt von einem solchen aus und zeigen umgekehrt, dass für dasselbe ein Theorem der Form (4) wirklich besteht. Dies ist dann das Abel'sche Theorem für Integrale erster Gattung.

Letzteres ist rein algebraischer Natur, wenn man nicht von den Integralen, sondern von den Differentialen erster Gattung ausgeht; und dem entsprechend werden wir sogleich an der Hand rein algebraischer Rechnung zwei Beweise für dasselbe erbringen. Sobald man dann weiter zu den Integralen übergeht, muss man über den Lauf der Integrationswege in der zu $f = 0$ gehörigen Riemann'schen Fläche

---

*) Diese Schlussweise wird ungültig für Doppelpunkte von f: in der That treten bei nicht adjungirten Curven Integrale dritter Gattung auf; vgl. p. 817.

bestimmte Voraussetzungen machen und so das rein algebraische Gebiet verlassen, wie wir noch näher sehen werden.

Vor Durchführung jener beiden Beweise sei jedoch kurz geschildert, wie man nach Riemann unter Benutzung bekannter Sätze aus der Functionentheorie in sehr einfacher Weise zum Ziele gelangen kann.*) Es sei $B = 0$ eine adjungirte Curve von derselben Ordnung wie $A = 0$, welche nicht durch die Punkte $x^{(1)}, \ldots x^{(\varrho)}$ hindurchgeht, und wir setzen:

$$\zeta = \frac{B}{A}\,.$$

Dann ist ζ eine algebraische Function von x_1, x_2, x_3, welche (insofern immer $f(x) = 0$) wie f verzweigt ist und in den ϱ Punkten $x^{(i)}$ einfach unendlich wird; und jedem Werthe von ζ entsprechen (vermöge $f = 0$) ϱ Punkte x. Man kann also umgekehrt die Punkte x von f vermöge $f = 0$ und $A\zeta - B = 0$ als ϱ-werthige Functionen des Parameters ζ darstellen.**) Dann wird auch der Differentialquotient eines Integrals erster Gattung (p. 790) nach ζ, welcher mit DJ bezeichnet sei:

$$DJ = \frac{dJ}{d\zeta} = \frac{\varphi \cdot \left(c\,x\,\frac{dx}{d\zeta}\right)}{a_x^{\,n-1}\,a_c}$$

eine ϱ-werthige Function von ζ, deren ϱ Werthe mit $DJ^{(1)}, \ldots DJ^{(\varrho)}$ bezeichnet seien. Die letzteren sind daher die Wurzeln einer Gleichung ϱ^{ten} Grades, welche sich durch Elimination der x_i und dx_i aus den Gleichungen:

$$A\zeta - B = 0\,, \quad A\,.\,d\zeta + \zeta\,\Sigma\,\frac{\partial A}{\partial x_i}\,dx_i - \Sigma\,\frac{\partial B}{\partial x_i}\,dx_i = 0\,,$$

$$f(x) = 0\,, \quad a_x^{\,n-1}a_c\,.\,DJ = \varphi\,.\,\left(c\,x\,\frac{dx}{d\zeta}\right), \quad \Sigma\,\frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_i = 0$$

ergibt, wo die zweite Gleichung eben aussagt, dass die Punkte $x + dx$ die Schnittpunkte von $A(\zeta + d\zeta) - B = 0$ mit $f = 0$ sein müssen. Die symmetrischen Functionen der Differentialquotienten $DJ^{(1)}, \ldots DJ^{(\varrho)}$ dagegen (d. h. die Coëfficienten jener Gleichung) sind völlig *ein*deutige Functionen von ζ; insbesondere gilt dies auch für die Summe:

$$\Delta = DJ^{(1)} + DJ^{(2)} + \ldots + DJ^{(\varrho)}\,.$$

Nun bleibt das Integral $\int \Delta\, d\zeta$ als Integral erster Gattung allenthalben endlich; es ist also eine Function von ζ, welche in allen Punkten der zur Darstellung von ζ dienenden Ebene eindeutig und endlich ist,

---

*) Vgl. R. A. F. §. 14.

**) Eine Substitution der Art ist die auf p. 776 für das elliptische Integral nach dem Vorgange von Brioschi benutzte.

und somit nach einem bekannten Satze*) eine Constante; und das Differential desselben ist gleich Null, d. h. wir haben:

$$\Delta d\zeta = dJ^{(1)} + dJ^{(2)} + \ldots + dJ^{(\varrho)} = 0, \text{**)}$$

wo:
$$dJ^{(k)} = \left(\frac{\varphi \cdot (c\,x\,dx)}{a_x^{\;n-1}\,a_c}\right)_{x = x^{(k)}}.$$

Nun gibt es aber p linear von einander unabhängige Differentiale erster Gattung, und für jedes von ihnen gilt vorstehende Betrachtung. Insbesondere erhalten wir also für die Differentiale der Normalintegrale u_h den Satz:

Sind $x^{(i)}$ die Schnittpunkte von f mit einer adjungirten Curve A und $x^{(i)} + dx^{(i)}$ die Schnittpunkte mit einer zu A benachbarten Curve, von denen ϱ nicht mit den $x^{(i)}$ zusammenfallen mögen, so bestehen die p Gleichungen:

(5)
$$du_h^{(1)} + du_h^{(2)} + \ldots + du_h^{(\varrho)} = 0$$
$$(h = 1, 2, 3, \ldots p).$$

Weiterhin werden wir sehen, dass mittelst dieser p Gleichungen auch umgekehrt im Allgemeinen p der Punkte $x^{(i)}$ durch die übrigen bestimmt sind, dass sie dagegen nicht mehr so viele Punkte bestimmen, wenn die Ordnung von $A = 0$ kleiner als $n - 2$ ist. Durch Integration erhält man nun das Abel'sche Theorem für die Integrale erster Gattung, welches dann an Stelle der symbolischen Gleichung (3) tritt (für $\varrho = Q + R$) und somit in engster Beziehung zum Restsatze steht. Wegen der soeben angedeuteten und später näher zu besprechenden Umkehrbarkeit des in den Gleichungen (5) ausgesprochenen Satzes *kann man in der That auch aus dem* Abel'*schen Theoreme wieder den Restsatz ableiten*, wie aus den Eingangs gemachten Erörterungen deutlich sein wird; und so wurde der Inhalt desselben zuerst gefunden. Es war aber von principieller Wichtigkeit, dass man diesen rein algebraischen Satz auch unabhängig von den transcendenten Functionen des Abel'schen Theorems einsehen lernte, während andererseits dieses Theorem den Inhalt des Restsatzes in einer für die Anwendungen sehr vortheilhaften Form darstellt. Weiterhin erlaubt aber auch das Abel'sche Theorem gewisse Berührungsformeln in einfachster Weise

---

*) Vgl. z. B. p. 271 ff. in Neumann's Theorie der Abel'schen Integrale oder Durège's Theorie der Functionen eines complexen Arguments.

**) Dass diese Summe Null sein muss, lässt sich auch algebraisch direct aus der Natur des erwähnten Eliminationsproblems ableiten; vgl. darüber Harnack: Math. Annalen, Bd. 9, p. 371 ff. — Man findet hier auch die betreffende Gleichung 4ten Grades für die Schnittpunkte einer Geraden mit einer C_4 wirklich aufgestellt; die entsprechende Gleichung für eine C_3 wurde von demselben ebenfalls angegeben, ib. p. 235.

aufzustellen, welche sich durch das Correspondenzprincip nicht sogleich in der übersichtlichen Gestalt angeben lassen würden. —

Wir wollen nun eine directe Ableitung der Gleichungen (5) geben. Dabei mag das Problem noch in der Weise verallgemeinert werden, dass wir auch Schnittpunktsysteme nicht adjungirter Curven und Summen von Differentialen *dritter* Gattung betrachten; und zwar werden wir das Abel'sche Theorem für solche Integrale auf zwei verschiedene Weisen ableiten.

Wir beginnen mit Betrachtung des Schnittpunktsystems mit einer beliebigen Geraden.*) Letztere wählen wir zur Coordinatenaxe und führen derartig rechtwinklige Coordinaten ein, dass jene Gerade mit der X-Axe zusammenfällt, dass also ihre Gleichung durch $y = 0$ gegeben ist. Die Einführung der neuen Coordinaten geschieht durch eine lineare Transformation. Wir haben nun früher gesehen, dass sich ein algebraisches Differential bei einer solchen um die erste Potenz der Substitutionsdeterminante als Factor ändert, und zwar ist dies die Folge davon, dass im Zähler die Determinante $(c\,x\,d\,x)$ auftritt. In der Normalform eines Differentials dritter Gattung steht aber im Nenner auch eine Determinante, nämlich $(\xi\,\eta\,x)$, so dass sich jene Substitutionsdeterminante forthebt (vgl. p. 772). Bezeichnen wir also jetzt mit x, y die rechtwinkligen Coordinaten, mit ξ, η und ξ', η' bez. die Coordinaten der Unendlichkeitspunkte, so geht unser Normaldifferential dritter Gattung über in ein Differential der Form:

$$\frac{\Omega_{n-2}(x, y) \, . \, dy}{(ax + by + c)\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}},$$

wo: $$a = \eta' - \eta, \quad b = \xi' - \xi, \quad c = \xi\eta' - \eta\xi'.$$

Wir betrachten eine Summe solcher Differentiale, gebildet für die n Schnittpunkte von $f = 0$ mit $y = 0$, wobei die dy so gewählt sein müssen, dass sie die Schnittpunkte einer zur X-Axe benachbarten Geraden mit f bestimmen. Diese benachbarte Gerade wollen wir in der unendlich kleinen Entfernung ε zur X-Axe parallel annehmen, so dass $y - \varepsilon = 0$ ihre Gleichung ist. Bezeichnen wir also mit x_i, y_i die Coordinaten der n Schnittpunkte, mit dx_i, dy_i die zugehörigen Differentiale, so bestehen die Gleichungen

$$y_i = 0, \qquad dy_i = \varepsilon \, .$$

Unsere Summe von Differentialen ist sonach die folgende:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\Omega_{n-2}(x_i, 0) \, . \, \varepsilon}{(ax_i + c) \, . \, f'_{x_i}},$$

*) Den folgenden Beweis des Theorems verdankt der Herausgeber einer Mittheilung von Brill.

wo der Ausdruck f'_{x_i} bezeichnen soll, dass in dem partiellen Differentialquotienten von f nach x auch $y = 0$ und $x = x_i$ gesetzt werden soll. Der Factor ε ist allen Gliedern der Summe gemeinsam und kann also vor dieselbe gesetzt werden. Die dann übrig bleibende Summe ist bekanntlich weiter nichts als die Entwicklung des Ausdrucks $\frac{\Omega(x, 0)}{a \cdot f(x, 0)}$ nach Partialbrüchen, wenn man in dieser Entwicklung $x = -\frac{c}{a}$ setzt. Wir haben daher zunächst die Gleichung:

$$(6) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\Omega_{n-2}(x_i, 0)}{(ax_i + c) \cdot f'_{x_i}} = -\frac{1}{a} \frac{\Omega_{n-2}\left(-\frac{c}{a}, 0\right)}{f\left(-\frac{c}{a}, 0\right)},$$

wenn: $\qquad f(x, 0) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$.

Nun genügt die in einem Normaldifferentiale auftretende Function Ω nach den früheren Festsetzungen (p. 791) der Bedingung:

$$\Omega_{n-2}(\eta \xi x)(\xi \xi x) = (\xi \eta \xi)^2 \cdot f + (\xi \eta x) \cdot N,$$

wo ξ ein beliebiger Punkt ist; oder in unserm Coordinatensysteme, wenn wir noch $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 1$ nehmen:

$$\Omega_{n-2} \cdot (x\eta' - y\xi') \cdot (y\xi - x\eta) = c^2 \cdot f + (ax + by + c) \cdot N;$$

eine Identität, welche man in Rücksicht auf die Eigenschaften von Ω auch leicht wieder direct bestätigt. Aus ihr folgt für $y = 0$, $x = -\frac{c}{a}$:

$$\Omega_{n-2}\left(-\frac{c}{a}, 0\right) \cdot \eta \cdot \eta' = -a^2 \cdot f\left(-\frac{c}{a}, 0\right).$$

Multipliciren wir also schliesslich in (6) auf beiden Seiten mit $\varepsilon = dy_i$, so haben wir, da $a = \eta' - \eta$ die Relation:

$$(7) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\Omega_{n-2}\, dy}{(ax + by + c) f'_x}\right)_i = \varepsilon \frac{\eta' - \eta}{\eta \cdot \eta'} = \frac{\eta' - \varepsilon}{\eta'} - \frac{\eta - \varepsilon}{\eta},$$

wo der Index i an dem eingeklammerten Ausdrucke bezeichnen soll, dass in ihm $x = x_i$, $y = 0$ gesetzt werden soll.

In den beiden rechts auftretenden Termen steht im Nenner die linke Seite der Gleichung $y = 0$, geschrieben bez. in den Coordinaten der beiden Unstetigkeitspunkte, im Zähler die linke Seite der Gleichung der benachbarten Linie $y - \varepsilon = 0$, geschrieben bez. in denselben Coordinaten. Ersetzen wir also die X-Axe durch eine beliebige Gerade $u_x = 0$, bezeichnen die beiden Unendlichkeitspunkte des Differentials dritter Gattung wieder mit ξ und η und schreiten von den Schnittpunkten $x^{(i)}$ der Linie u zu den Schnittpunkten einer Linie $u + du$ fort, deren Gleichung durch $\Sigma(u_i + du_i) x_i = 0$ gegeben ist, so wird auf der rechten Seite von (7):

$\eta = u_\xi, \quad \eta' = u_\eta, \quad \eta - \varepsilon = \Sigma \xi_i (du_i + u_i), \quad \eta' - \varepsilon = \Sigma \eta_i (du_i + u_i)$.

Für die n Schnittpunkte $x^{(i)}$ und $x^{(i)} + dx^{(i)}$ zweier Geraden $u_x = 0$ und $\Sigma (u_i + du_i) x_i = 0$ mit $f = 0$ besteht somit die Differentialgleichung:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\Omega_{n-2}(cxdx)}{(\xi \eta x)\, n \,.\, u_x^{n-1} u_c} \right)_i = \frac{\Sigma \eta_i du_i}{u_\eta} - \frac{\Sigma \xi_i du_i}{u_\xi} = d\left(\log \frac{u_\eta}{u_\xi}\right).$$

Dies ist die gesuchte Gleichung, aus der sich durch Integration das Abel'sche Theorem ergibt, zunächst allerdings nur für die Schnittpunkte einer Geraden mit f. Wenden wir aber auf die Grundcurve eine eindeutige Transformation $x_i = \varphi_i(y)$ an, wo die φ_i von der m^{ten} Ordnung sind, so tritt an Stelle von $u_x = 0$ die Curve m^{ter} Ordnung $\Sigma u_i \varphi_i = 0$; ferner geht ein Normaldifferential dritter Gattung wieder in ein solches über (p. 796). Schreiben wir also nach der Transformation wieder x statt y und bezeichnen die Gleichung der neuen Grundcurve mit $\alpha_x^\nu = 0$; so erhalten wir die Differentialgleichung (7) in der Form:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\Omega_{n-2}(cxdx)}{(\xi \eta x) \,.\, \nu \,.\, \alpha_x^{\nu-1} \alpha_c} \right)_i = d\left(\log \frac{\varphi(\eta)}{\varphi(\xi)}\right), \tag{8}$$

wo $\varphi(x) = \Sigma u_i \varphi_i(x)$ gesetzt ist. Die Summe auf der linken Seite enthält n Glieder, während φ und f sich in $m\nu$ Punkten schneiden, wenn ν die Ordnung der neuen Curve $F \equiv \alpha_x^\nu = 0$ bedeutet. Dies liegt daran, dass eine Curve des Netzes $\Sigma u_i \varphi_i = 0$ die neue Curve $f = 0$ nur in n beweglichen Punkten trifft. Gehen wir also von einer Curve φ des Netzes zu einer benachbarten über, so ändern sich nur n der $m\nu$ Schnittpunkte, wobei aber auch (bei passender Wahl der Transformation von F in eine Curve f) $n = m\nu$ sein kann. In der That verschwinden ja für die gemeinsamen auf f gelegenen Punkte der beiden benachbarten Curven die $dx_k^{(i)}$ sämmtlich, so dass die entsprechenden Differentiale in der Summe von selbst ausfallen müssen. Die Gleichung (8) stellt also *die Differentialgleichung des* Abel'*schen Theorems für Integrale dritter Gattung in seiner allgemeinsten Form dar;* in ihr müssen die dx_k so gewählt sein, dass die Punkte $x_k^{(i)} + dx_k^{(i)}$ das Schnittpunktsystem einer zu $\varphi = 0$ benachbarten Curve mit f bilden.

Die Integration der Gleichung (8) können wir uns so bewerkstelligt denken, dass sich das System der Punkte $x^{(i)}$ auf $f = 0$ von einer Lage, in welcher es der Bedingung $\varphi = 0$ genügt, zu einer andern Lage fortbewegt, in welcher es durch eine Curve $\psi = 0$ ausgeschnitten wird, die mit $\varphi = 0$ von derselben Ordnung ist. Man kann dieses dadurch prägnanter hervortreten lassen, dass man einen

Curvenbüschel $\varphi + \lambda \psi = 0$ betrachtet*) und zwischen den Schnittpunktsystemen, welche $f = 0$ mit $\varphi = 0$ $(\lambda = 0)$ und $\psi = 0$ $(\lambda = \infty)$ gemein hat, diejenigen einschaltet, welche $f = 0$ mit $\varphi + \lambda\psi = 0$ (für zwischen 0 und ∞ liegende Werthe von λ) bestimmt. Diese Zwischensysteme verbinden alsdann die Grenzsysteme der Art, dass während λ sich von 0 bis ∞ bewegt, die Punktsysteme sich von den unteren Grenzen der Integrale zu den oberen hinbewegen. Bei der Integration selbst hat man also allein mit der einen Variabeln λ zu thun. Durch Integration der Gleichung (8) ergibt sich so das Abel-sche Theorem in der folgenden Fassung, wo $S_{\xi\eta}$ wie auf p. 790 definirt ist**):

Die Summe von mn gleichartigen (d. i. in gleicher Weise gebildeten) Normalintegralen dritter Gattung mit den Unendlichkeitspunkten ξ, η, deren untere Grenzen $x^{(i)}$ die mn Werthsysteme sind, welche den mn Schnittpunkten von $f = 0$ mit einer Curve m^{ter} Ordnung $\varphi = 0$ entsprechen, und deren obere Grenzen $y^{(i)}$ die mn Schnittpunkte mit einer Curve m^{ter} Ordnung $\psi = 0$ angeben, ist gleich dem Logarithmus einer algebraischen Function; und zwar besteht die Gleichung:

$$(9) \qquad \sum_{i=1}^{i=mn} \int_{x^{(i)}}^{y^{(i)}} dS_{\xi\eta} = \log \frac{\psi(\eta) \cdot \varphi(\xi)}{\varphi(\eta) \cdot \psi(\xi)}.$$

Hier kann man statt $S_{\xi\eta}$ auch $\Pi_{\xi\eta}$ schreiben, wo sich $\Pi_{\xi\eta}$ von $S_{\xi\eta}$ höchstens um ein hinzutretendes Integral erster Gattung unterscheidet (p. 804); denn wir werden sogleich sehen, dass die entsprechende Summe von Integralen erster Gattung verschwindet. Hinzuzufügen ist noch eine Bemerkung über die für die Integrale gewählten Integrationswege. Lässt man dieselben beliebig, so können auf der rechten Seite noch beliebige ganze Vielfache der Periodicitätsmoduln von $\Pi_{\xi\eta}$ hinzutreten (p. 805). Ordnet man aber die Punkte $x^{(i)}$, $y^{(i)}$ einander paarweise so zu, dass der Punkt $x^{(i)}$ in $y^{(i)}$ übergeht***),

*) Die Variable λ spielt dann dieselbe Rolle, wie oben die Variable ζ in dem Büschel $A\zeta - B = 0$ bei Riemann's Beweise, vgl. p. 810.

**) Vgl. Cl. u. G. A. F. p. 47. — Ein einfacher Beweis des Theorems (ohne Benutzung der Differentialgleichung) ergibt sich mittelst Riemann'scher Principien, wenn man das Integral $\int \log \frac{\varphi}{\psi}\, d\Pi_{\xi\eta}$ um die ganze Berandung der zerschnittenen Riemann'schen Fläche und um die Punkte ξ, η, $x^{(i)}$, $y^{(i)}$ herumführt; vgl. Cl. u. G. A. F. p. 125, und für Integrale erster Gattung: Weber, Math. Annalen, Bd. 8, p. 49. — Das Theorem wurde entdeckt von Abel für hyperelliptische Integrale: Crelle's Journal, Bd. 3, p. 313, allgemein 1826: Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes, Mémoires des savants étrangers, vol. 7, 1841.

***) Diese Zuordnung ist übrigens keineswegs eine völlig bestimmte.

wenn man in dem Büschel $\varphi + \lambda\psi = 0$ von $\varphi = 0$ zu $\psi = 0$ fortschreitet (wie es oben festgesetzt wurde), so erhält man auf der linken und rechten Seite von (9) den Werth Null, sobald man die Curven φ, ψ einander unendlich nahe rücken lässt; und also treten bei entsprechender Wahl der Integrationswege keine Perioden von $\Pi_{\xi\eta}$ hinzu. Bei dem Uebergange von φ zu ψ durch den Büschel $\varphi + \lambda\psi$ darf aber keiner der Punkte $x^{(i)}$ den Punkt ξ oder η passiren, denn für die entsprechende Lage von $\varphi + \lambda\psi$ würde $\Pi_{\xi\eta}$ unendlich gross, und somit die Gleichung (9) illusorisch werden oder jedenfalls einer näheren Untersuchung bedürfen. Endlich kann man $y^{(i)}$, $y^{(k)}$ und $x^{(i)}$, $x^{(k)}$ einander unendlich nahe rücken lassen, wodurch dann zwei Integrale der Summe einander gleich werden, vorausgesetzt, dass man ihre beiden Integrationswege in einander überführen kann, ohne einen Unendlichkeitspunkt von $\Pi_{\xi\eta}$ oder einen der für die Perioden von $\Pi_{\xi\eta}$ charakteristischen Verzweigungspunkte zu überschreiten; und letzteres soll daher angenommen werden. Wir fassen diese Regeln in folgendem Satze zusammen: *In der Gleichung* (9) *sind die obern und untern Grenzen der links benutzten Integrationswege einander so zugeordnet, dass die Wege unendlich klein werden, wenn man die Curven* $\varphi = 0$, $\psi = 0$ *unendlich nahe zusammenrücken lässt; und die verschiedenen Wege müssen so liegen, dass je zwei direct in einander überführbar sind, wenn ihre Grenzen gleich werden, und keiner von ihnen (oder alle) darf den Weg schneiden, auf welchem man von* $\log \frac{\varphi(\xi)}{\psi(\xi)}$ *zu* $\log \frac{\varphi(\eta)}{\psi(\eta)}$ *gelangt.**)

Für die geometrischen Untersuchungen sind nun die Integrale erster und diejenigen dritter Gattung von besonderer Wichtigkeit, welche in einem Doppelpunkte von f unendlich werden. Solche Integrale erhält man aus den obigen, wenn Ω_{n-2} den Factor $(\xi\eta x)$ enthält; und es kommt dann darauf an, ob die zurückbleibende Function $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung durch einen Doppelpunkt von f nicht mehr hindurchgeht (p. 794), oder ob dieselbe wieder zu f adjungirt ist. Im ersten Falle haben wir $\xi_i = \eta_i$, es wird also $\varphi(\xi) = \varphi(\eta)$ und $\psi(\xi) = \psi(\eta)$, so dass die rechte Seite von (9) zu Null wird. In beiden Fällen steht in Gleichung (6) in jedem Gliede der Summe links im Zähler eine Function $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung von x, während die lineare Function im Nenner fortfällt; eine solche Summe aber ist

*) Bei diesen Voraussetzungen kann man nach dem Satze über Vertauschung von Parameter und Argument (p. 805) die Gleichung (9) auch in der Form schreiben (Cl. u. G. A. F. p. 127):

$$\sum_i \int_\xi^\eta d\Pi_{x^{(i)}\,y^{(i)}} = \log \frac{\varphi(\xi)}{\psi(\xi)} - \log \frac{\varphi(\eta)}{\psi(\eta)}.$$

nach einem bekannten Satze aus der Theorie der Partialbruchzerlegung gleich Null, so dass auf der rechten Seite von (9) auch im zweiten Falle eine Null auftritt. Man hat also den Satz:

Die Summe von gleichartigen Integralen erster Gattung) oder von solchen Integralen dritter Gattung, die nur in einem Doppelpunkte von f unendlich werden, von dem Schnittpunktsysteme der Curve $f=0$ mit einer Curve m^{ter} Ordnung $\varphi=0$ ausgedehnt bis zu dem Schnittpunktsysteme von $f=0$ mit einer Curve m^{ter} Ordnung $\psi=0$, ist immer gleich Null.***)

Hierbei ist zunächst vorausgesetzt, dass die Curven $\varphi=0$, $\psi=0$ nicht beide durch den Doppelpunkt hindurchgehen. In der That wird er für die in dem Doppelpunkte unendlich werdenden Integrale dritter Gattung dann auch ungültig, indem auf der rechten Seite nicht mehr Null auftritt. Sei nämlich für den Augenblick

$$\varphi=\varphi_x{}^m, \quad \psi=\psi_x{}^m,$$

so wird in diesem Falle, wenn y_i die Coordinaten des Doppelpunktes sind:

$$\frac{\varphi(\xi)}{\psi(\xi)}=\frac{\varphi_y{}^{m-1}\varphi_\alpha}{\psi_y{}^{m-1}\psi_\alpha}, \quad \frac{\varphi(\eta)}{\psi(\eta)}=\frac{\varphi_y{}^{m-1}\varphi_\beta}{\psi_y{}^{m-1}\psi_\beta},$$

wo α ein Punkt auf der einen Tangente von y (also z. B. ein zu ξ auf der Riemann'schen Fläche benachbarter Punkt, vgl. p. 806) ist und β ein Punkt der anderen Tangente von y (z. B. benachbart zu η). Diese beiden Quotienten aber sind nicht mehr einander gleich; die Differenz ihrer Logarithmen gibt also nicht mehr Null.

Für Integrale erster Gattung bleibt dagegen der Satz auch bestehen, wenn die Curven φ, ψ durch die Doppelpunkte von f hindurchgehen; insbesondere bestehen daher für *adjungirte* Curven p verschiedene Gleichungen der Form (9), wenn man rechts Null setzt. Man erkennt dies direct aus (6), denn auf der linken Seite dieser Gleichung erhält man dann eine Summe der Form:

$$\Sigma_i \frac{\varphi_{n-3}(x_i, 0)}{f' x_i},$$

---

*) Dieser Satz folgt übrigens auch direct aus (9), denn letztere Gleichung gilt immer, wie man auch $S_{\xi\eta}$ für dieselben Punkte ξ, η bilden mag; die Differenz zweier solcher Werthe von $S_{\xi\eta}$ ist aber nach p. 792 ein Integral erster Gattung.

**) Ein anderer Fall, wo auf der rechten Seite der Werth Null erscheint, tritt ein, wenn die Curve des Büschels $\varphi+\lambda\psi=0$, welche durch ξ geht, von selbst auch η enthält. Ist nämlich ϱ deren Parameter, so ist gleichzeitig:

$$\varphi(\xi)+\varrho\psi(\xi)=0 \quad \text{und} \quad \varphi(\eta)+\varrho\psi(\eta)=0,$$

also in der That: $\varphi(\xi)\cdot\psi(\eta)=\varphi(\eta)\cdot\psi(\xi)$.

und diese Summe verschwindet nach einem bekannten Satze der Algebra. In der That würde ja auch, indem Ω den Factor $ax+by+c$ erhält:

$$\Omega_{n-2}(x, 0) = \varphi_{n-3}(x, 0) \,.\, (ax + c);$$

und dieser Ausdruck verschwindet für $x = -\frac{c}{a}\cdot$ So weit sich also das Theorem auf Integrale erster Gattung bezieht, führt es uns zu unserem Ausgangspunkte zurück; denn sein Inhalt entspringt auch aus der Differentialgleichung (5) durch Integration. In den Gleichungen desselben kommen auch nur die nicht in singulären Punkten von f liegenden Schnittpunkte vor, wie es sein soll, denn die übrigen sind den Curven φ und ψ, welche die Grenzen bestimmen, gemeinsam. Die Zahl p der so gefundenen transscendenten Bedingungen stimmt genau mit der Anzahl von algebraischen Bedingungen überein, welche nach dem Früheren für die Schnittpunkte einer Curve m^{ter} Ordnung mit f bestehen müssen, wenn $m > n - 3$. Wie sich dies für $m \leqq n - 3$ modificirt, werden wir später sehen.

Man wird jetzt noch die weitere (schon oben angedeutete) Frage aufwerfen, ob man umgekehrt, wenn die p Gleichungen (5) oder deren Integralgleichungen bestehen, immer Curven angeben kann, welche die Grundcurve bez. in den Punkten schneiden, die in den Grenzen der Integrale auftreten, ob also das betreffende Punktsystem durch die Gleichungen (5) als das vollständige Schnittsystem von f mit einer adjungirten Curve völlig charakterisirt ist. Diese Frage werden wir weiterhin in der That bejahend beantworten.

Zuvor wollen wir das Abel'sche Theorem in anderer Weise ableiten (ohne Benutzung einer eindeutigen Transformation), um so mehr, als dabei der Zusammenhang desselben mit anderen rein algebraischen Sätzen hervortreten wird, welche im Wesentlichen von Jacobi herrühren.

Es seien in der Ebene μ beliebige Punkte $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(\mu)}$ gegeben, deren Gesammtheit durch eine Gleichung μ^{ter} Klasse in Liniencoordinaten, nämlich $u_\chi{}^\mu = 0$, dargestellt werden mag. Wir verbinden diese Punkte einzeln mit zwei ebenfalls ganz willkürlich gewählten Punkten ξ und η. Die Gleichungen der beiden so erhaltenen Systeme von je μ Strahlen sind dann bez. $(\chi x \xi)^\mu = 0$ und $(\chi x \eta)^\mu = 0$; und man kann setzen:

$$(10) \qquad (\chi x \xi)^\mu = \prod_{i=1}^{i=\mu} (x \xi x^{(i)}), \quad (\chi x \eta)^\mu = \prod_{i=1}^{i=\mu} (x \eta x^{(i)}).$$

Diese beiden Strahlensysteme schneiden sich in μ^2 Punkten, von denen μ eben die Punkte $x^{(i)}$ sind; ausserdem haben sie also noch

$\mu(\mu-1)$ Punkte mit einander gemein. Durch diese „übrigen Schnittpunkte" — so sollen dieselben kurz bezeichnet werden — kann man jedenfalls noch eine Curve der Ordnung $2\mu-2$ legen:

$$\Theta_x^{2\mu-2}=0,$$

denn eine solche ist erst durch $(\mu-1)(2\mu+1)$ Bedingungen festgelegt; es bleiben also in ihr noch μ^2-1 willkürliche Parameter, über die wir erst später in passender Weise verfügen werden. Nach diesen Festsetzungen wollen wir zeigen, dass Folgendes eine identische Gleichung ist*):

$$(11)\quad \mu^2\Theta_x^{2\mu-2}\prod_{i=1}^{i=\mu}(\chi x^{(i)}\xi)^{\mu-1}(\chi\eta\xi)(\chi' x^{(i)}\eta)^{\mu-1}(\chi'\xi\eta)$$
$$+\sum_{k=1}^{k=\mu}\Big\{\big(\Theta_y^{2\mu-2}(\xi\eta y)^2\big)_k\prod_{i=1}^{i=\mu}{}_k\Big((\chi z\xi)^{\mu-1}(\chi\eta\xi)(\chi' z\eta)^{\mu-1}(\chi'\xi\eta)(x\xi z)(x\eta z)\Big)_i\Big\}$$
$$=A\,.\,(\chi x\xi)^{\mu}+B\,.\,(\chi x\eta)^{\mu}\,.$$

Hier steht links im zweiten Terme eine Summe von μ Gliedern, deren jedes wieder aus dem Producte von $\Theta_{x^{(k)}}^{2\mu-2}(\xi\eta x^{(k)})$ in $\mu-1$ andere Factoren besteht; denn der Index k an dem Productzeichen Π soll andeuten, dass in dem Producte, welches im k^{ten} Gliede der Summe auftritt, der dem Index $i=k$ entsprechende Factor ausgelassen werden soll; ferner soll der Index k an dem eingeklammerten Ausdrucke andeuten, dass in ihm $y=x^{(k)}$, und der Index i an der anderen Klammer, dass in ihr $z=x^{(i)}$ zu setzen ist; die Symbole χ' endlich sollen mit χ gleichwerthig sein, so dass $u_\chi^{\mu}=u_{\chi'}^{\mu}$. Um die Richtigkeit der Gleichung (11) nachzuweisen, haben wir zu zeigen, dass der links stehende Ausdruck eine Curve darstellt, welche durch alle μ^2 Schnittpunkte von $(\chi x\xi)^{\mu}=0$ und $(\chi x\eta)^{\mu}=0$ hindurchgeht. Setzen wir zu dem Zwecke zunächst $x=x^{(rs)}$, d. h. gleich dem Schnittpunkte der Verbindungslinie von $x^{(r)}$ und ξ mit der Verbindungslinie von $x^{(s)}$ und η, so verschwindet der erste Term links, weil Θ durch diesen Punkt hindurchgehen soll, und jedes Glied der Summe im zweiten Terme ist Null wegen der Gleichungen

$$(x^{(rs)}\xi x^{(r)})=0,\quad (x^{(rs)}\eta x^{(s)})=0,$$

denn einer dieser Factoren kommt in jedem Gliede der Summe vor. Setzen wir in (11) ferner $x=x^{(r)}$, so kommt links ebenfalls Null, indem sich die beiden Terme gegen einander aufheben. In der

*) Denkt man sich die beiden Parameter, welche die Strahlen der von ξ und η ausgehenden Büschel bestimmen, als Veränderliche eingeführt, so kann man diese Gleichung auch durch zweimalige Anwendung einer gewöhnlichen Partialbruchzerlegung erzeugen; vgl. p. 779 ff.

μ-gliedrigen Summe nämlich verschwindet alsdann allein das dem Index $k = r$ entsprechende Glied nicht. Für $k = r$ aber bestehen die Gleichungen:

$$(12)\qquad \begin{aligned} \prod_{i=1}^{i=\mu}{}_r (x^{(r)}\eta x^{(i)}) \,.\, (\xi\eta x^{(r)}) &= \mu\,(\chi x^{(r)}\eta)^{\mu-1}\,(\chi\xi\eta) \\ \prod_{i=1}^{i=\mu}{}_r (x^{(r)}\xi x^{(i)}) \,.\, (\eta\xi x^{(r)}) &= \mu\,(\chi x^{(r)}\xi)^{\mu-1}\,(\chi\eta\xi), \end{aligned}$$

welche sich aus den Gleichungen (10) durch Polarenbildung leicht ergeben; und vermöge dieser Gleichungen wird das allein übrig bleibende r^{te} Glied der Summe gerade negativ gleich dem ersten Terme links, wie es sein soll. Der Ausdruck links verschwindet also in der That für alle μ^2 Schnittpunkte der beiden Systeme von je μ Strahlen, q. e. d.

Wir bilden nun auf beiden Seiten der Gleichung (11) die $(\mu-1)^{\text{te}}$ Polare von ξ und setzen dann $x = \eta$; d. h. wir setzen auf beiden Seiten $x = \xi + \lambda\eta$ und suchen die Coëfficienten von $\lambda^{\mu-1}$. Auf der rechten Seite erhalten wir dann identisch Null. Es wird also:

$$(13)\quad \mu^2\binom{2\mu-2}{\mu-1}\,.\,\Theta_\xi^{\mu-1}\Theta_\eta^{\mu-1}\prod_{i=1}^{i=\mu}\Big[(\chi x\xi)^{\mu-1}(\chi\eta\xi)(\chi' x\eta)^{\mu-1}(\chi'\xi\eta)\Big]_i$$

$$= -\sum_{k=1}^{k=\mu}\Big\{\Big[\Theta_x^{2\mu-2}(\xi\eta x)^2\Big]_k \prod_{i=1}^{i=\mu}{}_k\Big[(\chi x\xi)^{\mu-1}(\chi\eta\xi)(\chi' x\eta)^{\mu-1}(\chi'\xi\eta)(\eta\xi x)(\xi\eta x)\Big]_i\Big\},$$

wo die Indices i, k an den eckigen Klammern aussagen, dass in letzteren $x = x^{(i)}$ bez. $x = x^{(k)}$ zu nehmen ist. Jedes Glied der rechts stehenden Summe enthält das vollständige (d. h. auf alle μ Werthe des Index i sich beziehende) Product:

$$-\prod_{i=1}^{i=\mu}(\xi\eta x^{(i)})\,(\eta\xi x^{(i)}) = -\,(\chi\xi\eta)^\mu\,(\chi'\eta\xi)^\mu = (-1)^{\mu+1}\,[(\chi\xi\eta)^\mu]^2.$$

Diesen Factor wollen wir vor das Summenzeichen setzen, und dann auf beiden Seiten mit demselben, sowie mit dem links auftretenden vollständigen Producte dividiren; alsdann erhalten wir folgenden Satz:

Zwischen μ beliebigen Punkten $x^{(i)}$ der Ebene, dargestellt durch $u_\chi^\mu = 0$, und zwei ebenfalls beliebigen Punkten ξ, η besteht die identische Gleichung:

$$(14)\quad \mu^2\binom{2\mu-2}{\mu-1}\frac{\Theta_\xi^{\mu-1}\Theta_\eta^{\mu-1}}{[(\chi\xi\eta)^\mu]^2}(-1)^\mu = \sum_{k=1}^{k=\mu}\left[\frac{\Theta_x^{2\mu-2}}{(\chi x\xi)^{\mu-1}(\chi\eta\xi)(\chi' x\eta)^{\mu-1}(\chi'\xi\eta)}\right]_k,$$

wo $\Theta = 0$ durch alle übrigen $\mu(\mu-1)$ Schnittpunkte der Verbindungslinien von ξ und η mit den Punkten $x^{(i)}$ geht.

Aus dieser Identität ergibt sich nun durch eine leichte Umformung der sogenannte Jacobi'sche Satz, aus dem dann weiter das Abel'sche Theorem abgeleitet werden kann. Wir nehmen insbesondere an, dass jene μ Punkte die Schnittpunkte zweier Curven

$$f = a_x^n = 0 \quad \text{und} \quad \varphi = \alpha_x^m = 0$$

seien, welche alle getrennt liegen mögen, so dass $\mu = mn$. Dann gehen die beiden von ξ und η ausgehenden Systeme zu je μ Strahlen durch alle Schnittpunkte von f und φ, d. h. wir können setzen:

$$(15) \qquad \begin{aligned} (\chi x \xi)^\mu &= A_x^{\mu-n} . f + B_x^{\mu-m} . \varphi \\ (\chi x \eta)^\mu &= C_x^{\mu-n} . f + D_x^{\mu-m} . \varphi . \end{aligned}$$

Setzt man in diesen Gleichungen $x = x^{(ik)}$, so werden nur die linken Seiten gleich Null, nicht aber f und φ. *Für die übrigen Schnittpunkte muss also die Determinante verschwinden:*

$$(16) \qquad \Delta = \Delta_x^{2\mu-m-n} = A . D - B . C,$$

Setzt man aber in (15) $x = x^{(i)}$, so verschwinden auch f und φ. Bildet man also die erste Polare von ξ und η in Bezug auf $(\chi x \xi)^\mu = 0$ und $(\chi x \eta)^\mu = 0$ für $x = x^{(i)}$, so kommt, indem man die in f, φ multiplicirten Terme als verschwindend auslässt:

$$\begin{aligned} \mu\,(\chi x^{(i)} \xi)^{\mu-1} (\chi \eta \xi) &= [n A a_x^{n-1} a_\eta + m B \alpha_x^{m-1} \alpha_\eta]_i, \\ \mu\,(\chi x^{(i)} \xi)^{\mu-1} (\chi \xi \xi) &= [n A a_x^{n-1} a_\xi + m B \alpha_x^{m-1} \alpha_\xi]_i, \\ \mu\,(\chi x^{(i)} \eta)^{\mu-1} (\chi \eta \eta) &= [n C a_x^{n-1} a_\eta + m D \alpha_x^{m-1} \alpha_\eta]_i, \\ \mu\,(\chi x^{(i)} \eta)^{\mu-1} (\chi \xi \eta) &= [n C a_x^{n-1} a_\xi + m D \alpha_x^{m-1} \alpha_\xi]_i. \end{aligned}$$

In der zweiten und dritten Gleichung haben die linken Seiten wegen der Factoren $(\chi \xi \xi)$, $(\chi \eta \eta)$ den Werth Null. Nach dem Multiplicationssatze der Determinanten wird daher ($\mu = mn$):

$$\mu \begin{vmatrix} (\chi x \xi)^{\mu-1} (\chi \eta \xi) & 0 \\ 0 & (\chi x \eta)^{\mu-1} (\chi \xi \eta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_x^{n-1} a_\eta & \alpha_x^{m-1} \alpha_\eta \\ a_x^{n-1} a_\xi & \alpha_x^{m-1} \alpha_\xi \end{vmatrix}$$
$$= -\Delta . (a \alpha u)\, a_x^{n-1} \alpha_x^{m-1},$$

wenn man sich für x immer $x^{(i)}$ geschrieben denkt, und wenn $u_i = (\xi \eta)_i$ gesetzt wird. Mittelst dieser Relation können wir in (14) die rechts auftretenden Nenner durch Δ und die Functionaldeterminante von f, φ und u (d. i. $\overline{\xi \eta}$) ausdrücken. Die Form Δ hebt sich dann gegen den Zähler fort, wenn wir gleichzeitig

$$\Theta_x^{2\mu-2} = U_x^{m+n-2} . \Delta_x^{2\mu-m-n}$$

setzen, wo U eine ganz beliebige Function der Ordnung $m + n - 2$ ist. Letzteres darf man in der That immer, denn der Curve $\Theta = 0$ war *nur* die Bedingung auferlegt durch die $\mu(\mu - 1)$ übrigen Schnittpunkte zu gehen; und diese Bedingung wird durch $\Delta = 0$ erfüllt.

Mittelst der angegebenen Substitution nimmt nun die Gleichung (14) folgende Gestalt an:

$$(17)\quad \sum_{k=1}^{k=\mu}\left(\frac{U_x^{\,n+m-2}}{(a\alpha u)\,a_x^{\,n-1}\,\alpha_x^{\,m-1}}\right)_k = (-1)^{\mu-1}\cdot\mu\binom{2\mu-2}{\mu-1}\frac{\Theta_\xi^{\mu-1}\,\Theta_\eta^{\mu-1}}{[(\chi\xi\eta)^\mu]^2},$$

wo $\mu = mn$, $u_i = (\xi\eta)_i$, und wo der Index k an dem eingeklammerten Ausdrucke aussagt, dass in letzterem $x = x^{(k)}$ gesetzt werden soll. Dieses ist die Gleichung des Jacobi'schen Satzes; derselbe lautet:

Sind $f = 0$, $\varphi = 0$ zwei Curven n^{ter} und m^{ter} Ordnung, ist $u_\chi^{\,mn} = 0$ die Gleichung ihrer mn (getrennt liegenden) Schnittpunkte in Liniencoordinaten, ferner Δ durch die Gleichung (16) *definirt, U eine beliebige ganze homogene Function der Ordnung $n + m - 2$, endlich $\Theta = \Delta U$, so besteht für die Schnittpunkte von $f = 0$ und $\varphi = 0$ und zwei beliebige andere Punkte ξ, η immer die Gleichung* (17).

Einen besonders wichtigen Specialfall dieses Satzes heben wir noch hervor. Setzt man nämlich

$$U_x^{\,n+m-2} = V_x^{\,n+m-3}\,.\,u_x = V_x^{\,n+m-3}\,.\,(\xi\eta x),$$

so wird wegen $u_\xi = 0$ und $u_\eta = 0$ auch $\Theta_\xi^{\mu-1}\Theta_\eta^{\mu-1} = 0$; und wir erhalten so die Gleichung*):

$$(18)\quad \sum_{i=1}^{i=\mu}\left(\frac{V_x^{\,n+m-3}\,.\,u_x}{(a\alpha u)\,a_x^{\,n-1}\,\alpha_x^{\,m-1}}\right)_i = 0.$$

Diese Gleichung hängt *allein* von den Coordinaten der mn Schnittpunkte der Curven f, φ und von den Coëfficienten ihrer Gleichungen ab (nicht mehr von den willkürlichen Punkten ξ, η) und sind deshalb von besonderer Wichtigkeit. Dieselben sind in der That von der Linie u völlig unabhängig, denn für einen Schnittpunkt von f und φ kann man immer setzen (vgl. p. 769)

*) Für diesen Fall ist obiger Satz von Jacobi gegeben: Theoremata nova algebraica, Crelle's Journal, Bd. 14, p. 281. Die allgemeinere Gleichung (17) findet sich bei Cl. u. G. A. F. p. 44. Für die Darstellung des Beweises im Texte benutzte der Herausgeber einige mündliche Bemerkungen von Gordan. — Die Gleichung (18) ist eine Erweiterung eines auf p. 817 f. für eine binäre Veränderliche x ausgesprochenen Satzes, welcher in homogener Form dahin lautet, dass wenn $x_1^{(i)} : x_2^{(i)}$ die Wurzeln einer Gleichung

$$a_x^{\,n} \equiv (a_1x_1 + a_2x_2)^2 = 0$$

sind, die Identität besteht:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{V_x^{\,n-2}\,u_x}{(au)\,a_x^{\,n-1}}\right)_i = 0,$$

wo V eine beliebige binäre Form $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung bedeutet. In Betreff einer Erweiterung für beliebig viele Veränderliche vgl. Clebsch, Crelle's Journal, Bd. 63, p. 224 ff.

$$\varrho_i x_k^{(i)} = [(a\,\alpha)_k a_x^{n-1} \alpha_x^{m-1}]_{x=x^{(i)}}.$$

Die Function V_x^{n+m-3} ist noch ganz beliebig; man kann daher alle möglichen Gleichungen (18) aus $\frac{1}{2}(n+m-2)(n+m-1)$ beliebig gewählten linear zusammensetzen. Aber $V(x^{(i)})$ kann man wegen $f(x^{(i)}) = 0$, $\varphi(x^{(i)}) = 0$ auch durch

$$V(x^{(i)}) + Af(x^{(i)}) + B\varphi(x^{(i)})$$

ersetzen, wo A von der $(m-3)^{\text{ten}}$, B von der $(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung in $x^{(i)}$ ist, ohne dass dadurch die betreffende Gleichung (18) geändert würde. Vermöge $f = 0$, $\varphi = 0$ kann man also alle Gleichungen (18) aus

$$\tfrac{1}{2}(n+m-2)(n+m-1) - \tfrac{1}{2}(m-2)(m-1) - \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) = mn - 1$$

unter ihnen herstellen.

Aus diesen $mn - 1$ Gleichungen kann man dann die Verhältnisse der mn Grössen:

$$S_i = \frac{1}{\varrho_i} = \left(\frac{u_x}{(a\,\alpha\,u)\,a_x^{n-1}\,\alpha_x^{m-1}}\right)_i$$

linear berechnen. Andererseits aber kann man aus je mn der Gesammtheit der $\frac{1}{2}(n+m-2)(n+m-1)$ Gleichungen (18) diese Grössen eliminiren und erhält so eine Anzahl von Relationen zwischen den Coordinaten der Schnittpunkte von f und φ, in denen die Coëfficienten von f und φ nicht mehr vorkommen, die also *allein* von jenen Coordinaten abhängen; und zwar wird die Zahl dieser Relationen, da nur die Verhältnisse der mn Grössen S_i vorkommen, gleich

$$\tfrac{1}{2}(n+m-2)(n+m-1) - mn + 1 = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) + \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2).$$

Für $m = n$ stimmt dies überein mit dem früher erhaltenen Resultate, dass zwischen den $2n^2$ Coordinaten der n^2 Punkte $(n-1)(n-2)$ Relationen bestehen sollen (vgl. p. 755). Für $m > n$ können diese Relationen aber nicht von einander unabhängig sein; denn sonst könnte es eintreten, dass

$$\tfrac{1}{2}(m-1)(m-2) + \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) \geqq 2mn$$

wird, d. h. die Zahl der Relationen die der Unbekannten übertrifft, was nicht sein darf. Die Zahl der von einander unabhängigen Gleichungen zwischen den Coordinaten der mn Punkte haben wir ja auch schon früher gleich $mn - 3n + 1$ gefunden. Man wird indess verlangen müssen, dies Resultat direct aus der Natur der Relationen abzuleiten, zu welchen die Gleichungen (18) Veranlassung gaben, oder aus letzteren Gleichungen selbst; und so ist es in der That von Jacobi geschehen*), doch soll hier darauf nicht weiter eingegangen werden.

---

*) Vgl. den auf p. 755 erwähnten Aufsatz desselben.

Das Vorstehende gilt zunächst nur für den Fall, dass alle mn Punkte $x^{(i)}$ getrennt liegen. Berühren sich indess die Curven f und φ in einem Punkte $x^{(i)}$, so werden die Grössen $a_x^{n-1} a_i$ und $\alpha_x^{m-1} \alpha_i$ in diesem Punkte (d. h. die Coordinaten der gemeinsamen Tangente) einander proportional, und folglich verschwindet der Nenner des betreffenden Gliedes auf der linken Seite von (17); und diese Gleichung verliert zunächst ihre Gültigkeit. Richten wir es indess so ein, dass auch die Function U des Zählers für den Berührungspunkt ebenfalls verschwindet, und setzen wir für den Augenblick

$$\Phi_x^{m+n-2} = (a \alpha u)\, a_x^{n-1} \alpha_x^{m-1},$$

so treten entsprechend den Punkten $x^{(i)}$ und $x^{(i)} + dx^{(i)}$, in (17) die beiden Glieder auf:

$$\frac{U_x^{m+n-3} U_y}{\Phi_x^{m+n-3} \Phi_y} + \frac{U_x^{m+n-3} U_{dx}}{\Phi_x^{m+n-3} \Phi_{dx}} = 2\, \frac{U_x^{m+n-3} U_y}{\Phi_x^{m+n-3} \Phi_y},$$

wo y ein Punkt der beiden Curven gemeinsamen Tangente von $x^{(i)}$ ist, so dass: $dx_k^{(i)} = \sigma x_k + \tau y_k$. Ebenso tritt ein r-fach zählendes Glied in der Summe (17) auf, wenn sich die Curven f, φ in einem Punkte $(r-1)$-punktig berühren, und wenn die Curve U gleichzeitig beide Curven $(r-2)$-punktig berührt. Analoges gilt für den Fall, dass eine der Curven f, φ durch einen Doppelpunkt der andern hindurchgeht. —

Es soll jetzt aus den Gleichungen (17) *wieder das* Abel'*sche Theorem abgeleitet werden.*

Wir formen zuerst die auf der linken Seite von (17) stehenden Ausdrücke um. Von dem Schnittpunktsysteme $x^{(i)}$ der Curve φ mit f gehen wir über zu dem benachbarten Punktsysteme $x^{(i)} + dx^{(i)}$, welches eine zu φ benachbarte Curve $\varphi + \delta\varphi = 0$ auf f ausschneidet. Hier soll $\delta\varphi$ ein Ausdruck m^{ter} Ordnung in x_i sein, dessen Coëfficienten unendlich kleine Grössen sind, und letztere sollen als Incremente der Coëfficienten $\alpha_{ikh\ldots}$ von φ aufgefasst werden. Für die Punkte $x^{(i)} + dx^{(i)}$ gelten dann der Annahme nach die Relationen

$$(19) \qquad m\,(\alpha_x^{m-1} \alpha_{dx})_i + \delta\varphi\,(x^{(i)}) = 0, \quad (a_x^{n-1} a_{dx})_i = 0.$$

Für die beliebige Function U_x^{m+n-2} wollen wir nun das Product $\Omega_{n-2} \,.\, \delta\varphi$ setzen, wo $\Omega = 0$ eine zu f anjungirte Curve ist, welche durch $n-2$ der Schnittpunkte von u mit f hindurchgeht (p. 790). Ferner legen wir die beiden Punkte ξ, η in die beiden übrigen Schnittpunkte von u mit f, so dass:

$$(20) \qquad f(\xi) \equiv a_\xi^n = 0, \quad f(\eta) \equiv a_\eta^n = 0.$$

Schreiben wir in Rücksicht auf (19) noch $m \alpha_x^{m-1} \alpha_{dx}$ statt $-\delta\varphi$, multipliciren Zähler und Nenner jedes Gliedes auf der linken Seite

von (17) mit $a_x^{n-1} a_c$, wo c ein beliebiger Punkt ist, und fügen im Zähler den wegen $a_x^{n-1} a_{dx} = 0$ verschwindenden Term $\Omega \, . \, a_x^{n-1} a_{dx} \, . \, \alpha_x^{m-1} \alpha_c$ hinzu, so wird:

$$\left(\frac{U_x^{m+n-2}}{(a \alpha u)\, a_x^{n-1}\, \alpha_x^{m-1}} \right)_i = -\, m \left(\frac{\Omega_x^{n-2}\, (a_c\, \alpha_{dx} - \alpha_c\, a_{dx})\, a_x^{n-1}\, \alpha_x^{m-1}}{a_x^{n-1}\, a_c \, . \, (a \alpha u)\, a_x^{n-1}\, \alpha_x^{m-1}} \right)_i .$$

Hierin können wir endlich noch setzen:

$$(a \alpha)_k\, a_x^{n-1}\, \alpha_x^{m-1} = \varrho\, x_k ,$$

und dadurch erhalten wir für $u_i = (\xi \eta)_i$:

$$(21) \qquad \left(\frac{U_x^{m+n-2}}{(a \alpha u)\, a_x^{n-1}\, \alpha_x^{n-1}} \right)_i = m \left(\frac{\Omega_x^{n-2}\, (c\, x\, dx)}{(\xi \eta x) \, . \, a_x^{n-1}\, a_c} \right)_i ,$$

wo nun rechts ein Differential dritter Gattung steht, wie im Abel'schen Theoreme.

Die Umformung der rechten Seite von (17) knüpft an die für Ω bestehende Identität an (p. 791):

$$(22) \qquad \Omega_x^{n-2}\, (\eta \zeta x)\, (\zeta \xi x) = (\xi \eta \zeta)^2 \, . \, f(x) + (\xi \eta x) \, . \, N .$$

Wir haben Θ durch $\Delta \, . \, \Omega \, . \, \delta \varphi$ zu ersetzen, wo Δ durch Gleichung (16) definirt ist. Dann wird nach beregter Identität:

$$\Theta_x^{2\mu-2}\, (\eta \zeta x)\, (\zeta \xi x) = (\xi \eta \zeta)^2 \, . \, f(x) \, . \, \Delta(x) \, . \, \delta \varphi(x) + (\xi \eta x) \, . \, N \, . \, \Delta \, . \, \delta \varphi .$$

Aus den Gleichungen (15) folgt aber:

$$\Delta(x)\, f(x) = D(x) \, . \, (\chi x \xi)^\mu - B(x) \, . \, (\chi x \eta)^\mu ;$$

und wenn wir dies in die letzte Gleichung eintragen und dann die μ^{te} Polare von η für $x = \xi$ bilden (d. h. $x = \xi + \lambda \eta$ setzen und beiderseits den Coëfficienten von λ^μ aufsuchen), so kommt:

$$\binom{2\mu-2}{\mu-1} . \, \Theta_\xi^{\mu-1} \Theta_\eta^{\mu-1} (\xi \eta \zeta)^2 = (\xi \eta \zeta)^2 \left\{ (\chi \eta \xi)^\mu . \, D(\xi) . \, \delta \varphi(\xi) - (\chi \xi \eta)^\mu . \, B(\eta) . \, \delta \varphi(\eta) \right\} .$$

Nach (15) ist ferner:

$$(\chi \eta \xi)^\mu = B(\eta) \, . \, \varphi(\eta), \qquad (\chi \xi \eta)^\mu = D(\xi) \, . \, \varphi(\xi) ;$$

und sonach findet man:

$$\binom{2\mu-2}{\mu-1} \cdot \frac{\Theta_\xi^{\mu-1}\, \Theta_\eta^{\mu-1}}{[(\chi \xi \eta)^\mu]^2} (-1)^{\mu-1} = \frac{\delta \varphi(\eta)}{\varphi(\eta)} - \frac{\delta \varphi(\xi)}{\varphi(\xi)} .$$

Durch Einsetzen dieses Werthes in die rechte Seite von (17) erhält man endlich wegen (21):

$$(23) \qquad \sum_{i=1}^{i=nm} \left(\frac{\Omega_{n-2}\, (c\, x\, dx)}{(\xi \eta x) \, . \, n \, . \, a_x^{n-1}\, a_c} \right)_i = \frac{\delta \varphi(\eta)}{\varphi(\eta)} - \frac{\delta \varphi(\xi)}{\varphi(\xi)} = d \left(\log \frac{\varphi(\eta)}{\varphi(\xi)} \right) ;$$

und dies ist nichts anderes, als die Differentialgleichung (8), aus der

durch Integration das Abel'sche Theorem in bekannter Form folgte. *Damit wäre auch der zweite, directe Beweis dieses Theorems erbracht.*

Wenn von den Punkten $x^{(i)}$ einzelne (z. B. r) einander unendlich nahe rücken, so werden in der links stehenden Summe r Differentiale einander gleich; eine weitere Besonderheit aber tritt nicht ein, denn der Nenner des Differentials wird nicht unendlich, wie dies doch beim Jacobi'schen Satze eintrat. Dies liegt daran, dass durch $r - 1$ der benachbarten Punkte dann auch die Curve $\varphi + \delta\varphi = 0$ hindurchgeht; dass also für $U = \Omega \,.\, \delta\varphi$ der Zähler immer in ebenso hoher Ordnung verschwindet, wie der Nenner, d. i. wie die Functionaldeterminante von f, φ und u; und dies stimmt mit den Bemerkungen auf p. 824 überein. —

Man übersieht leicht, dass man statt der Gleichung (17) des Jacobi'schen Satzes nur die einfachere Gleichung (18) zu benutzen braucht, wenn man das Abel'sche Theorem allein für Integrale *erster* Gattung ableiten will; und dem entsprechend wird sich dann der Beweis vereinfachen lassen, indem man zunächst direct die Gleichung (18) aufstellt. Es ist nun aber wichtig, dass *man auch umgekehrt aus letzterer Gleichung das* Abel'*sche Theorem für Integrale dritter Gattung herleiten kann;* und zwar geschieht dies auf Grund folgender Ueberlegung.*) Beim Beweise des Jacobi'schen Satzes wurde an keiner Stelle die Irreducibilität der Curve $f \equiv a_x^n = 0$ vorausgesetzt; *die Gleichung gilt daher auch, wenn die Curve f oder φ zerfällt.* Setzen wir nun insbesondere

$$a_x^n = b_x^p \,.\, c_x^q, \quad \text{wo also} \quad n = p + q,$$

so wird:

$$n\,(a\alpha u)\, a_x^{n-1} \alpha_x^{m-1} = \alpha_x^{m-1} \left\{ p\, b_x^{p-1} (b\alpha u)\, c_x^q + q\, c_x^{q-1} (c\alpha u)\, b_x^p \right\}.$$

Bezeichnen wir sonach mit $y^{(i)}$ die Schnittpunkte von $b_x^p = 0$ und $\alpha_x^m = 0$, mit $z^{(i)}$ die von $c_x^q = 0$ und $\alpha_x^m = 0$, so geht die Gleichung (18) über in:

$$\frac{1}{p} \sum_{i=1}^{i=mp} \left(\frac{V_y^{m+p+q-3} u_y}{c_y^q\, (b\alpha u)\, b_y^{p-1} \alpha_y^{m-1}} \right)_i + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{i=mq} \left(\frac{V_z^{m+p+q-3} u_x}{b_z^p\, (c\alpha u)\, c_z^{p-1} \alpha_z^{m-1}} \right)_i = 0.$$

Die hier auftretenden Quotienten sind von den Grössen u_i voll-

---

*) Vgl. Harnack: Ueber eine Behandlungsweise algebraischer Differentiale in homogenen Coordinaten, Math. Annalen, Bd. 9, p. 371 ff. Die Gleichung (18) wird hier durch Discussion derjenigen Gleichung $(mn)^{\text{ten}}$ Grades gewonnen, welche die Werthe des Quotienten

$$\frac{V_x^{m+n-3} u_x}{(a\alpha u)\, a_x^{n-1} \alpha_x^{m-1}}$$

in den mn Punkten $x^{(i)}$ bestimmt; vgl. die Anmerkung auf p. 811.

ständig unabhängig; in der ersten Summe kann man also auch setzen: $u_i = c_i c_y^{q-1}$, und in der zweiten Summe: $u_i = b_i b_z^{p-1}$, so dass die Gleichung resultirt:

$$(24)\quad q \sum_{i=1}^{i=mp} \left(\frac{V_y^{m+p+q-3}}{(b\alpha c)\, b_y^{p-1} \alpha_y^{m-1} c_y^{q-1}} \right) = p \sum_{i=1}^{i=mq} \left(\frac{V_z^{m+p+q-3}}{(b\alpha c)\, b_z^{p-1} \alpha_z^{m-1} c_z^{q-1}} \right)_i;$$

und der vollständigen Symmetrie wegen sind beide Summen auch gleich:

$$m \sum_{i=1}^{i=pq} \left(\frac{V_x^{m+p+q-3}}{(b\alpha c)\, b_x^{p-1} \alpha_x^{m-1} c_x^{q-1}} \right)_i,$$

wo $x^{(i)}$ die Schnittpunkte von $b_x^p = 0$ mit $c_x^q = 0$ bedeuten. Wählt man aber insbesondere $c_x^q = (\xi \eta x) = u_x$, so geht die gewonnene Gleichung (24) über in:

$$(25)\qquad \sum_{i=1}^{i=mp} \left(\frac{V_y^{m+p-2}}{(b\alpha u)\, b_y^{p-1} \alpha_y^{m-1}} \right)_i = p \sum_{i=1}^{i=m} \left(\frac{V_z^{m+p-2}}{(b\alpha u)\, b_z^{p-1} \alpha_z^{m-1}} \right)_i.$$

Von hier ausgehend gelangt man in folgender Weise wieder zum Abel'schen Theoreme. Die linke Seite geht vermöge (21) für $V = \Omega_{p-2} \delta\varphi$ unmittelbar in die Summe von Differentialen dritter Gattung über (bis auf einen Zahlenfactor m), welche in (23) auftreten, wenn man nur a_x^n durch b_x^p ersetzt. Ganz analog kann man aber auch die rechte Seite unserer Gleichung behandeln, indem man nur die Rollen der Curven $b_x^p = 0$ und $u_x = 0$ vertauscht. Es wird dann zunächst, wenn man wie bei Bildung der Gleichung (21) verfährt:

$$(26)\qquad \frac{V_z^{m+p-2}}{(u\alpha b)\, b_z^{p-1} \alpha_z^{m-1}} = -m \frac{\Omega_z^{p-2} (u_c \alpha_{dz} - \alpha_c u_{dz})\, \alpha_z^{m-1}}{u_c \,.\, (u\alpha b)\, \alpha_z^{m-1} b_z^{p-1}},$$

oder wegen $\varrho z_k = (u\alpha)_k \alpha_z^{m-1}$:

$$= m \frac{\Omega_z^{p-2} (c z dz)}{b_z^p \,.\, u_c},$$

wobei nun $u_z = 0$ und $u_{dz} = 0$ vorausgesetzt wird. Das Differential rechts bezieht sich also auf die Gerade $u_z = 0$, statt auf die Curve $a_x^n = 0$. Wir können daher für die Punkte dieser Geraden eine neue binäre Veränderliche $\varkappa_1 : \varkappa_2$ einführen mittelst der Substitution:

$$z_k = \varkappa_1 \xi_k + \varkappa_2 \eta_k, \quad dz_k = \xi_k d\varkappa_1 + \eta_k d\varkappa_2.$$

Dann wird wegen der für Ω bestehenden Identität (22):

$$(\varkappa_1 \Omega_\xi + \varkappa_2 \Omega_\eta)^{p-2} \varkappa_1 \varkappa_2 = (\varkappa_1 b_\xi + \varkappa_2 b_\eta)^p;$$

und es geht das in (26) rechts stehende Differential, $d\alpha (c\xi\eta) = u_c$ über in:

$$m \frac{\varkappa_1 d\varkappa_2 - \varkappa_2 d\varkappa_1}{\varkappa_1 \varkappa_2} = m\, d \log \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}.$$

Die Summe dieser Differentiale ausgedehnt über alle Wurzeln der Gleichung $(\alpha_1 \varkappa_1 + \alpha_2 \varkappa_2)^m = 0$ haben wir zu bilden. Diese Summe ist aber

$$(27) \qquad \begin{aligned} &= m\, d \log \frac{\varkappa_2^{(1)} \varkappa_2^{(2)} \ldots \varkappa_2^{(m)}}{\varkappa_1^{(1)} \varkappa_1^{(2)} \ldots \varkappa_1^{(m)}} = m\, d \log \left((-1)^m \frac{\alpha_1^m}{\alpha_2^m} \right) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad = -\, m\, d \log \frac{\varphi(\eta)}{\varphi(\xi)}\,. \end{aligned}$$

Da aber der Zahlenfactor m nach der angegebenen Umformung in gleicher Weise auf der linken Seite von (25) auftritt, so haben wir in der That aus (25) wieder das Abel'sche Theorem für Integrale dritter Gattung gewonnen.

Ebenso wie der Jacobi'sche Satz, gilt aber auch das Abel'sche Theorem für zerfallende Grundcurven; setzt man letzteres als bekannt voraus für solche Integrale, die nur in Doppelpunkten von f unendlich werden, so kann man also daraus die Gestaltung desselben für andere Integrale ableiten, ohne zu dem Zwecke auf den Jacobi'schen Satz zurückzugehen. Setzt man nämlich

$$a_x^n = \beta_x^p \cdot \gamma_x^q\,,$$

und bezeichnet mit $y^{(i)}$ die Schnittpunkte von $\alpha_x^m = 0$ und $\beta_x^p = 0$, mit $z^{(i)}$ die von $\alpha_x^m = 0$ und $\gamma_x^q = 0$, so geht die Gleichung des Abel'schen Theorems unmittelbar über in:

$$\sum_{i=1}^{i=mn} \left(\frac{\varphi_x^{n-3}\,(c\,x\,dx)}{n\,a_x^{n-1}\,a_c} \right)_i = \sum_{i=1}^{i=mp} \left(\frac{\varphi_y^{n-3}\,(c\,y\,dy)}{p \cdot \gamma_y^q \cdot \beta_y^{p-1}\,\beta_c} \right)_i + \sum_{i=1}^{i=mq} \left(\frac{\varphi_z^{n-3}\,(c\,z\,dz)}{q \cdot \beta_z^p \cdot \gamma_z^{q-1}\,\gamma_c} \right)_i = 0.$$

Eine Summe von Differentialen, welche zu der Grundcurve $\beta_x^p = 0$ gehören und in einigen) Schnittpunkten derselben mit $\gamma_x^q = 0$ unendlich werden, erscheint also zurückgeführt auf eine Summe von Differentialen, ausgedehnt über die Grundcurve $\gamma_x^q = 0$, welche in denselben Schnittpunkten der letzteren mit $\beta_x^p = 0$ unendlich werden.* Hieraus wird sich uns sogleich ergeben, dass auch eine Summe von Integralen mit beliebigen Unendlichkeitspunkten, ausgedehnt über die Schnittpunkte der Grundcurve $\beta_x^p = 0$ mit einer Curve $\alpha_x^m = 0$, durch Logarithmen und algebraische Functionen darstellbar ist, was übrigens auch schon aus der früher gegebenen Zurückführung eines beliebigen Integrals auf Summen von Integralen mit einer linearen Function im Nenner hervorgeht (p. 778 ff.). Auf eine analoge Zerlegung, wie sie damals angewandt wurde, muss man auch in vorliegendem Falle zurückgehen, um die Auswerthung der Integralsumme wirklich auszuführen. Bezeichnen wir nämlich mit $u_{\psi}^{pq} = 0$ die Gleichung der Schnittpunkte von $\gamma_x^q = 0$ mit $\beta_x^p = 0$, so ist (vgl. p. 778):

---

*) Durch die anderen Schnittpunkte beider Curven geht dann auch die Curve $\Theta = 0$.

$$(\psi x \xi)^{pq} = B\beta_x^p + C\gamma_x^q,$$

und also $\frac{1}{\gamma_x^q} = \frac{C}{(\psi x \xi)^{pq}}$ vermöge $\beta_x^p = 0$, folglich auch:

$$\sum_{i=1}^{i=mp} \left(\frac{\varphi_y^{n-3}(cydy)}{p \cdot \gamma_y^q \cdot \beta_y^{p-1}\beta_c} \right)_i = -\sum_{i=1}^{i=pqm} \left(\frac{\varphi_z^{n-3}\, C\,(czdz)}{pq \cdot \beta_z^p \cdot (\psi x \xi)^{pq-1}\,(\psi c \xi)} \right)_i.$$

Hier stehen rechts Differentiale, welche sich auf die Curve $(\psi x \xi)^{pq} = 0$ als Grundcurve beziehen. Letztere aber zerfällt in lauter gerade Linien; man kann daher die rechts stehende Summe weiter in Summen von Differentialen zerlegen, deren jedes sich nur auf *eine* dieser pq Geraden bezieht und also durch Einführung einer binären Veränderlichen direct ausgewerthet werden kann, wie es soeben beim Differentiale dritter Gattung geschah. Man kommt so natürlich zu demselben Resultate, wie es eine Partialbruchzerlegung des links stehenden Differentials ergeben würde.

Betrachten wir noch als Anwendung des hier erörterten Princips den besonderen Fall, wo die Grundcurve in drei gerade Linien zerfällt, sagen wir in $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Für die Schnittpunkte $x^{(i)}$ derselben mit $\alpha_x^m = 0$ erhalten wir dann:

$$\sum_{i=1}^{i=3m} \left(\frac{(cxdx)}{x_1x_2c_3 + x_2x_3c_1 + x_3x_1c_2} \right)_i = \sum_{i=1}^{i=m} \left(\frac{(ydy)_1}{y_2y_3} \right)_i + \sum_{i=1}^{i=m} \left(\frac{(zdz)_2}{z_3z_1} \right)_i + \sum_{i=1}^{i=m} \left(\frac{(tdt)_3}{t_1t_2} \right)_i = 0,$$

wo durch $y^{(i)}$ die Schnittpunkte von $\alpha_x^m = 0$ mit $x_1 = 0$, durch $z^{(i)}$ die mit $x_2 = 0$, durch $t^{(i)}$ die mit $x_3 = 0$ bezeichnet sind. Analog wie bei Gleichung (26) wird dann aber:

$$\sum_{i=1}^{i=m} \left(\frac{(ydy)_1}{y_2y_3} \right)_i = d \log \frac{y_3^{(1)} y_3^{(2)} \dots y_3^{(m)}}{y_2^{(1)} y_2^{(2)} \dots y_2^{(m)}} = d \log \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_3} \right)^m.$$

Ebenso findet man für die zu den Linien $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ gehörigen Summen bez. die Werthe:

$$d \log \left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_1} \right)^m \quad \text{und} \quad d \log \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^m.$$

Das Integral der Summe dieser drei Werthe aber ist gleich $\log(-1)^m = mi\pi$. Und somit besteht die Relation:

$$(28) \qquad \frac{y_3^{(1)} y_3^{(2)} \dots y_3^{(m)}}{y_2^{(1)} y_2^{(2)} \dots y_2^{(m)}} \cdot \frac{z_1^{(1)} \cdot z_1^{(2)} \dots z_1^{(m)}}{z_3^{(1)} z_3^{(2)} \dots z_3^{(m)}} \cdot \frac{t_2^{(1)} t_2^{(2)} \dots t_2^{(m)}}{t_1^{(1)} t_1^{(2)} \dots t_1^{(m)}} = (-1)^m.$$

Diese Gleichung ist identisch mit dem sogenannten Carnot'schen Theoreme, welches man gewöhnlich in der folgenden Fassung ausspricht:

Sind $y_3^{(i)} : y_2^{(i)}$, $z_1^{(i)} : z_3^{(i)}$, $t_2^{(i)} : t_1^{(i)}$ *die Abstandsverhältnisse der Schnittpunkte einer Curve* m^{ter} *Ordnung mit den Seiten eines Dreiecks von*

den Ecken dieses Dreiecks, so besteht zwischen diesen Abstandsverhältnissen die Relation (28).

Analoge Sätze bestehen für die Schnittpunkte der C_m mit einer beliebigen Zahl von Geraden.*) —

Endlich sei noch daran erinnert, dass man aus dem Abel'schen Theoreme für Integrale dritter Gattung nach p. 792 durch Anwendung des Processes $\Sigma \frac{\partial}{\partial \xi_i} \xi_i$ auch *das* Abel'*sche Theorem für Integrale zweiter Gattung* leicht ableiten kann; an Stelle der Logarithmen auf der rechten Seite treten dann algebraische Functionen. Es soll hierauf aber nicht mehr eingegangen werden. —

Es liegt die schon oben berührte Frage nahe (p. 818), ob das Abel'sche Theorem umkehrbar ist, d. h. ob man aus den Gleichungen (8) oder aus deren p Integralgleichungen:

$$\int_{c^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{c^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h + \ldots + \int_{c^{(\mu)}}^{x^{(\mu)}} du_h = 0$$

$$(h = 1, 2, 3 \ldots p)$$

immer schliessen kann, dass die μ Punkte $x^{(i)}$ sämmtlich auf einer adjungirten Curve liegen. Dabei sei bemerkt, dass μ nicht nothwendig durch n theilbar sein muss, denn nach dem Obigen fallen alle diejenigen Schnittpunkte fort, welche gleichzeitig auf der die unteren Grenzen bestimmenden Curve liegen. Da man nun durch $mn - \Sigma \alpha_i i (i-1) - p$ beliebige Punkte immer eine adjungirte Curve m^{ter} Ordnung legen kann, so kommt unsere Frage wesentlich darauf hinaus, ob durch die Gleichungen des Abel'schen Theorems für Integrale erster Gattung**) im Allgemeinen p Punkte *ein*deutig durch die übrigen bestimmt sind. Dies ist aber in der That der Fall, wie die Behandlung des sogenannten Jacobi'*schen Umkehrproblems der* Abel'*schen Integrale lehrt*. Letzteres lässt sich in folgender Weise formuliren***):

*) Man beweist dieselben sonst algebraisch in elementarer Weise; vgl. Carnot's géométrie de position, sowie die Anmerkung auf p. 754.

**) In Betreff entsprechender Fragen bei Integralen dritter Gattung vgl. den weiterhin folgenden Abschnitt über Schnittpunktsysteme nicht adjungirter Curven.

***) Dasselbe wurde von Jacobi in der Weise für hyperelliptische Integrale formulirt (jedoch nicht erledigt): Crelle's Journal, Bd. 9 und 13. Davon wird unterschieden das sogenannte Riemann'sche Umkehrproblem, welches verlangt, *eine* obere Grenze zu bestimmen, wenn die Werthe v_h der p Integrale u_h für diese obere Grenze gegeben sind, und welches aus dem Jacobi'schen hervorgeht, wenn man $p-1$ der Punkte $x^{(i)}$ mit den entsprechenden Punkten $c^{(i)}$ zusammenfallen lässt. Dasselbe ist natürlich nur lösbar, wenn zwischen den Grössen v_h gewisse $p-1$ Relationen bestehen. Vgl. darüber C. Neumann, a. a. O., p. 393 ff. und p. 514, Prym, a. a. O.

Es sind die p Gleichungen gegeben

$$(29)\quad \sum_{i=1}^{i=p}\int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} du_1 = v_1\,,\quad \sum_{i=1}^{i=p}\int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} du_2 = v_2\,,\ \ldots\ \sum_{i=1}^{i=p}\int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} du_p = v_p\,,$$

*wo die $v_1, v_2, \ldots v_p$ von einander unabhängige Constante (nämlich die negativen Integralsummen über die $\mu - p$ übrigen bekannten Punkte) sind, und wo die $c^{(i)}$ beliebige ein für allemal als fest angenommene Punkte bedeuten, welche möglicher Weise auch alle oder theilweise in einen zusammenfallen können: man soll die p oberen Grenzen $x^{(i)}$ als Functionen der gegebenen Grössen v_h darstellen.**)

Die wirkliche Lösung dieses Problems liegt ausserhalb der Grenzen unserer Betrachtungen; sie geschieht nach Riemann mit Hülfe der sogenannten Θ-Functionen**); und zwar kann man zwei verschiedene Wege einschlagen.

Zunächst nämlich kann man darauf ausgehen, die Gleichung einer Curve $\varphi = 0$ zu finden, welche auf $f = 0$ die $\mu - p$ gegebenen und die p gesuchten Punkte ausschneidet. Dies wird dadurch möglich, dass man — die p Grössen v_h als bekannt vorausgesetzt — den Quotienten $\frac{\varphi}{\psi}$ zweier ganzen homogenen Functionen in x_1, x_2, x_3 durch einen Quotienten von Θ-Functionen darstellen kann der Art, dass φ vermöge $f = 0$ ausser in den gegebenen Punkten, für welche auch ψ Null ist, nur in den p gesuchten Punkten $x^{(1)} \ldots x^{(p)}$ verschwindet, dagegen ψ ausserdem nur in den p ebenfalls bekannten Punkten $c^{(i)}$, welche in den unteren Grenzen auftreten.***) In den Argumenten der benutzten Θ-Functionen treten dabei neben anderen Constanten die Grössen v_h auf, d. h. die gegebenen Integralsummen.

Der zweite Weg löst das Problem durch Vermittlung von Integralen dritter Gattung, indem er zunächst eine Methode entwickelt,

*) Vgl. Cl. u. G. A. F. p. 138. — In den p Gleichungen (29) gehört zu derselben oberen Grenze $x^{(i)}$ immer dieselbe untere Grenze $c^{(i)}$. Dies ist verschieden von Riemann's Bestimmungsweise der unteren Grenzen; derselbe benutzt in derselben Summe, auch wenn die oberen Grenzen verschieden sind, immer dieselbe, dagegen in jeder der p Summen je eine andere untere Grenze; vgl. R. A. F. §. 15 und 16.

**) Vgl. R. A. F. §. 17 und 22. Die Theorie dieser Functionen findet man ausführlich bei Neumann: Theorie der Abel'schen Integrale, Leipzig 1865, p. 28 ff. und p. 442 ff. — Es ist zu bemerken, dass die Riemann'sche Definition der Θ-Function von der bei Cl. u. G. A. F. p. 195 getroffenen abweicht, indem die Argumente um einen Zahlenfactor $\frac{1}{2}$ verschieden sind, was durch die verschiedene Wahl der normalen Periodicitätsmoduln der Integrale erster Gattung (vgl. oben p. 803) bedingt ist.

***) Vgl. R. A. F. §. 27; Roch, Crelle's Journal, Bd. 66, p. 99 und Weber, ib. Bd. 70, p. 316.

vermöge deren eine Summe von p Normalintegralen dritter Gattung mit denselben Grenzen $c^{(i)}$ und $x^{(i)}$ als Functionen der gegebenen Grössen $v_1, v_2, \ldots v_p$ darstellbar ist.*) Um die p Punkte $x^{(i)}$ zu bestimmen, kann man zunächst die p Strahlen eines Büschels $u_x - \lambda v_x = 0$ bestimmen, welche durch diese Punkte hindurchgehen, d. h. die Gleichung p^{ten} Grades für λ aufstellen, welche diese Strahlen bestimmt. Sucht man dann die entsprechenden Strahlen eines zweiten Büschels, so kann man die Punkte $x^{(i)}$ als deren Schnittpunkte durch lineare Gleichungen finden. Dabei ist zu bemerken, dass die genannten Strahlen des zweiten Büschels sich rational (und zwar mittelst linearer Gleichungen) bestimmen lassen, wenn die des ersten bekannt sind.**) Es kommt also darauf an, den Werth der algebraischen Function $\frac{u_x}{v_x}$ in den p Punkten $x^{(i)}$ durch eine Gleichung p^{ten} Grades zu bestimmen. Diese Aufgabe kann man noch dadurch verallgemeinern, dass man statt $\frac{u_x}{v_x}$ den Quotienten $\frac{\varphi}{\psi}$ betrachtet, dessen Zähler und Nenner von gleich hoher Ordnung sein sollen, d. h. die Curven des Büschels $\varphi - \lambda\psi = 0$ aufsucht, welche durch die Punkte $x^{(i)}$ hindurchgehen. Die Werthe, welche $\frac{\varphi}{\psi}$ in letzteren Punkten annimmt, werden sich dann durch eine algebraische Gleichung

$$(30) \qquad \left(\frac{\varphi}{\psi}\right)^p + M_1\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)^{p-1} + M_2\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)^{p-2} + \ldots + M_p = 0$$

bestimmen, deren Coëfficienten M_i zu bestimmende Functionen der Integralsummen v_h sind; und man braucht nur für eine Function $\frac{\varphi}{\psi}$ die Wurzeln zu kennen, um dieselben für jede andere Function $\frac{\varphi'}{\psi'}$ berechnen zu können (wie beim Strahlbüschel $u - \lambda v$).

Diese Functionen M_i, oder allgemeiner *symmetrische Functionen der p Werthe, welche eine homogene Function nullter Dimension in p verschiedenen Punkten annimmt, nennt man* Abel'*sche Functionen der durch* (29) *definirten Argumente v.****) *Es sind* 2*p-fach periodische*

---

*) Vgl. Cl. u. G. A. F. p. 138—200.

**) ib. p. 142 f.

***) Andere Grössen sind es, welche Riemann (in seinen Vorlesungen) als Abel'sche Functionen bezeichnet hat. Seien nämlich $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(p-1)}$ $p-1$ Punkte, in denen die Grundcurve von einer adjungirten C_{n-3} berührt wird, was im Allgemeinen nur in einer endlichen Anzahl von Punktsystemen geschehen kann, und sei $\varphi = 0$ die Gleichung dieser C_{n-3}, $\psi = 0$ die Gleichung einer anderen C_{n-3} derselben Art mit den Berührungspunkten $y^{(i)}$, so ist der

Functionen dieser Grössen, da die p Integrale erster Gattung (nach p. 804) $2p$ Systeme von Periodicitätsmoduln haben, und also die Grössen v noch beliebig um solche Perioden vermehrt werden können, und zwar

$$v_h \quad \text{um} \quad 2m_h\pi i + a_{1h}q_1 + a_{2h}q_2 + \ldots + a_{ph}q_p,$$

ohne dass dadurch die Gleichung (30) geändert werden dürfte.

Denken wir uns die Gleichung (30) vorerst wirklich gebildet und andererseits auf dem zuerst geschilderten Wege eine algebraische Function χ bestimmt, welche in den p Punkten $x^{(i)}$ verschwindet. *Dann kann man die Gleichung* (30) *auffassen als das Resultat der Elimination der Veränderlichen* x_k *aus den Gleichungen* $f = 0$, $\chi = 0$ *und* $\varphi - \lambda\psi = 0$. Diese zweite Lösung des Umkehrproblems geht also, insofern es auf wirkliche Bestimmung der Punkte $x^{(i)}$ ankommt, noch einen Schritt weiter als jene erste.

Die Einführung der Integrale dritter Gattung geschieht nun in folgender Weise. Wir betrachten die Summe von p Integralen $\Pi_{\xi\eta}$, welche zwischen denselben Grenzen $c^{(i)}$, $x^{(i)}$ geführt sind und zwei beliebige Unendlichkeitspunkte ξ, η haben. Diese Summe

$$(31) \qquad \sum_{i=1}^{i=p} \int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} d\Pi_{\xi\eta} = T_{\xi\eta}\begin{pmatrix} x^{(1)}\, x^{(2)} \ldots x^{(p)} \\ c^{(1)}\, c^{(2)} \ldots c^{(p)} \end{pmatrix}$$

können wir, da sie als symmetrische Function der oberen Grenzen erscheint, die symmetrischen Functionen der letzteren aber schon als Functionen der v betrachtet wurden, auch als Function der v selbst ansehen, wie sogleich noch näher angegeben werden soll. Und auf die wirkliche Darstellung dieser Function $T_{\xi\eta}$ lässt sich das Umkehrproblem zurückführen. Die Coëfficienten der Gleichung (30) lassen sich nämlich in folgender Weise durch Functionen T ausdrücken.

Wir setzen in der Gleichung (9) des Abel'schen Theorems (p. 815 und p. 816 Anm.) für ξ der Reihe nach $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(p)}$, für η zugleich der Reihe nach $c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots c^{(p)}$; ferner nehmen wir an Stelle der Curve $\varphi = 0$ irgend eine Curve des Büschels $\varphi - \lambda\psi = 0$

Quotient $\sqrt{\frac{\varphi}{\psi}}$ proportional zu einem Quotienten von Θ-Functionen, deren Argumente sich von den Grössen

$$v_h = \sum_{i=1}^{i=p-1} \int_z^{x^{(i)}} du_h + \int_z^{\eta} du_h - \int_z^{x} du_h, \quad w_h = \sum_{i=1}^{i=p-1} \int_z^{y^{(i)}} + \int_z^{\eta} du_h - \int_z^{x} du_h,$$

in denen η und z beliebig gewählte Punkte sind, nur um Constante unterscheiden. Die so zu bildenden Verhältnisse $\sqrt{\varphi} : \sqrt{\psi}$ sind dann Abel'*sche Functionen der Grössen* v_h, w_h in Riemann's Sinne. Vgl. darüber Roch, a. a. O., p. 104.

und bezeichnen durch $\eta^{(i)}$ die Schnittpunkte von $f=0$ mit $\psi=0$, welche nicht zugleich auf $\varphi=0$ liegen, durch $\xi^{(i)}$ die Schnittpunkte von $\varphi-\lambda\psi=0$ mit $f=0$, welche nicht auf φ oder ψ liegen: Dann erhalten wir aus dem Abel'schen Theoreme und dem Satze über die Vertauschung von Parameter und Argument (p. 805) die folgenden Gleichungen:

$$\log\left[\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{x^{(1)}}-\lambda\right]-\log\left[\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{c^{(1)}}-\lambda\right]=-\sum_i\int_{c^{(1)}}^{x^{(1)}}d\Pi_{\xi^{(i)}\eta^{(i)}},$$

$$(32)\quad \log\left[\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{x^{(2)}}-\lambda\right]-\log\left[\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{c^{(2)}}-\lambda\right]=-\sum_i\int_{c^{(2)}}^{x^{(2)}}d\Pi_{\xi^{(i)}\eta^{(i)}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\log\left[\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{x^{(p)}}-\lambda\right]-\log\left[\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{c^{(p)}}-\lambda\right]=-\sum_i\int_{c^{(p)}}^{x^{(p)}}d\Pi_{\xi^{(i)}\eta^{(i)}}.$$

Die Paare $\xi^{(i)}$, $\eta^{(i)}$ sind einander so zugeordnet, wie es das Abel'sche Theorem vorschreibt (p. 816), und die Summen rechts beziehen sich auf die so gebildeten Schnittpunktepaare. Ebenso sind die Integrationswege hier durch jenes Theorem bedingt; sie sind daher möglicher Weise nicht dieselben, welche in den Gleichungen (29) auftreten, sondern würden statt der v_h Integralsummen v_h' liefern, welche sich durch Periodicitätsmoduln von den v_h unterscheiden. Aber die Summen rechts ändern sich (nach p. 805) durch Abänderung der Integrationswege bez. nur um Vielfache der Ausdrücke $\Sigma_i\int_{\eta^{(i)}}^{\xi^{(i)}}du_h$ (abgesehen von der links ebenso auftretenden Periode $2i\pi$); und letztere Summen verschwinden nach dem Abel'schen Theoreme, da die ξ, η Schnittpunktsysteme sind, welche direct in einander übergeführt werden können. Man braucht also hierauf gar keine Rücksicht zu nehmen.

Addirt man nun die Gleichungen (32) und geht von den Logarithmen zu den Zahlen über, so findet man wegen (31):

$$(33)\qquad \prod_{i=1}^{i=p}\frac{\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{x^{(i)}}-\lambda}{\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{c^{(i)}}-\lambda}=e^{-\sum\limits_i \mathsf{T}_{\xi^{(i)}\eta^{(i)}}\begin{pmatrix}x^{(1)}\,x^{(2)}\ldots x^{(p)}\\ c^{(1)}\,c^{(2)}\ldots c^{(p)}\end{pmatrix}};$$

und in dieser Gleichung liegt die Lösung unserer Aufgabe, sobald die Functionen T noch durch die v ausgedrückt sind. Setzt man nämlich:

$$M=\left[\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{c^{(1)}}-\lambda\right]\left[\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{c^{(2)}}-\lambda\right]\cdots\left[\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{c^{(p)}}-\lambda\right]\cdot e^{-\Sigma\mathsf{T}_{\xi\eta}\left(\frac{x}{c}\right)},$$

wo also M ausser Constanten (denn der Grösse λ hatten wir einen beliebigen Werth beigelegt) nur Functionen T enthält, so kann man die Gleichung (33) mit Rücksicht auf die Coëfficienten M_i der Gleichung (30) auch in der Form schreiben:

$$\lambda^p + M_1 \lambda^{p-1} + \ldots + M_p = M .$$

Man braucht nur diese Gleichung p-mal hinter einander für ebenso viele verschiedene Werthe von λ zu bilden, um ebenso viele Gleichungen als Unbekannte M_i vor sich zu haben, welche man dann mittelst dieses Systems linearer Gleichungen durch Functionen T ausdrücken kann. *Die Coëfficienten der Gleichung p^{ten} Grades, deren Wurzeln die p Functionen $\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{x^{(i)}}$ sind, werden also rationale Verbindungen verschiedener Transscendenten $e^{T_{\xi\eta}}$.*

Es kommt daher nur noch auf ein näheres Studium der Function $T_{\xi\eta}$ an; und dabei ergibt sich dann, dass dieselbe durch Θ-Functionen darstellbar ist, deren Argumente wesentlich von den gegebenen Grössen v_h abhängen. Für die Bestimmung dieser Constanten ist es nun vortheilhaft statt der Grössen $c^{(i)}$ andere untere Grenzen $\alpha^{(i)}$ zu wählen, die in folgender Weise definirt werden: Man ziehe in einem beliebigen Punkte μ die Tangente an $f = 0$; diese schneidet f noch in $n - 2$ Punkten, und durch letztere Punkte lege man eine adjungirte Curve $(n-2)^{ter}$ Ordnung, welche $f = 0$ in allen anderen Punkten, in denen sie f noch trifft, d. h. in p Punkten berührt. Zu jedem μ kann man noch 2^{2p} solche C_{n-2} finden, wie wir später sehen werden, aber unter diesen ist für die unteren Grenzen (je nach der Wahl des zur Definition der Perioden a_{ik} benutzten kanonischen Querschnittsystems der Riemann'schen Fläche, p. 801 ff.) eine ganz bestimmte ausgezeichnet; die Berührungspunkte derselben sollen mit $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)} \ldots \alpha^{(p)}$ bezeichnet werden. Setzt man nun diese an Stelle der Punkte $c^{(i)}$ in den Gleichungen (29) des Umkehrproblems, und schreibt gleichzeitig ω statt v_h, so dass für $h = 1, 2, \ldots p$:

$$(34) \qquad \sum_{i=1}^{i=p} \int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h = \omega_h \quad \left(= v_h - \sum_{i=1}^{i=p} \int_{c^{(i)}}^{\alpha^{(i)}} du_h \right);$$

dann findet man das Resultat*):

*) Vgl. Cl. u. G. A. F., a. a. O. — Man kann diese Formeln und insbesondere die Bestimmung der Argumente der Θ-Function durch die Punkte μ und $\alpha^{(i)}$ auch mittelst Riemann'scher Principien unter Benutzung von R. A. F. §. 25 ableiten; vgl. darüber Weber, Zur Theorie der Umkehrung der Abel'schen Integrale, Crelle's Journal, Bd. 70, und Fuchs: Zur Theorie der Abel'schen Functionen, ib. Bd. 73, p. 306. — Für $p = 2$ ist die entsprechende Formel auf dem von Weber eingeschlagenen Wege auch schon von Roch abgeleitet, ib. Bd. 65, p. 42, vgl. für diesen Fall auch Brill, ib. p. 275.

$$(35)\qquad T_{\xi\eta}\binom{x}{c} = \log \frac{\Theta\left(\omega_h - \int_\mu^\eta du_h\right) \cdot \Theta\left(\int_\mu^\xi du_h\right)}{\Theta\left(\omega_h - \int_\mu^\xi du_h\right) \cdot \Theta\left(\int_\mu^\eta du_h\right)};$$

so dass die Gleichung (33) übergeht in:

$$(36)\qquad \prod_{i=1}^{i=p} \frac{\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{x^{(i)}} - \lambda}{\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{\alpha^{(i)}} - \lambda} = \prod_{\xi\eta} \frac{\Theta\left(\omega_h - \int_\mu^\xi du_h\right) \cdot \Theta\left(\int_\mu^\eta du_h\right)}{\Theta\left(\omega_h - \int_\mu^\eta du_h\right) \cdot \Theta\left(\int_\mu^\xi du_h\right)};$$

wobei die Θ-Function durch folgende p-fach unendliche Reihe definirt ist:

$$\Theta(w_h) = \Theta(w_1, w_2, \ldots w_p)$$
$$= \sum_{r_1=-\infty}^{r_1=+\infty} \sum_{r_2=-\infty}^{r_2=+\infty} \cdots \sum_{r_p=-\infty}^{r_p=+\infty} e^{-\frac{1}{2}\Sigma_h \Sigma_k r_h r_k a_{hk} + \Sigma_i r_i w_i}.$$

In Gleichung (36) *ist jetzt die Lösung des Umkehrproblems gegeben*, wie aus den obigen Erörterungen hervorgeht. An Stelle der $\alpha^{(i)}$ und ω_h kann man nun auch wieder die Grössen $c^{(i)}$ und v_h einführen. Denn setzt man:

$$(37)\qquad k_h = \sum_{i=1}^{i=p} \int_{\alpha^{(i)}}^{c^{(i)}} du_h, \quad \text{so dass:} \quad \omega_h = v_h + k_h,$$

so ist natürlich auch, wie in (36):

$$(38)\qquad \prod_{i=1}^{i=p} \frac{\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{c^{(i)}} - \lambda}{\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{\alpha^{(i)}} - \lambda} = \prod_{\xi\eta} \frac{\Theta\left(k_h - \int_\mu^\xi du_h\right) \cdot \Theta\left(\int_\mu^\eta du_h\right)}{\Theta\left(k_h - \int_\mu^\eta du_h\right) \cdot \Theta\left(\int_\mu^\xi du_h\right)};$$

und indem man die linke Seite von (38) in die von (36) dividirt, erhält man wieder die linke Seite der Gleichung (33). *Die in den Argumenten der Function* Θ *auftretenden Grössen* ω_h *und* k_h *sind dabei durch die Gleichungen* (34) *und* (37) *definirt; und die* $\alpha^{(i)}$ *sind die Berührungspunkte einer bestimmten unter den* 2^{2p} *Curven* $(n-2)^{ter}$ *Ordnung*), welche durch die* $n-2$ *weiteren Schnittpunkte der in* μ *an*

*) Welche von diesen Curven zu wählen ist, hängt davon ab, welches System von normalen Periodicitätsmoduln man zu Grunde legt, d. h. wie man das kanonische Schnittsystem in der Riemann'schen Fläche (p. 802) wählt. Jedem solchen Periodensysteme ist *eine* solche C_{n-2} bei gegebenem μ zugeordnet und umgekehrt; vgl. darüber auch Cl. u. G. A. F. p. 314 und 331, sowie Fuchs a. a. O. und für $p = 2$ den weiterhin folgenden Abschnitt XI.

$f = 0$ gezogenen Tangente gehen und ausserdem die Curve $f = 0$ in p Punkten berühren. —

In einem Schnittpunktsysteme sind bekanntlich p Punkte nicht durch die übrigen bestimmt, wenn das System durch eine adjungirte Curve $(n-3)^{ter}$ Ordnung ausgeschnitten wird; und dieser Umstand muss auch beim Umkehrprobleme hervortreten, indem letzteres dann kein Resultat mehr liefern darf. In der That verschwinden dann auch die benutzten Θ-Functionen identisch, d. h. unabhängig von den in ihren oberen Grenzen auftretenden Punkten ξ, η; denn es gilt der Satz*), dass die Function $\Theta(w)$, wenn die Argumente w wie in (35) bestimmt sind, als Function von ξ betrachtet, in den Punkten $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(p)}$ verschwindet, d. h. für $\xi = x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(p)}$; dieselbe wird sonach Null, wenn die p Argumente w_h die Form haben (z. B. für $\xi = x^{(p)}$):

$$w_h = \sum_{i=1}^{i=p-1} \int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h + \int_{\alpha^{(p)}}^{\mu} du_h, \tag{39}$$

wo $x^{(1)} \ldots x^{(p-1)}$ *ganz beliebige* Punkte sind, während die $\alpha^{(i)}$ von μ abhängen. Liegen nun die Punkte $x^{(1)} \ldots x^{(p)}$ mit $p-2$ anderen Punkten $x^{(p+1)} \ldots x^{(2p-2)}$ auf einer adjungirten C_{n-3}, so bildet letztere zusammen mit der Tangente von μ eine adjungirte C_{n-2}. Durch $n-2$ Schnittpunkte der letzteren mit f (nämlich die $n-2$ übrigen Schnittpunkte der Tangente von μ) geht auch die C_{n-2}, welche in den Punkten $\alpha^{(i)}$ berührt. Es ist also nach dem Abel'schen Theoreme:

$$\sum_{i=1}^{i=p} \int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=p-2} \int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(p+i)}} du_h + \int_{\alpha^{(p-1)}}^{\mu} du_h + \int_{\alpha^{(p)}}^{\mu} du_h = 0;$$

und folglich nehmen die Argumente w_h die Form an:

$$w_h = \sum_{i=1}^{i=p} \int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h + \int_{\xi}^{\mu} du_h = -\sum_{i=1}^{i=p-2} \int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(p+i)}} du_h - \int_{\alpha^{(p-1)}}^{\xi} du_h - \int_{\alpha^{(p)}}^{\mu} du_h.$$

Wegen $\Theta(w_h) = \Theta(-w_h)$ stimmt die Form der Argumente aber gerade mit der Form (39) überein; denn es ist abgesehen von dem Vorzeichen hier nur ξ statt $x^{(p-1)}$ gesetzt; und dies ist gleichgültig, da die Lage der $p-1$ Punkte $x^{(i)}$ in (39) völlig beliebig war. *Die Function $\Theta(\omega_h - \int_{\mu}^{\xi} du_h)$ verschwindet daher identisch (d. i. unabhängig von ξ), sobald die p Punkte $x^{(i)}$ der Gleichungen* (29) *mit $p-2$ anderen*

*) Vgl. R. A. F. §. 22 und 23. Cl. u. G. A. F. p. 206.

Punkten auf einer adjungirten Curve $(n-3)^{ter}$ *Ordnung liegen, und die* ω_h *durch* (34) *definirt sind.*

Das Umkehrproblem wird alsdann unbestimmt, und man muss einen weiteren $(p-1)^{ten}$ Punkt als bekannt annehmen, um die $p-1$ übrigen Punkte wieder eindeutig bestimmen zu können. Noch weitere Besonderheiten treten ein, wenn die Punkte $x^{(i)}$ durch eine adjungirte Curve ausgeschnitten werden, deren Ordnung kleiner als $n-3$ ist, indem alsdann auch noch die Differentialquotienten der Θ-Function nach den w_h bis zu einer gewissen Ordnung verschwinden; wie hier jedoch nicht weiter ausgeführt werden soll.*)

IX. Berührungscurven. — Die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung.**)

Während das Abel'sche Theorem an sich den Inhalt des Restsatzes in einfachen Formeln aussprechen lehrt (p. 809), erlaubt die Möglichkeit und Bestimmtheit des Umkehrproblems eine Reihe anderer geometrischen Anwendungen, deren Resultate (soweit es sich um Fragen aus der Geometrie der Anzahl handelt) sich allerdings auch auf rein algebraischem Wege ableiten lassen, wenn man das früher behandelte Correspondenzprincip benutzt (p. 441 ff.). Diese Anwendungen gehen ebenso, wie die früher für $p=1$, d. h. für die Theorie der elliptischen Functionen gegebenen (p. 602 ff.), von der Theilung aus und zeigen, wie die Lösungen von gewissen in der Geometrie auftretenden algebraischen Gleichungen mit Hülfe der Theilung der Abel'schen Functionen einfach dargestellt werden können. Dies ist von um so grösserem Werthe, weil die eigenthümlichen Beziehungen resp. *Gruppirungen der Wurzeln unter einander* dabei aufs Klarste hervortreten, während das Correspondenzprincip zunächst nur die *Zahl* der Lösungen liefern würde, und es noch einer complicirten Anwendung der Sätze über Schnittpunktsysteme bedürfte, um die Gruppirung zu erforschen. Wir behandeln nun zunächst die folgende Aufgabe, bei der wir wieder voraussetzen, dass die Grundcurve $f=0$ von der n^{ten} Ordnung und vom Geschlechte p sei und α_i i-fache Punkte habe, *ohne dass zwischen ihren Moduln specielle Relationen beständen.*

Es sei $m > n-3$; *auf der Grundcurve sind* $mn - \Sigma\alpha_i i(i-1) - pr$ *Punkte beliebig gegeben; man soll durch sie eine adjungirte Curve* m^{ter} *Ordnung legen, welche die Grundcurve in p Punkten je* $(r-1)$*-punktig berührt (d. i. r-punktig schneidet).*

*) Vgl. darüber Riemann: Ueber das Verschwinden der Θ-Functionen, Crelle's Journal, Bd. 65, sowie R. A. F. §. 14 und 16.

**) Vgl. für den Inhalt dieses Abschnittes Clebsch: Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie, Crelle's Journal, Bd. 63, p. 189 ff.

Wir setzen der Kürze wegen

$$(1) \qquad mn - \Sigma \alpha_i \, i(i-1) - pr = \lambda .$$

Es seien nun $c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots c^{(p)}$ Punkte, in welchen die Grundcurve $f = 0$ durch eine adjungirte C_m $(r-1)$-punktig berührt wird. Letztere Curve möge ausserdem durch gewisse Punkte $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots a^{(\lambda)}$ gehen. Diese eine Curve nehmen wir als bekannt an*); es ist dann unsere Aufgabe durch die λ gegebenen Punkte $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(\lambda)}$ eine andere adjungirte C_m zu legen, welche $f = 0$ in p Punkten $(r-1)$-punktig berührt, d. h. deren Berührungspunkte $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots y^{(p)}$ zu finden. Letztere nun genügen nach dem Abel'schen Theoreme den p transcendenten Gleichungen:

$$(2) \qquad r \sum_{i=1}^{i=p} \int_{c^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=\lambda} \int_{a^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots p),$$

wo einzelne Glieder der zweiten Summe ausfallen werden, wenn von den Punkten $x^{(i)}$ einzelne mit den Punkten $a^{(i)}$ zusammenfallen sollten; dies kann immer eintreten, ohne dass dadurch die folgenden Erörterungen beeinflusst würden. Insofern man unter den Integralen dieser zweiten Summe die Werthe versteht, welche dieselben auf bestimmten, *willkürlich* gewählten Integrationswegen annehmen, kann man auf der rechten Seite von (2) die Null durch das allgemeinste System von Periodicitätsmoduln P_h des Integrals u_h ersetzen, wo (p. 804):

$$(3) \qquad P_h = 2 m_h i\pi + q_1 a_{1h} + q_2 a_{2h} + \ldots + q_p a_{ph}$$

und findet dann durch Division mit r**):

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{i=p} \int_{c^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h = -\frac{1}{r} \sum_{i=1}^{i=\lambda} \int_{a^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h + \frac{1}{r} P_h$$

$$(h = 1, 2, \ldots p),$$

wo nun auf der rechten Seite lauter bekannte Grössen stehen; so dass diese Gleichungen die Form des Umkehrproblems haben, welch' letzteres

---

*) Dies ist erlaubt, da sich die Existenz solcher Curven aus einer einfachen Constantenzählung ergibt.

**) Wollte man die unteren Curven $c^{(i)}$ anders wählen, so würden sich die rechten Seiten dieser Gleichungen nur um Constante ändern. Seien z. B. $c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots c^{(rp)}$ die weiteren Schnittpunkte einer durch die Punkte $a^{(i)}$ gehenden adjungirten C_m, und sei z ein beliebiger Punkt der Curve, so würde man an Stelle von (2) erhalten:

$$r \sum_{i=1}^{i=p} \int_{z}^{y^{(i)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=rp} \int_{c^{(i)}}^{z} du_h + \sum_{i=1}^{i=\lambda} \int_{a^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h = 0 .$$

für $m > n - 3$ im Allgemeinen lösbar ist, wie auch die in den Gleichungen (29) p. 831 auftretenden Grössen v_h beschaffen sein mögen. Man sieht hieraus, dass bei bestimmter Wahl der Periodicitätsmoduln P_h das System der p Punkte $y^{(i)}$, also auch die gesuchte Berührungscurve, vermöge des Umkehrproblems *ein*deutig bestimmt werden kann. Die resultirenden Punkte $y^{(i)}$ aber ändern sich nicht, wenn man die P_h gleichzeitig um das r-fache eines Systems von Periodicitätsmoduln vermehrt oder vermindert, denn dadurch bleiben die Werthe der im Umkehrprobleme zu benutzenden Θ-Functionen völlig ungeändert. Daher braucht man, um alle möglichen Berührungscurven zu erhalten, den in den P_h auftretenden ganzen Zahlen $m_1, m_2, \ldots m_p$, $q_1, q_2, \ldots q_p$ nur die Werthe $0, 1, \ldots r-1$ beizulegen. Man erhält so r^{2p} Systeme von Grössen P_h und sonach auch ebenso viele Berührungscurven: *Das vorgelegte Problem hat r^{2p} Lösungen.**) Unter den gefundenen Berührungscurven ist insbesondere wieder die als bekannt angenommene, in den Punkten $c^{(i)}$ berührende Curve enthalten. Dieselbe ergibt sich, wenn man gleichzeitig allen Zahlen m_i, q_i den Werth Null beilegt.

Die entsprechenden r^{2p} Systeme von je p Berührungspunkten y haben eine sehr merkwürdige Lage gegen einander: Unterscheidet man beliebig ausgewählte r Systeme der Art durch beigesetzte obere Indices, so dass die Punkte dieser Systeme bez. durch $y^{(1i)}, y^{(2i)}, \ldots y^{(ri)}$ und die entsprechenden Werthe P_h durch $P_h^{(1)}, P_h^{(2)}, \ldots P_h^{(r)}$ bezeichnet sind, und addirt die entsprechenden Gleichungen (4), so erhält man für $h = 1, 2, \ldots p$:

$$(5)\quad \sum_{i=1}^{i=p}\int_{c^{(i)}}^{y^{(1i)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=p}\int_{c^{(i)}}^{y^{(2i)}} du_h + \ldots + \sum_{i=1}^{i=p}\int_{c^{(i)}}^{y^{(ri)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=\lambda}\int_{a^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{i=r} P_h^{(i)}.$$

Bestimmt man also die in den P_h vorkommenden Zahlen m, q so, dass

$$(6)\quad \begin{aligned} m_h^{(1)} + m_h^{(2)} + \ldots + m_h^{(r)} &= 0 \quad (\text{mod. } r), \\ q_h^{(1)} + q_h^{(2)} + \ldots + q_h^{(r)} &= 0 \quad (\text{mod. } r), \end{aligned}$$

*) Die Auflösung der entsprechenden Gleichung vom Grade r^{2p} kann man durch Wurzelausziehen bewerkstelligen, sobald man eine *specielle Theilungsaufgabe* als gelöst betrachtet, welche entsteht, wenn man in (4) die a mit den x zusammenfallen lässt, analog wie bei den elliptischen Functionen; vgl. Cl. u. G. A. F. p. 235 ff. In besonderen Fällen (z. B. bei Curven mit speciellen Moduln) können unendlich viele Lösungen auftreten. — Insbesondere folgt aus dem Satze des Textes, dass es 2^{2p} Curven $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung gibt, welche durch die übrigen $n-2$ Schnittpunkte einer Tangente von f gehen und letztere Curve noch in p Punkten berühren (p. 835). Wir werden aber später sehen, dass gewisse dieser C_{n-2} in besagte Tangente und eine C_{n-3} zerfallen.

so kann man statt der rechten Seite von (5) Null setzen; und diese Gleichung sagt dann aus, dass die r Systeme von Berührungspunkten y mit den gegebenen Punkten x auf einer adjungirten Curve m^{ter} Ordnung liegen. Aus (6) sieht man, dass von den r Systemen $r-1$ beliebig gewählt werden können, wodurch dann das r^{te} sich nach den Gesetzen des Jacobi'schen Umkehrproblems bestimmt. Man hat also den Satz:

*Legt man eine adjungirte Curve m^{ter} Ordnung durch die λ gegebenen Punkte und durch $r-1$ Systeme von Berührungspunkten, so geht dieselbe noch durch ein r^{tes} System.**)

Wir lassen in dem vorliegenden Probleme von den gegebenen Punkten, deren Anzahl grösser als $\mu \,.\, r$ vorausgesetzt werden mag (wo μ eine ganze Zahl), μ-mal r Punkte zusammenfallen, so dass nur die übrigen $\lambda - \mu r$ Punkte gegeben sind; dann bietet sich die unbestimmte Aufgabe: *Eine adjungirte Curve m^{ter} Ordnung soll durch $\lambda - \mu r = mn - \Sigma \alpha_i i\,(i-1) - (p+\mu)\,r$ auf der Grundcurve n^{ter} Ordnung gegebene Punkte gehen und diese Curve ausserdem in $p+\mu$ Punkten je $(r-1)$-punktig berühren.*

Diese Aufgabe ist für $m > n - 3$ im Allgemeinen wie die vorige lösbar, und zwar sind μ Berührungspunkte noch willkürlich, die p übrigen dann aber bestimmt (nach dem Jacobi'schen Umkehrprobleme). Durch die gegebenen Punkte lassen sich also noch μ-fach unendlich viele Curven der gesuchten Art legen, und noch r^{2p} verschiedene, wenn μ Berührungspunkte willkürlich angenommen sind. Geht man in letzterem Falle von einer der r^{2p} Curven aus, für welche das in den Gleichungen (4) auftretende Periodensystem den Werth P_h' haben möge, und lässt dann die μ willkürlich gewählten Punkte allmählich auf der Grundcurve alle möglichen (∞^{μ} verschiedenen) Lagen annehmen, so erhält man μ-fach unendlich viele andere Berührungscurven, welchen allen in den Gleichungen (4) *dasselbe* Periodensystem P_h' zukommt. Und man kann durch Variiren jener μ Punkte zu keiner Curve gelangen, die durch ein anderes Periodensystem gegeben wird; denn letztere Systeme sind völlig discret und unabhängig von den μ beweglichen Punkten charakterisirt. Alle so aus einer Curve durch einen continuirlichen Process ableitbaren Curven bilden ein

---

*) Von ersteren Systemen können in Folge besonderer Lagen der λ gegebenen Punkte mehrere gruppenweise zusammenfallen; es kann aber auch eintreten, dass dies r^{te} System mit einem der ersteren zusammenfällt. Letzteres geschieht immer bei $r = 2$, da p Schnittpunkte durch die übrigen gerade bestimmt sind, man also durch die λ Punkte und eines der 2^{2p} Systeme nur noch *eine* adjungirte C_m legen kann. Diese *eine* Curve ist dann eben die gefundene Berührungscurve. — Fallen μ Systeme zusammen, so hat in den betreffenden Punkten die neue C_m eine $(\mu-1)$-punktige Berührung mit $f=0$.

sogenanntes *System von Berührungscurven.**) Wir können sonach folgenden Satz aussprechen.

Man kann für $m > n - 3$ unendlich viele adjungirte Curven m^{ter} Ordnung bestimmen, welche die vorliegende Grundcurve in $p + \mu$ Punkten je $(r - 1)$-punktig berühren, während der Rest der Schnittpunkte gegeben ist, vorausgesetzt dass $\mu r \leqq mn - \Sigma \alpha_i i(i-1) - rp$. Diese Curven theilen sich in r^{2p} völlig getrennte Systeme ein dergestalt, dass es nicht möglich ist, von einer Curve eines Systems durch lauter Berührungscurven hindurch zu einer Curve eines andern Systems stetig überzugehen.

Ist nun irgend eine adjungirte Curve der Ordnung m gegeben, welche in $p + \mu$ Punkten $c^{(i)}$ $(r-1)$-punktig berührt und durch $\lambda - \mu r$ feste Punkte $a^{(i)}$ geht, so haben wir:

$$\sum_{i=1}^{i=p+\mu} \int_{c^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h \equiv -\frac{1}{r} \sum_{i=1}^{i=\lambda-\mu r} \int_{a^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h + \frac{1}{r} P_h.$$

Betrachten wir jetzt r Curven desselben Systems (für die also P_h denselben Werth hat) und addiren die entsprechenden Gleichungen, so kommt analog den Gleichungen (5):

$$\sum_{i=1}^{i=p+\mu} \sum_{k=1}^{k=r} \int_{c^{(i)}}^{y^{(ki)}} du_h \equiv - \sum_{i=1}^{i=\lambda-\mu r} \int_{a^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h, \quad h = 1, 2, \ldots p.$$

Also: *Die Berührungspunkte von irgend r Berührungscurven desselben Systems liegen jederzeit auf einer adjungirten Curve m^{ter} Ordnung, welche durch die gegebenen festen Punkte hindurchgeht.*

Ausserdem ergibt sich wie in dem vorhin behandelten Falle der Satz: *Legt man durch die gegebenen Punkte und durch $r - 1$ Systeme von je $p + \mu$ Berührungspunkten, welche gleichen oder verschiedenen Systemen von Berührungscurven angehören, eine adjungirte Curve m^{ter} Ordnung, so geht dieselbe immer noch durch ein r^{tes} System;* und der frühere Satz (p. 841) kann als specieller Fall dieses letzteren aufgefasst werden. —

Von besonderem Interesse sind die Fälle, in welchen die Zahl $mn - \Sigma \alpha_i i(i-1)$ durch r theilbar ist, so dass

$$mn - \Sigma \alpha_i i(i-1) = (p + \mu) r.$$

Denn dann treten adjungirte Berührungscurven auf, welche die Grund-

---

*) Dieser Begriff ist von Hesse in die Geometrie eingeführt und zunächst für Curven dritter und vierter Ordnung verwerthet worden: Crelle's Journal, Bd. 49. Vgl. auch p. 706 und die dritte Anmerkung auf p. 697. — Verschiedene Beispiele für den Fall $n = 4$ werden wir sogleich noch erwähnen. Für $n = 3$, $m = 2$ vgl. p. 533 f.

curve f überall $(r-1)$-punktig berühren, wo sie derselben begegnen (ausgenommen die singulären Punkte von f); und die entstehenden Systeme sind allein von der Grundcurve selbst und der Ordnung m der Berührungscurve abhängig, nicht mehr, wie im Vorigen, ausserdem durch besondere auf ersterer beliebig gewählte Punkte charakterisirt. Die Anzahl der verschiedenen Systeme kann hier aber unter Umständen eine andere werden, als durch die Zahl r^{2p} angegeben wird, während die übrigen oben gefundenen Sätze ihre Gültigkeit behalten.

Nehmen wir nämlich an, es habe die Zahl $M\ (=mn-\Sigma\alpha_i i(i-1))$ der beweglichen Schnittpunkte einer adjungirten C_m mit r einen gemeinsamen Factor, so dass $M=M'.s$, $r=r'.s$, also auch $r'(p+\mu)=M'$, wo M', r' relative Primzahlen sein mögen. So oft nun alle in den P_h vorkommenden Zahlen m, q den Factor s enthalten, hat man:

$$\frac{1}{r}P_h=\frac{1}{r'}P_h' \qquad (h=1,2\ldots p),$$

wo die P_h' Ausdrücke nach Art der P_h sind. Dann ist immer:

$$r'\left\{\int\limits_{c^{(1)}}^{y^{(1)}}du_h+\ldots+\int\limits_{c^{(p+\mu)}}^{y^{(p+\mu)}}du_h\right\}\equiv 0 \qquad (\text{mod. } P'_h).$$

eine Gleichung, welche lehrt, dass die den $y^{(i)}$ entsprechende Curve nicht $(r-1)$-punktig, sondern nur $(r'-1)$-punktig berührt und also bei dem vorliegenden Probleme nur insofern in Frage kommt, als sie, s-fach gerechnet, eine uneigentliche $(r-1)$-punktig berührende Curve darstellt. Indem man von diesen Ausnahmecurven abstrahirt und bemerkt, dass die Zahl solcher Systeme nach dem Vorigen gleich r'^{2p} ist*), gelangt man zu dem Satze:

Wenn die Zahl M aller beweglichen Schnittpunkte einer adjungirten Curve m^{ter} Ordnung, wo $m>n-3$, gleich $(p+\mu)\,r$ ist, so gibt es Systeme von solchen Berührungscurven, welche die Grundcurve in $p+\mu$ Punkten $(r-1)$-punktig berühren, von denen μ beliebig sind. Ist $M=M'.s$, $r=r'.s$, wo M', r' relative Primzahlen sind, so ist die Anzahl der Systeme gleich $r^{2p}-r'^{2p}$; nur wenn M und r relative Primzahlen sind, ist die Anzahl derselben gleich r^{2p}.

Im Allgemeinen wird man die Zahl r in der Form $r_1^{\alpha_1}.r_2^{\alpha_2}\ldots$ voraussetzen müssen, wo $r_1, r_2\ldots$ Primzahlen sind; und es treten

*) Wenn ein solches System aus adjungirten Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ oder niedrigerer Ordnung besteht, so kann die Mannigfaltigkeit desselben grösser als μ sein, indem dann erst $p-1$ oder weniger Punkte durch das Umkehrproblem bestimmt werden (p. 837 f.). So gibt es z. B. zu einer C_4 2^6-1 verschiedene Systeme von je *einfach* unendlich vielen eigentlichen C_2, welche die C_4 in je vier Punkten berühren; gleichzeitig tritt das System der doppelt zählenden Geraden auf, und letzteres besteht aus *zweifach* unendlich vielen Curven.

dann entsprechend dem Charakter der Zahl r noch weitere Besonderheiten ein; was hier aber nicht näher erörtert werden soll*), da es sich nur um weitläufige Unterscheidungen, nicht um neue Untersuchungen handelt. — An das zuletzt gefundene Resultat knüpft sich ferner eine Anzahl von Sätzen über diejenigen Fälle, in denen die Berührungspunkte mehrerer Berührungscurven zusammen wieder auf einer anderen adjungirten Curve liegen. Solche Sätze gelten auch noch, wenn man nicht Berührungscurven gleicher Ordnung betrachtet. Es ist nämlich, wenn M', r', μ'; M'', r'', μ''; ... $M^{(\varrho)}$, $r^{(\varrho)}$, $\mu^{(\varrho)}$ die den verschiedenen zusammen betrachteten Berührungscurven entsprechenden Zahlen bezeichnen (so dass $M^{(i)} = (p + \mu^{(i)})\, r^{(i)}$), nur nöthig, dass die Gleichungen stattfinden:

$$\frac{1}{r'} P_h' + \frac{1}{r''} P_h'' + \ldots + \frac{1}{r^{(\varrho)}} P_h^{(\varrho)} \equiv 0\,,$$

damit die $\varrho p + \Sigma\mu^{(i)}$ Berührungspunkte der Curven mit bez. M', M'', ... $M^{(\varrho)}$ beweglichen Schnittpunkten auf einer neuen adjungirten Curve liegen. Dabei ist vorausgesetzt, dass die Zahl

$$\varrho p + \mu' + \mu'' + \ldots + \mu^{(\varrho)} = hn - \Sigma\alpha_i i\,(i-1)$$

gesetzt werden kann, wo dann h eben die Ordnung dieser neuen Curve ist. — Von den zahlreichen Sätzen, welche aus der so bezeichneten Quelle fliessen, möge hier nur ein Beispiel hervorgehoben werden.

Für den Fall, dass $M = pr$ wird, erhalten wir durch obige Sätze Klassen von völlig bestimmten Berührungscurven, für die kein Berührungspunkt mehr willkürlich gewählt werden darf. Dies tritt z. B. ein für $n = 4$, $p = 3$, $m = 3$ (also $M = 12$), $r = 4$, und wir erhalten unmittelbar den Satz:

Es gibt $4^6 = 4096$ *Curven* 3ter *Ordnung, welche eine gegebene Curve* 4ter *Ordnung ohne Doppelpunkte in drei Punkten je dreipunktig berühren.*

Bezeichnet man hier die den verschiedenen Berührungscurven entsprechenden Zahlen, welche in den Periodensystemen P_h vorkommen, durch obere Indices, so *liegen immer die Berührungspunkte dreier Curven auf einer neuen Curve dritter Ordnung, sobald:*

$$m_h' + m_h'' + m_h''' + m_h'''' \equiv 0 \quad (\text{mod. } 4)\,,$$
$$q_h' + q_h'' + q_h''' + q_h'''' \equiv 0 \quad (\text{mod. } 4)\,.$$

Die so erhaltenen Curven dritter Ordnung gruppiren sich in drei Klassen. Die Curven der ersten Klasse berühren einfach in den Berührungspunkten zweier der gefundenen Curven, die der zweiten

*) Vgl. darüber Cl. u. G. A. F. p. 242 ff.

berühren einfach in den Berührungspunkten einer Curve und gehen durch die Berührungspunkte zweier anderen hindurch; die der dritten endlich gehen durch die Berührungspunkte von vier verschiedenen Curven. Die erste Klasse erhält man, wenn man zweimal zwei der Zahlen m, q einander gleich annimmt, also z. B. $m' = m'''$, $m'' = m''''$, $q' = q'''$, $q'' = q''''$, so dass die Gleichungen bestehen müssen:

$$2\,(m_h' + m_h'') \equiv 0\,, \quad 2\,(q_h' + q_h'') \equiv 0 \quad (\text{mod. } 4)\,.$$

Die zweite Klasse resultirt, wenn wan etwa $m''' = m''''$ wählt, m' und m'' aber verschieden nimmt, so dass:

$$m_h' + m_h'' + 2\,m_h''' \equiv 0, \quad q_h' + q_h'' + 2\,q_h''' \equiv 0 \quad (\text{mod. } 4).$$

Bei der dritten Klasse dagegen sind alle vier Zahlen m, q verschieden zu nehmen.

Zu den *völlig bestimmten* Problemen gehört auch das folgende, welches für die Geometrie auf der Curve f sowie für das Umkehrproblem der Abel'schen Integrale von hervorragender Wichtigkeit ist, sich jedoch von den bisher betrachteten Fragen unterscheidet, insofern es sich nunmehr um *Curven* $(n-3)^{\text{ter}}$ *Ordnung* handelt. Insbesondere werden wir dadurch weiterhin zu Betrachtungen über die Doppeltangenten der allgemeinen Curve 4. Ordnung, und über die Lage der Punkte $c^{(i)}$ geführt werden, welche beim Umkehrprobleme passend zu unteren Grenzen der Integrale gewählt wurden. Die betreffende Aufgabe fordert, *eine adjungirte Curve* $(n-3)^{\text{ter}}$ *Ordnung so zu legen, dass sie die gegebene Curve* n^{ter} *Ordnung, vom Geschlechte* p *in* $p-1$ *Punkten je einfach berührt.*

Indem wir bei unserer bisherigen Bezeichnungsweise bleiben, stellen sich die Gleichungen zwischen den Integralen, auf welche diese Aufgabe führt, folgendermassen dar, wenn R_h eine ganzzahlige Combination der Perioden bezeichnet*):

$$(7) \qquad \int_{c^{(1)}}^{y^{(1)}} du_h + \int_{c^{(2)}}^{y^{(2)}} du_h + \dots + \int_{c^{(p-1)}}^{y^{(p-1)}} du_h \equiv \tfrac{1}{2}\,R_h$$

$$(h = 1, 2, \dots p)\,.$$

Die Anzahl dieser Gleichungen ist um Eins grösser als die der Unbekannten. Dennoch sind die Gleichungen mit einander verträglich; denn es besteht zwischen den Summen der Integrale u_h eine Relation, wenn deren obere Grenzpunkte auf einer adjungirten C_{n-3} liegen; und

*) Es wird hier wieder eine solche Curve mit den Berührungspunkten $c^{(i)}$ als bekannt angenommen; vgl. die erste Anmerkung auf p. 839.

diese Relation ist, wie schon oben (p. 837) erwähnt wurde, durch das identische Verschwinden der Function $\Theta(v_1 \ldots v_p)$ gegeben, wo:

$$v_h = \sum_{i=1}^{i=p-1} \int_{\alpha^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h + \int_{\alpha^{(p)}}^{\mu} du_h,$$

wenn wieder $\alpha^{(i)}$ die Berührungspunkte der in bestimmter Weise zu μ gehörigen C_{n-2} bedeuten (p. 835), während μ beliebig ist. Nun bildet die Tangente von μ zusammen mit der C_{n-3}, deren Berührungspunkte $c^{(i)}$ in den unteren Grenzen von (7) auftreten, auch eine adjungirte C_{n-2}, welche durch die übrigen $n-2$ Schnittpunkte jener Tangente mit f geht, und sonach die Grundcurve allenthalben zweipunktig trifft, wo sie ihr noch begegnet. Es muss daher ein gewisses System Q_h von Periodicitätsmoduln geben, für welches nach dem Abel'schen Theoreme:

$$\text{(8)} \qquad \int_{c^{(1)}}^{\alpha^{(1)}} du_h + \int_{c^{(2)}}^{\alpha^{(2)}} du_h + \ldots + \int_{c^{(p-1)}}^{\alpha^{(p-1)}} du_h + \int_{\mu}^{\alpha^{(p)}} du_h - \tfrac{1}{2} Q_h .$$

Die Argumente v_h der soeben erwähnten Θ-Function werden unter Berücksichtigung von (7):

$$\text{(9)} \qquad v_h = \tfrac{1}{2} R_h - \tfrac{1}{2} Q_h .$$

Sollen also die Gleichungen (7) zusammen bestehen, so muss die Function $\Theta(\frac{1}{2} R_h - \frac{1}{2} Q_h)$ verschwinden, oder $\Theta(\frac{1}{2} P_h)$, wenn $P_h = R_h - Q_h$ gesetzt wird, so dass P_h wieder ein Periodensystem bedeutet. Nun folgt aber aus den Periodicitäts-Eigenschaften der Θ-Function unmittelbar der Satz*), dass *die Function $\Theta(\frac{1}{2} P_h)$ immer und im Allgemeinen nur dann verschwindet, wenn ihre Argumente eines der Systeme von halben Perioden*

$$\tfrac{1}{2} P_h = m_h \pi i + \tfrac{1}{2} \Sigma_k a_{hk} q_k$$

sind, für welche die Summe $m_1 q_1 + m_2 q_2 + \ldots + m_p q_p$ eine ungerade Zahl ist; d. h.:

$$\text{(10)} \qquad m_1 q_1 + m_2 q_2 + \ldots + m_p q_p = 2H + 1 .$$

Von den Functionen $\Theta(\frac{1}{2} P_h)$ verschwinden also immer so viele, als die diophantische Gleichung (10) Lösungen hat. Um die Anzahl der letzteren zu finden, nehmen wir an, es seien k der Zahlen m gleich 0, die übrigen $p-k$ gleich 1; die den ersteren Zahlen m zugehörigen q können dann 0 oder 1 sein, was 2^k Combinationen gibt. Die Summe der anderen q aber muss ungerade sein, d. h. es ist immer die letzte

*) Vgl. Clebsch a. a. O. §. 8 oder z. B. Cl. u. G. A. F. p. 260; Neumann a. a. O. p. 37.

Zahl q durch die übrigen $p-k-1$ bestimmt. Diese anderen Zahlen q können daher noch auf 2^{p-k-1} verschiedene Arten gewählt werden, oder es gibt im Ganzen in diesem Falle 2^{p-1} Systeme der q. Je nachdem man nun unter den p Zahlen m_h solche k herauswählt, welche gleich Null sein sollen, hat man

$$\frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k}$$

verschiedene Fälle und daher im Ganzen

$$\frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k} \cdot 2^{p-1}$$

Systeme der Zahlen m, q für ein gegebenes k. Endlich kann k die Werthe $0, 1, \dots p-1$ annehmen; die Anzahl aller möglichen Lösungen ist daher:

$$2^{p-1}\left\{1 + \frac{p}{1} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} + \dots + p\right\} = 2^{p-1}(2^p - 1).$$

Dieses ist also die Anzahl der Systeme P_h von halben Periodicitätsmoduln, für welche die Function $\Theta(\frac{1}{2} P_h)$ verschwindet.

Nun hatten wir $P_h = R_h - Q_h$ gesetzt, wo Q_h durch die Gleichung (8) vollständig bestimmt ist, indem Q_h allein von den Punkten $c^{(i)}$ und $\alpha^{(i)}$ abhängt. Zu jedem der $2^{p-1}(2^p - 1)$ Werthsysteme P_h gehört somit ein ganz bestimmtes Periodensystem R_h, für welches die Gleichungen (7) bestehen können; und also auch ein ganz bestimmtes System von Berührungspunkten $y^{(i)}$ einer adjungirten C_{n-3}. Wir haben also den Satz:

Es gibt $2^{p-1}(2^p - 1)$ adjungirte Curven $(n-3)^{ter}$ Ordnung, welche die Curve $f=0$ in $p-1$ Punkten je einfach berühren.

Diese Curven bestimmen sich, wenn wir obige Erörterungen zusammenfassen, aus den Gleichungen:

$$(11) \qquad \sum_{i=1}^{i=p-1} \int_{\alpha^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h + \int_{\alpha^{(p)}}^{\mu} du_h \equiv \tfrac{1}{2} P_h \qquad (h = 1, 2, \dots p),$$

in denen μ und $\alpha^{(i)}$ die bekannten Bedeutungen haben (p. 835), und welche zusammen bestehen können, sobald die in den P_h auftretenden ganzen Zahlen m, q der Gleichung (10) genügen.

Man bemerkt sofort, dass die Gleichungen (11) aus den Gleichungen (p. 839):

$$(12) \qquad \sum_{i=1}^{i=p} \int_{\alpha^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h \equiv \tfrac{1}{2} P_h \qquad (h = 1, 2, \dots p)$$

hervorgehen, wenn man einen der Punkte $y^{(i)}$ mit dem Punkte μ zu-

sammenfallen lässt. Die letzteren Gleichungen bestimmen indess zunächst die $2^{2p}-1$ adjungirten Berührungscurven $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch die $n-2$ übrigen Schnittpunkte der Tangente von μ hindurchgehen, wenn eine dieser Curven (mit den Berührungspunkten $\alpha^{(i)}$) bekannt ist. Da aber auch jede der gefundenen in $p-1$ Punkten berührenden C_{n-3} zusammen mit der Tangente von μ eine C_{n-2} der genannten Art bildet, so wird es nur noch

$$2^{2p}-2^{p-1}(2^p-1)=2^{p-1}(2^p+1)$$

nicht zerfallende C_{n-2} geben, deren Berührungspunkte den Gleichungen (12) genügen. Wir haben also den folgenden Satz, welcher den vorhergehenden ergänzt:

Es gibt $2^{p-1}(2^p+1)$ adjungirte Curven $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch die $n-2$ Schnittpunkte der in einem beliebigen Punkte μ gelegten Tangente mit $f=0$ hindurchgehen und die Curve $f=0$ in p Punkten je einfach berühren.

Die Berührungspunkte dieser Curven findet man aus den Gleichungen (12), wenn man für die P_h alle diejenigen Systeme von Periodicitätsmoduln setzt, für welche die Gleichung (10) nicht erfüllt ist, d. h. für welche:

$$m_1 q_1 + m_2 q_2 + \ldots + m_p q_p = 2H.$$

Insbesondere ist hierunter auch das System enthalten, für welches $m_i = q_i = 0$, entsprechend der in den Punkten $\alpha^{(i)}$ selbst berührenden Curve, welche durch die Wahl des benutzten Systems normaler Periodicitätsmoduln vor den übrigen C_{n-2} ausgezeichnet ist (p. 836 Anmk.). Die wirkliche Aufsuchung der verschiedenen Systeme von Berührungspunkten wird durch eine Gleichung vom Grade $2^{p-1}(2^p+1)$ möglich sein; es ist aber zu bemerken, dass sich die Wurzeln dieser Gleichung rational durch die Wurzeln der Gleichung vom Grade $2^{p-1}(2^p-1)$ ausdrücken lassen, von welcher die Bestimmung der in $p-1$ Punkten berührenden adjungirten C_{n-3} abhängt, wie in der Theorie der Theilung der Abel'schen Functionen gelehrt wird.*)

In ähnlicher Weise, wie hier die zum Punkte μ gehörigen Berührungscurven $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung in zwei völlig verschiedene Klassen getheilt sind, sondern sich überhaupt alle Systeme von adjungirten Berührungscurven, welche die Grundcurve überall berühren, wo sie derselben begegnen, in zwei verschiedene Klassen, von denen dann die Systeme der einen Klasse in besonderer Beziehung zu den $2^{p-1}(2^p-1)$ Gruppen von Berührungspunkten der adjungirten C_{n-3} stehen. Eine adjungirte Curve nämlich möge die Grundcurve, abgesehen von den singulären Punkten der letzteren, in $M=2\mu$ Punkten

*) Vgl. Cl. u. G. A. F. p. 266 ff.

treffen, und es möge eine solche Curve in $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots a^{(\mu)}$ die Grundcurve berühren; dann bestehen für die übrigen $2^{2p} - 1$ Systeme von Berührungscurven die p Gleichungen:

$$(13) \qquad \int_{a^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{a^{(2)}}^{x^{(1)}} du_h + \ldots + \int_{a^{(\mu)}}^{x^{(\mu)}} du_h \equiv \tfrac{1}{2} R_h,$$

wenn R_h irgend ein Periodensystem bedeutet. Wir legen nun den in R_h vorkommenden ganzen Zahlen insbesondere solche Werthe bei, dass auch die Gleichungen (7) bestehen können; dann wird, wenn wir unter R_h in (13) und (7) dieselben Grössen verstehen, immer:

$$(14) \qquad \sum_{i=1}^{i=\mu} \int_{a^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=p-1} \int_{c^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h = 0.$$

Ist also die Zahl $\mu + p - 1 + \Sigma \alpha_i\, i\,(i-1)$ durch n theilbar*), so liegen die Punkte $x^{(i)}$ und $y^{(i)}$ wieder auf einer adjungirten Curve; oder mit anderen Worten: die Gruppe der Punkte $x^{(i)}$ ist residual zu der Gruppe der Punkte $y^{(i)}$ (p. 431). Wir haben also den Satz:

Unter den 2^{2p} Systemen von adjungirten Berührungscurven, welche die Grundcurve f in μ Punkten je einfach berühren und sonst, die singulären Punkte ausgenommen, nicht mehr treffen, gibt es, wenn

$$\mu + p - 1 + \Sigma \alpha_i\, i\,(i-1) = hn,$$

immer $2^{p-1}(2^p - 1)$ solche, dass die Gruppe der Berührungspunkte jeder Curve des Systems mit den $p-1$ Berührungspunkten einer bestimmten der obigen Berührungscurven $(n-3)^{ter}$ Ordnung auf einer adjungirten Curve h^{ter} Ordnung liegt. — Ist dagegen:

$$\mu + p + \Sigma \alpha_i\, i\,(i-1) = hn,$$

so gibt es unter jenen 2^{2p} Systemen, wie man in analoger Weise erkennt, $2^{p-1}(2^p + 1)$ solche, dass ihre Berührungspunkte mit den p Berührungspunkten einer bestimmten der obigen C_{n-2} auf einer C_h liegen.

Nehmen wir z. B. $n = 4$, $p = 3$, so sind die betreffenden C_{n-3} durch die $2^2(2^3 - 1) = 28$ Doppeltangenten der C_4 gegeben. Legt man nun durch die Berührungspunkte einer dieser Doppeltangenten eine Schaar von Kegelschnitten, so schneiden dieselben noch eine

*) Andernfalls würden die Punkte $x^{(i)}, y^{(i)}$ mit einer Anzahl fester Punkte auf einer adjungirten Curve liegen, und mit denselben festen Punkten die Punkte $a^{(i)}$ und $c^{(i)}$. — Ist $p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ und $2\mu = mn$, so wird $h = \frac{1}{2}(m + n - 3)$; es muss also eine der Zahlen m, n gerade, die andere ungerade sein; ist hier m gerade, $= 2\nu$, so ist unter den 2^{2p} Systemen das der doppelt zählenden Curven ν^{ter} Ordnung enthalten.

Schaar von 6 beweglichen Punkten auf der C_4 aus; und in den 6 Punkten einer jeden so erhaltenen G_6 kann eine C_3 je einfach berühren. Es gibt aber auch überall berührende C_3, welche nicht in dieser Weise bestimmt werden können. —

Wir wollen nun die gewonnenen allgemeinen Resultate für die Untersuchung der *Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung* verwerthen.

Die Anzahl derselben ist, wie soeben erwähnt und wie aus den Plücker'schen Formeln bekannt ist, gleich 28. Eine jede von ihnen mag bezeichnet werden durch die in Klammern geschlossene Reihe der ihr entsprechenden Zahlen m, q, welche in den Periodensystemen P_h der Gleichungen (12) vorkommen, also durch

$$(m_1, m_2, m_3; \quad q_1, q_2, q_3).$$

Diese Zahlen können 0 oder 1 sein, doch so, dass immer:

$$m_1 q_1 + m_2 q_2 + m_3 q_3 \equiv 1 \quad (\text{mod. } 2).$$

Nehmen wir also für die m alle möglichen aus den Zahlen 0 und 1 bestehenden Systeme, nur das System 0, 0, 0 ausgeschlossen, und bestimmen obiger Gleichung gemäss die zugehörigen q, so erhalten wir die 28 Doppeltangenten in folgendem Schema:

(100, 100)	(010, 010)	(001, 001)	(011, 010)
(100, 110)	(010, 110)	(001, 011)	(011, 001)
(100, 101)	(010, 011)	(001, 101)	(011, 110)
(100, 111)	(010, 111)	(001, 111)	(011, 101)
(101, 100)	(110, 100)	(111, 100)	
(101, 110)	(110, 101)	(111, 010)	
(101, 001)	(110, 010)	(111, 001)	
(101, 011)	(110, 011)	(111, 111).	

Je m solche Doppeltangenten kann man als eine zerfallene adjungirte Berührungscurve m^{ter} Ordnung ansehen; je nachdem man die Zahl m wählt, ergibt sich dann aus obigen allgemeinen Theoremen sofort eine Reihe von Sätzen über die gegenseitige Lage der Doppeltangenten, wie diese von Hesse und Steiner zum grösseren Theile auf algebraischem Wege gefunden sind.*) Wir betrachten zuerst die einfachsten Fälle, wo $m = 2$ und $m = 3$:

---

*) Vgl. Hesse: Crelle's Journal, Bd. 49, 55 und 59; Steiner: ib. Bd. 49, sowie Cayley: ib. Bd. 68. Algebraische Beweise für andere von Steiner ohne Beweis mitgetheilte Sätze über Doppeltangenten gab Clebsch: Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen etc. §. 10, Crelle's Journal, Bd. 63, geometrische Beweise Geiser: Crelle's Journal, Bd. 73 (der letzte § dieses Aufsatzes ist nach einer Note von Frahm: Math. Annalen, Bd. 7, p. 635 zu berichtigen).

Es gibt (nach p. 840) $2^6 - 1 = 63$ Systeme von Kegelschnitten*), welche die C_4 in 4 Punkten berühren. Ein solcher Berührungskegelschnitt, dessen zugehöriges Periodensystem durch die Zahlen m_1, m_2, m_3, q_1, q_2, q_3 bestimmt sein mag (wo die m, q nur nicht gleichzeitig alle 0 sein dürfen, sonst aber alle Werthe 0, 1 annehmen können), zerfällt immer in zwei Doppeltangenten:

$$(m_1', m_2', m_3'; \quad q_1', q_2', q_3'), \quad (m_1'', m_2'', m_3''; \quad q_1'', q_2'', q_3''),$$

sobald gleichzeitig ($i = 1, 2, 3$):

$$(14) \qquad m_i' + m_i'' \equiv m_i, \quad q_i' + q_i'' \equiv q_i \quad (\text{mod. } 2),$$

vorausgesetzt, dass (ebenfalls mod. 2):

$$(15) \quad m_1'q_1' + m_2'q_2' + m_3'q_3' \equiv 1, \quad m_1''q_1'' + m_2''q_2'' + m_3''q_3'' \equiv 1.$$

Es sind dabei entweder die q oder die m nicht sämmtlich Null. Wir wollen z. B. annehmen, die Zahlen q_1, q_2 seien nicht Null (andernfalls hätte man in der folgenden Bestimmung nur die q mit den m zu vertauschen). Dann zeigen erstlich die Gleichungen (14), dass man für gegebene q_i die q_i', q_i'' auf 6 verschiedene Arten wählen kann. Ueberhaupt nämlich existiren 8 Combinationen, welche jene Gleichungen erfüllen; von diesen aber sind die beiden auszuschliessen, für welche sämmtliche q' oder sämmtliche q'' Null, was nach unserm Schema nicht eintreten kann. Diese 6 Arten geben 3 Paare von Systemen q_i', q_i'', indem immer zwei Arten desselben Paares sich nur durch Vertauschung der q' mit den q'' unterscheiden. In jedem dieser Paare sind nun wenigstens drei der Grössen q_i' (und ebenso der q_i'') von einander verschieden, also gleich 0 und 1, demnach irgend ein anderes 1 und 0 oder 1 und 1. Es existiren daher ein q' und ein q'' mit verschiedenem unteren Index, welche gleich 1 sind. Bestimmt man nun die dem dritten unteren Index entsprechenden Zahlen m so, dass sie der betreffenden Gleichung (14) genügen

— Eine Frage anderer Art ist die nach der *Realität* der Doppeltangenten. Schon Plücker hatte gezeigt, dass sie sämmtlich reell sein können (vgl. dessen Theorie der algebraischen Curven; seine Zahlenresultate sind indess nicht alle correct). Eine vollständige Darstellung aller möglichen Fälle (sowie überhaupt der möglichen Gestalten einer C_4) gab Zeuthen: Math. Annalen, Bd. 7, p. 410. — Ueber den Zusammenhang dieser Theorien mit derjenigen der 27 Geraden einer Fläche dritter Ordnung vgl. Geiser: Math. Annalen, Bd. 1 und Zeuthen: ib. Bd. 8. — Eine Zusammenstellung verschiedener Behandlungsweisen findet man in Salmon's higher plane curves, art. 251 ff. — Dass man nach Hesse eine Curve 14ter Ordnung angeben kann, welche die 56 Berührungspunkte der Doppeltangenten auf der C_4 ausschneidet, ist schon in der Anmerkung auf p. 350 hervorgehoben.

*) Von den zunächst gefundenen 64 Systemen nämlich ist das der doppelt zählenden Geraden abzuziehen; vgl. die Anmerkung auf p. 843.

(was auf *zwei* Arten geschehen kann), so bestimmen die übrigen m sich aus (14) und (15) successive. Jedem der 3 Paare q', q'' entsprechen also zwei Paare m', m''; oder man hat den Satz:

In jedem der 36 Systeme von Berührungskegelschnitten kommen 6 Paare von Doppeltangenten vor.

Da für irgend zwei solcher demselben Systeme angehörigen Paare die Summe aller m_i so wie die Summe aller q_i stets gerade ist, so hat man ferner den Satz (auch als Specialfall eines Satzes auf p. 842):

*Die Berührungspunkte je zweier Paare, welche demselben Systeme angehören, liegen auf einem Kegelschnitte.**)

Die Zahl der so erhaltenen Kegelschnitte ist gleich der der 63 Systeme, multiplicirt mit der Anzahl 15 der Combinationen von 6 Paaren zu zweien, und dividirt durch 3, da jede vier Tangenten, deren Berührungspunkte auf einem Kegelschnitte liegen, auf 3 Arten in zwei Paare zerlegt werden können, also jeder Kegelschnitt 3-mal vorkommt. *So findet man die Zahl dieser Kegelschnitte gleich 315.* Das Obige erlaubt sofort, die ihnen bez. entsprechenden Doppeltangenten zusammenzustellen.

Es gibt ferner 64 Systeme von Curven dritter Ordnung, welche die Curve vierter Ordnung je in 6 Punkten berühren (nach p. 840). Die

---

*) Es seien:

$$uu' = 0, \qquad vv' = 0, \qquad ww' = 0$$

die Gleichungen dreier Paare von Doppeltangenten desselben Systems. Durch die Berührungspunkte eines vierten Paares dieses Systems und durch die Berührungspunkte je eines der genannten drei Paare kann man dann einen Kegelschnitt legen. Man erhält so drei Kegelschnitte, welche demselben Büschel angehören, $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$, so dass:

$$k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 + k_3\sigma_3 = 0\,.$$

Die Quotienten $\sqrt{uu'} : \sqrt{ww'}$ und $\sqrt{vv'} : \sqrt{ww'}$ werden dann bez. in denselben Punkten Null und unendlich von der ersten Ordnung, wie die Quotienten $\sigma_1 : \sigma_3$ und $\sigma_2 : \sigma_3$; bei passender Bestimmung der Constanten kann man also setzen:

$$\sqrt{uu'} : \sqrt{vv'} : \sqrt{ww'} = \sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3\,;$$

und *es besteht daher zwischen je 3 Paaren desselben Systems eine Gleichung der Form:*

$$k_1\sqrt{uu'} + k_2\sqrt{vv'} + k_3\sqrt{ww'} = 0\,.$$

Ebenso besteht zwischen je drei beliebigen Berührungskegelschnitten desselben Systems $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$ vermöge $f = 0$ eine Identität der Form:

$$k_1\sqrt{S_1} + k_2\sqrt{S_2} + k_3\sqrt{S_3} = 0.$$

Vgl. auch Hesse a. a. O. Auf die hiermit zusammenhängenden Untersuchungen von Aronhold kommen wir bei Gelegenheit des Connexes [1, 2] zurück. — Die Verhältnisse $\sqrt{u} : \sqrt{w}$, $\sqrt{v} : \sqrt{w}$ etc. sind dann Abel'sche Functionen im Sinne Riemann's, vgl. Roch, Crelle's Journal, Bd. 66, p. 105, sowie obige Anmerkung auf p. 832.

den Berührungspunkten entsprechenden Integrale genügen dann immer den Gleichungen

$$\int_{a^{(1)}}^{y^{(1)}} du_h + \int_{a^{(2)}}^{y^{(2)}} du_h + \dots + \int_{a^{(6)}}^{y^{(6)}} du_h = \tfrac{1}{2} R_h ;$$

und die 64 Systeme sondern sich in der oben angegebenen Weise in zwei Klassen, je nachdem das Periodensystem R_h auch zugleich in den für die Doppeltangenten bestehenden Gleichungen (7):

$$\int_{c^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{c^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h = \tfrac{1}{2} R_h$$

vorkommt oder nicht; d. h. je nachdem in dem Systeme $P_h = R_h - Q_h$, welches in (11) vorkommt, $\Sigma mq \equiv 1$ (was 28-mal geschieht) oder $\Sigma mq \equiv 0$ mod. 2 (was 36-mal geschieht). Man hat darnach den Satz (p. 849):

Von den 64 Systemen der Curven dritter Ordnung haben 28 die Eigenschaft, dass in jedem die 6 Berührungspunkte jeder Curve auf einem Kegelschnitte liegen, welcher noch durch die Berührungspunkte einer bestimmten Doppeltangente hindurchgeht; diese Doppeltangente ist für dasselbe System immer dieselbe. Die Berührungspunkte von Curven der übrigen 36 Systeme liegen nicht mit denen einer Doppeltangente in einem Kegelschnitte.

Dagegen haben (nach p. 842) beide Klassen die gemeinsame Eigenschaft, dass *die Berührungspunkte je zweier Curven desselben Systems auf einer Curve dritter Ordnung liegen.*

Die 36 Systeme, von denen die zweite Klasse gebildet wird, und von denen jedes noch 3-fach unendlich ist, da für jede Curve noch 3 Berührungspunkte beliebig sind, stehen nun in besonderer Beziehung zu den 36 je einfach unendlichen Systemen von Kegelschnitten, welche in 3 Punkten berühren und durch die 2 Schnittpunkte einer beliebigen Tangente von f gehen. Jeder dieser Kegelschnitte nämlich bildet zusammen mit der Tangente ebenfalls eine C_3, welche in 6 Punkten berührt; nur ist hier die Berührung in zwei Punkten (den Schnittpunkten der gewählten Tangenten) eine uneigentliche, indem die C_3 daselbst Doppelpunkte besitzt. Man erkennt demnach sofort die Richtigkeit des folgenden Satzes: *Jedes der 36 Systeme von Berührungscurven 3ter Ordnung, welche zu den Doppeltangenten nicht in obiger ausgezeichneten Beziehung stehen, enthält ein einfach unendliches System von Curven, von denen jede in eine Tangente von f und einen der zu dieser gehörenden 36 Kegelschnitte zerfällt. Diese Kegelschnitte gehören für dasselbe System der C_3 immer demselben Systeme aller solchen*

C_2 an. — *Die 6 Berührungspunkte jeder Curve eines Systems von C_3 liegen mit den 3 Berührungspunkten eines jeden Kegelschnittes aus dem zugehörigen C_2-Systeme sowie den 2 Schnittpunkten der betreffenden Tangente und dem Berührungspunkte der letzteren auf einer C_3.**)

Zu den hier betrachteten Systemen von C_3 gehören auch die schon oben erwähnten 4096 Curven 3ter Ordnung, welche die C_4 in 3 Punkten je 4-punktig treffen (3-punktig berühren), indem hier die 6 Berührungspunkte paarweise zusammengerückt sind (vgl. p. 844). Für dieselben ist nämlich:

$$2\left(\int_{a^{(1)}}^{y^{(1)}} du_h + \int_{a^{(2)}}^{y^{(2)}} du_h + \int_{a^{(3)}}^{y^{(3)}} du_h\right) \equiv \tfrac{1}{2} R_h;$$

jede solche C_3 gehört also zu demjenigen Systeme von Berührungscurven, welchem das Periodensystem R_h zukommt. Umgekehrt aber folgt aus dieser Gleichung:

$$\int_{a^{(1)}}^{y^{(1)}} du_h + \int_{a^{(2)}}^{y^{(2)}} du_h + \int_{a^{(3)}}^{y^{(3)}} du_h \equiv \tfrac{1}{4} R_h + \tfrac{1}{2} R_h',$$

wo jetzt in R_h und R_h' die Zahlen m, q überall nur die Werthe 0 und 1 erhalten dürfen. Ist über die R_h verfügt, so können also die R_h' noch auf 64 verschiedene Arten gewählt werden. *Daher gehören in jedes der 64 Systeme von Berührungscurven 3ter Ordnung 64 solche Curven, welche die Curve 4ter Ordnung in 3 Punkten je 3-punktig berühren.* Dies stimmt damit überein, dass (nach p. 840) durch je zwei beliebige Punkte einer C_4 64 Kegelschnitte gelegt werden können, welche die C_4 in 3 Punkten berühren. Legt man nun diese C_2 durch die Berührungspunkte einer Doppeltangente, so sind die Berührungspunkte der C_2 zugleich diejenigen, in welchen eine C_3 4-punktig schneiden kann (vgl. p. 853). *So erhält man die 28 . 64 Berührungscurven, welche den erwähnten 28 Systemen angehören;* aber man sieht, dass es noch 36 . 64 solcher Berührungscurven gibt, in deren Berührungspunkten *nicht* zugleich ein Kegelschnitt der C_4 berühren kann, welcher durch die Berührungspunkte einer Doppeltangente geht. — Diese Beispiele werden hinreichen, um den Clarakter der hier auftretenden Sätze zu bezeichnen. Wir können dieselben zu folgendem allgemeineren Theoreme zusammenfassen:

Es gibt je 63 Systeme von Curven $(2m)^{\text{ter}}$ Ordnung und je 64 Systeme von Curven $(2m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die C_4 einfach berühren, wo sie derselben begegnen. Und diese letzteren 64 Systeme

*) Ein ganz analoger Satz gilt natürlich für die adjungirten Berührungscurven $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung bei Curven n^{ter} Ordnung vom Geschlecht p, vgl. p. 849.

theilen sich immer so in 28 und 36, dass die Berührungspunkte jeder Curve aus einem der 28 Systeme immer mit den Berührungspunkten einer bestimmten unter den 28 Doppeltangenten auf einer Curve $(m+1)^{ter}$ Ordnung liegen, während etwas Aehnliches bei den anderen 36 Systemen nicht eintritt. Aber alle Systeme haben die Eigenschaft, dass die Berührungspunkte je zweier Curven desselben Systems auf einer Curve derselben Ordnung liegen.

Man kann von diesen Sätzen leicht zu einer genaueren Discussion derjenigen Fälle übergehen, in denen die Berührungspunkte von 6, 8 ... Doppeltangenten auf einer C_3, C_4 ... liegen, worüber ebenfalls von Hesse und Steiner Sätze aufgestellt sind; u. s. w. — Es soll hier nur noch ein Beispiel für Sätze anderen Charakters angeführt werden. Nach p. 843 *gibt es* $3^6 - 1 = 728$ *Systeme von Curven* 3ter *Ordnung, welche die* C_4 *in 4 Punkten je 3-punktig treffen.* Zwischen den Integralen bestehen hier die Gleichungen:

$$\int_{c^{(1)}}^{y^{(1)}} du_h + \int_{c^{(2)}}^{y^{(2)}} du_h + \int_{c^{(3)}}^{y^{(3)}} du_h + \int_{c^{(4)}}^{y^{(4)}} du_h \equiv \tfrac{1}{3} P_h;$$

wo das System der P_h, wenn wir annehmen, dass die Punkte $c^{(i)}$ die Schnittpunkte einer beliebigen Geraden mit der C_4 seien, niemals verschwinden darf, weil sonst die C_3 aus einer dreifach zählenden Geraden bestehen würde. Betrachtet man hier eine Curve, welche demjenigen anderen Systeme angehört, für das immer $2\,P_h$ an Stelle von P_h tritt, und addirt die einer solchen Curve entsprechenden Gleichungen zu den vorigen, so findet man die Summe analoger Integrale immer der Null congruent. *Die erwähnten 728 Systeme theilen sich also in 364 Paare zu zweien, so dass die Berührungspunkte jeder Curve des einen Systems mit denen jeder Curve des zugehörigen Systems auf einem Kegelschnitte liegen.*

Man kann leicht ähnliche Sätze für die Berührungscurven dieser und anderer Ordnung in Menge aufstellen.

X. Das Verschwinden der Θ-Function. — Beziehungen zum Riemann-Roch'schen Satze.

Wir haben früher hervorgehoben (p. 837), dass die Function $\Theta(v_1, v_2, \ldots v_p)$, deren p Argumente definirt sind durch*):

$$v_h = \int_{\alpha^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{\alpha^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h + \ldots + \int_{\alpha^{(p)}}^{x^{(p)}} du_h - \int_{\mu}^{\xi} du_h,$$

*) In Betreff der Bedeutung der Punkte μ und $\alpha^{(i)}$ vgl. p. 835 und 874.

unabhängig von ξ verschwindet, wenn die p Punkte $x^{(i)}$ auf einer zu $f=0$ adjungirten C_{n-3} liegen, d. h. wenn die durch $p-1$ der Punkte $x^{(i)}$ bestimmte C_{n-3} auch den p^{ten} Punkt enthält, oder — was sich für $\xi = x^{(p)}$ ergibt — dass die Θ-Function immer verschwindet, wenn ihre Argumente von der Form sind:

$$v_h = \int\limits_{\alpha^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int\limits_{\alpha^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h + \ldots + \int\limits_{\alpha^{(p-1)}}^{x^{(p-1)}} du_h + \int\limits_{\alpha^{(p)}}^{\mu} du_h\,,$$

wo dann die Punkte $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(p-1)}$ völlig beliebig sein können. Dieser Fall ist ein erstes Beispiel dafür, wie sich algebraische Relationen für Schnittpunktsysteme adjungirter C_{n-3} in einfachster Weise ausdrücken lassen, sobald man die transscendenten Θ-Functionen zu Hülfe nimmt. Durch weitere Verfolgung dieser Bemerkung lassen sich aber auch *alle* diejenigen Sätze über Schnittpunktsysteme adjungirter C_{n-3} erledigen, welche wir früher im Anschlusse an den Restsatz behandelt haben, und welche insbesondere zu dem sogenannten Riemann-Roch'schen Satze führten. Die Entwicklung dieser Verhältnisse soll uns hier zunächst beschäftigen.

Die Einführung der Θ-Function in diese Theorien beruht nach dem Obigen auf der Lösung des Umkehrproblems, welche eben durch sie vermittelt wird, oder (nach den Entwicklungen auf p. 831) auf der Darstellbarkeit algebraischer wie f verzweigter Functionen durch Quotienten von Θ-Functionen. Solche algebraische Functionen lassen sich aber noch in anderer Weise auf transscendentem Wege herstellen, nämlich durch Vermittlung von Integralen zweiter Gattung; und an diese Darstellung derselben lässt sich dann ebenfalls eine Behandlung der *Specialgruppen* und *Specialschaaren* anknüpfen. Wir wollen auf letztere Methoden nachher um so mehr eingehen, als wir bisher noch nicht Gelegenheit fanden, uns mit Integralen zweiter Gattung eingehender zu beschäftigen.

Wenn es uns so gelingt, mit Hülfe des einfachen Formalismus, welchen die Theorie der Abel'schen Integrale an die Hand gibt, die beregten Fragen directer zu behandeln, als es uns auf dem rein algebraischen Wege möglich war (indem dies z. B. bei dem Satze auf p. 437 nur durch einen Schluss von q auf $q+1$ geschah), wenn man auch historisch zuerst auf ersterem Wege zur Stellung und Beantwortung der bezeichneten Probleme geführt wurde, so ist dagegen doch das principielle Interesse nicht gering anzuschlagen, welches ein algebraischer Beweis rein algebraischer Sätze für sich in Anspruch nehmen muss. Die folgenden Untersuchungen sollen daher keineswegs jene früheren Beweise ersetzen, sondern nur eine andere Seite der durch diese Fragestellung gebotenen Probleme beleuchten. Hervor-

gehoben mag ferner werden, dass die Theorie der transscendenten Functionen bisher nicht dazu verwendet werden konnte, die *Anzahl* der möglichen Special-Gruppen, bez. -Schaaren einer bestimmten Art anzugeben, während wir früher solche Zahlenbestimmungen, wenigstens für einzelne Fälle, mit Hülfe des erweiterten Correspondenzprincips wirklich ausgeführt haben (p. 743 f. und p. 749 ff.). —

Dass *jede Specialschaar* $g_Q^{(q)}$, *d. h. jede Schaar* $g_Q^{(q)}$, *für welche* (p. 699):

$$q > Q - p + 1$$

durch adjungirte Curven $(n-3)^{ter}$ *Ordnung ausgeschnitten werden kann*, ergibt sich hier in folgender Weise. Zunächst betrachten wir eine Punktgruppe, in welcher nur $p-1$ (nicht p) Punkte durch die übrigen bestimmt sind. Dann muss von den p Gleichungen des Umkehrproblems:

$$\int_{\alpha^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{\alpha^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h + \ldots + \int_{\alpha^{(p)}}^{x^{(p)}} du_h = v_h\,,$$

oder von den entsprechenden Differentialgleichungen:

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{i=p} \frac{\varphi_h(x^{(i)}) \cdot (c x^{(i)} d x^{(i)})}{n a_{x^{(i)}}^{n-1} a_c} = d v_h$$

eine die Folge der übrigen sein; oder mit anderen Worten: Es müssen sich Constante $c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots c^{(p)}$ so bestimmen lassen, dass:

$$(2) \qquad c_1 \varphi_1(x^{(i)}) + c_2 \varphi_2(x^{(i)}) + \ldots + c_p \varphi_p(x^{(i)}) = 0.$$

Diese p Gleichungen aber sagen eben nichts anderes aus, als dass die Punkte $x^{(i)}$ auf der C_{n-3}: $c_1\varphi_1 + \ldots + c_p\varphi_p = 0$ liegen. Wenn nun von den Punkten einer Gruppe noch weniger durch die übrigen bestimmt sind (wie eben im Falle $q > Q - p + 1$), so müssen von den Gleichungen (1) mehrere eine Folge der übrigen sein; und man wird in gleicher Weise zu einer grösseren Zahl von Relationen der Form (2) geführt. Letztere aber sagen immer aus, dass die betreffenden Punkte (zusammen mit festen Punkten einer residualen Gruppe) auf verschiedenen adjungirten C_{n-3} liegen, und also durch eine lineare Schaar solcher Curven ausgeschnitten werden können, wie behauptet wurde.

Den Beweis für den Riemann-Roch'schen Satz mittelst Θ-Functionen führen wir zuerst an einigen besonderen Fällen durch. Der einfachste Fall ist der, wo durch $p-1$ Punkte $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(p-1)}$ noch $\infty^1\ C_{n-3}$ hindurchgehen.*) Dann liegen diese Punkte mit jedem

*) Es ist also $Q = R = p - 1$, $r = 1$, und es ergibt sich, dass auch $q = 1$, denn es ist immer $Q + R = 2p - 2$, $Q - R = 2q - 2r$. Vgl. p. 688 und 701.

beliebigen p^{ten} Punkte z von f auf einer C_{n-3}, d. h. es besteht nach dem Eingangs erwähnten Satze unabhängig von z und ξ die Relation:

$$(3)\qquad \Theta\left(\sum_{i=1}^{i=p-1}\int\limits_{\alpha^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h + \int\limits_{\alpha^{(p)}}^{z} du_h - \int\limits_{\mu}^{\xi} du_h\right) = 0.$$

Andererseits ist nach dem Abel'schen Theoreme, da die C_{n-3} durch die Tangente von μ zu einer C_{n-2} ergänzt wird, wenn durch $y^{(1)}$, $y^{(2)}, \ldots y^{(p-1)}$ die $p-1$ übrigen Schnittpunkte einer durch die $x^{(i)}$ gehenden C_{n-3} bezeichnet werden:

$$(4)\qquad \sum_{i=1}^{i=p-1}\int\limits_{\alpha^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=p-1}\int\limits_{\alpha^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h + 2\int\limits_{\alpha^{(p)}}^{\mu} du_h = 0.$$

Die Argumente der in (3) auftretenden Θ-Function werden daher gleich:

$$-\sum_{i=1}^{i=p-1}\int\limits_{\alpha^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h + \int\limits_{\alpha^{(p)}}^{z} du_h - \int\limits_{\mu}^{\xi} du_h - 2\int\limits_{\alpha^{(p)}}^{\mu} du_h$$

$$= -\sum_{i=1}^{i=p-1}\int\limits_{\alpha^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h - \int\limits_{\alpha^{(p)}}^{\xi} du_h + \int\limits_{\mu}^{z} du_h.$$

Aus (3) folgt also, da Θ eine gerade Function ihrer Argumente ist, unabhängig von ξ und z die weitere Relation:

$$\Theta\left(\sum_{i=1}^{i=p-1}\int\limits_{\alpha^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h + \int\limits_{\alpha^{(p)}}^{\xi} du_h - \int\limits_{\mu}^{z} du_h\right) = 0,$$

welche aussagt, dass die $p-1$ Punkte $y^{(i)}$ mit jedem beliebigen Punkte ξ von f auf einer adjungirten C_{n-3} liegen, d. h. dass auch durch die $y^{(i)}$ noch eine ∞^1-Schaar von C_{n-3} geht; und dies ist wieder der auf p. 688 gefundene Satz.

Ein anderes Beispiel soll uns der Fall $Q = p$ (also $R = p - 2$), $r = 1$ geben, wo durch p Punkte $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(p)}$ noch ∞^1 C_{n-3} hindurchgehen. Es liegen dann *je* $p-1$ dieser Punkte $x^{(i)}$ mit jedem beliebigen Punkte z*) auf einer C_{n-3}, d. h. wir haben die p Relationen:

$$(5)\qquad \Theta\left(\sum_{i=1}^{i=p}{}_k\int\limits_{\alpha^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h + \int\limits_{\alpha^{(k)}}^{z} du_h - \int\limits_{\mu}^{\xi} du_h\right) = 0,$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots p,$$

*) Es sind hier natürlich immer nur Punkte von $f = 0$ gemeint; vgl. die algebraische Behandlung dieses Beispiels auf p. 694 ff.

wo der Index k an dem Summenzeichen andeuten mag, dass in der Summe das dem Index $i = k$ entsprechende Glied ausgelassen werden soll. Sind wieder $y^{(1)}, \ldots y^{(p-1)}$, worunter jedoch $y^{(k)}$ auszulassen ist, die $p - 2$ zu den $x^{(i)}$ residualen Punkte, so können wir hier nach dem Abel'schen Theoreme die Gleichung (4) durch die folgende ersetzen:

$$(6) \qquad \sum_{i=1}^{i=p} \int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=p-1}{}_k \int_{\alpha^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h + \int_{\alpha^{(k)}}^{\mu} du_h + \int_{\alpha^{(p)}}^{\mu} du_h = 0 .$$

Die Argumente der in (5) vorkommenden Θ-Function werden daher gleich

$$-\sum_{i=1}^{i=p-1}{}_k \int_{\alpha^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h + \int_{\alpha^{(k)}}^{z} du_h - \int_{\alpha^{(k)}}^{\mu} du_h - \int_{\alpha^{(p)}}^{\mu} du_h - \int_{\mu}^{\xi} du_h - \int_{\alpha^{(k)}}^{x^{(k)}} du_h$$

$$= -\sum_{i=1}^{i=p-1}{}_k \int_{\alpha^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h - \int_{\alpha^{(p)}}^{\xi} du_h - \int_{\alpha^{(k)}}^{x^{(k)}} du_h + \int_{\mu}^{z} du_h .$$

Die Gleichungen (5) sagen somit auch aus, dass man durch die $p - 2$ Punkte $y^{(i)}$, durch *irgend einen* der p Punkte $x^{(i)}$ und durch einen *beliebigen* Punkt ξ noch eine C_{n-3} legen kann; durch die $y^{(i)}$ gehen also p *verschiedene* Büschel von C_{n-3} und somit auch zum Mindesten eine ∞^2-Schaar solcher Curven. Dass die Mannigfaltigkeit der letzteren Schaar auch nicht grösser als 2 sein kann, erkennt man durch Umkehrung dieser Schlussweise. Wir haben also $q = 2$, wie es der Riemann-Roch'sche Satz verlangt.

Zur Durchführung des allgemeinen Beweises setzen wir:

$$Q = p - 1 + \varrho, \quad \text{also:} \quad R = p - 1 - \varrho .$$

Durch die Q Punkte $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(Q)}$ sollen der Annahme nach ∞^r C_{n-3} gehen; d. h. es sollen alle $(p - r)$-gliedrigen Determinanten aus dem folgenden Schema verschwinden*):

$$\begin{Vmatrix} \varphi_1(x^{(1)}) & \varphi_2(x^{(1)}) & \ldots & \varphi_p(x^{(1)}) \\ \varphi_1(x^{(2)}) & \varphi_2(x^{(2)}) & \ldots & \varphi_p(x^{(2)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1(x^{(Q)}) & \varphi_2(x^{(Q)}) & \ldots & \varphi_p(x^{(Q)}) \end{Vmatrix} .$$

Das Verschwinden dieser Determinanten sagt aber nichts anderes aus, als dass *je* $p - r$ der Punkte $x^{(i)}$ mit r beliebigen Punkten auf einer adjungirten C_{n-3} liegen. Die betreffenden Relationen werden daher

*) Vgl. p. 702, wo R durch Q, q durch r, t durch $p - 1$ zu ersetzen ist.

auch vollständig dargestellt durch das folgende System von Gleichungen:*)

$$(7)\qquad \Theta\left(\sum_{i=1}^{i=Q}{}_{k_1,\,k_2,\,\ldots\,k_{r+\varrho-1}}\int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=r}\int_{\alpha^{(k_i)}}^{z^{(k_i)}} du_h - \int_{\mu}^{\xi} du_h\right) = 0,$$

wo die Indices $k_1, k_2, \ldots k_{r+\varrho-1}$ an dem ersten Summenzeichen andeuten sollen, dass in der Summe die den Werthen $i = k_1, k_2, \ldots k_{r+\varrho-1}$ entsprechenden Glieder ausgelassen werden sollen, so dass die Summe nur noch aus $Q - r - \varrho + 1 = p - r$ Gliedern besteht, und wo durch $z^{(k_i)}$ r beliebige Punkte bezeichnet sind. In diesen Gleichungen ist die Zuordnung der unteren Grenzen $\alpha^{(i)}$ zu den oberen Grenzen $x^{(i)}$ noch eine sehr willkürliche. Um uns von dieser Willkürlichkeit frei zu machen und im Folgenden die Bezeichnungsweise einfacher zu gestalten, führen wir als untere Grenze immer denselben Punkt μ ein und ausserdem Constante K_h, definirt durch**):

$$K_h = \int_{\alpha^{(1)}}^{\mu} du_h + \int_{\alpha^{(2)}}^{\mu} du_h + \ldots + \int_{\alpha^{(p)}}^{\mu} du_h .$$

Die Gleichungen (7) gehen dann über in:

$$(8)\ \Theta\left(\sum_{i=1}^{i=Q}{}_{k_1,\,k_2,\,\ldots\,k_{r+\varrho-1}}\int_{\mu}^{x^{(i)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=r}\int_{\mu}^{z^{(k_i)}} du_h + K_h - \int_{\mu}^{\xi} du_h\right) = 0 .$$

Bezeichnen wir ferner mit $x^{(Q+1)}, x^{(Q+2)}, \ldots x^{(Q+R)}$ die Gruppe der R zu den $x^{(i)}$ residualen Punkte, so ist nach dem Abel'schen Theoreme:

$$\sum_{i=1}^{i=Q}\int_{\mu}^{x^{(i)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=R}\int_{\mu}^{x^{(Q+i)}} du_h + 2\,K_h = 0 .$$

Die Argumente der Θ-Function (8) gehen daher über in:

$$-\sum_{i=1}^{i=R}\int_{\mu}^{x^{(Q+i)}} du_h - \sum_{i=1}^{i=r+\varrho-1}\int_{\mu}^{x^{(k_i)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=r}\int_{\mu}^{z^{(k_i)}} du_h - K_h - \int_{\mu}^{\xi} du_h .$$

*) Von den durch das Verschwinden beregter Determinanten dargestellten Gleichungen sind nur $(r+1)\,(Q-p+r+1)$ von einander unabhängig (p. 704); dem entsprechend sind auch die hier aufgestellten Θ-Relationen noch von einander abhängig. Dass diese Gleichungen auch umgekehrt hinreichen, um alle $(p-r)$-gliedrigen Determinanten obigen Schemas zum Verschwinden zu bringen, erkennt man durch einen analogen Schluss, wie er in der Anmerkung auf p. 692 angedeutet ist.

**) Dies sind dann die bei R. A. F. §. 22 mit k_μ bezeichneten Constanten; vgl. die Anmerkungen auf p. 835 und 836.

Da nun jedenfalls $r < R$ ist, so können wir hierin $r - 1$ der Punkte $z^{(k_i)}$ bez. mit $r - 1$ beliebigen der Punkte $x^{(Q+i)}$ zusammenfallen lassen, also z. B. setzen:

$$z^{(k_1)} = x^{(Q+1)}, \quad z^{(k_2)} = x^{(Q+2)}, \ldots z^{(k_{r-1})} = x^{(Q+r-1)},$$

Schreiben wir dann kurz z statt $z^{(k_r)}$, so geht die Gleichung (8) über in:

$$(9)\quad \Theta\left(\sum_{i=1}^{i=R}{}_{k_1, k_2, \ldots k_{r-1}} \int_\mu^{x^{(Q+i)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=r+\varrho-1} \int_\mu^{x^{(k_i)}} du_h + \int_\mu^{\xi} du_h + K_h - \int_\mu^{z} du_h\right) = 0.$$

Andererseits hätten wir z. B. auch $z^{(k_1)}$ mit $x^{(k_1)}$, und nicht mit $x^{(Q+k_1)}$, zusammenfallen lassen können, wodurch die Gleichung (9) sonst ungeändert bliebe; es würde nur in dem ersten Integrale der zweiten Summe die obere Grenze $x^{(Q+k_1)}$ auftreten. Da nun die Punkte $x^{(k_i)}$ aus den Q Punkten $x^{(i)}$ beliebig gewählt waren, so besteht die Gleichung (9), auch wenn man irgend einen anderen dieser Punkte für $x^{(k_1)}$ wählt; nur darf derselbe nicht unter den Punkten $x^{(k_2)}, x^{(k_3)}, \ldots x^{(k_{r+\varrho-1})}$ enthalten sein. Für $x^{(k_1)}$ kann man also noch $Q - r - \varrho + 2 = p - r + 1$ andere Punkte $x^{(i)}$ setzen, ferner nach der eben gemachten Bemerkung auch jeden der R Punkte $x^{(Q+i)}$. Als Function von $x^{(k_1)}$ aufgefasst, verschwindet daher die in (9) links stehende Θ-Function für $R + p + 1 - r = 2p - r - \varrho$ verschiedene Werthe von $x^{(k_1)}$. Da nun immer $R > r$ ist, so ist auch:

$$p - 1 - \varrho - r > 0$$

oder:

$$2p - \varrho - r > p + 1.$$

Als Function von $x^{(k_1)}$ verschwindet also die Θ-Function für mehr als p Werthe von $x^{(k_1)}$ und somit*) überhaupt *unabhängig von* $x^{(k_1)}$. Analoges gilt für $x^{(k_2)}, \ldots x^{(k_{r+\varrho-1})}$; bezeichnen wir also mit $z^{(1)}$, $z^{(2)}, \ldots z^{(r+\varrho)}$, ξ beliebige Punkte von f, so besteht immer die Gleichung:

$$(10)\quad \Theta\left(\sum_{i=1}^{i=R}{}_{k_1, k_2, \ldots k_{r-1}} \int_\mu^{x^{(Q+i)}} du_h + \sum_{i=1}^{i=r+\varrho} \int_\mu^{z^{(i)}} du_h + K_h - \int_\mu^{\xi} du_h\right) = 0;$$

---

*) Vgl. R. A. F. §. 22 und Riemann: Ueber das Verschwinden der Θ-Functionen, §. 2. Crelle's Journal, Bd. 65. Die in §. 3 des letzteren Aufsatzes angestellten Betrachtungen über einige besondere Fälle von Specialschaaren stimmen im Wesentlichen mit denen des Textes überein; ein Unterschied in der Behandlung ist nur durch die verschiedene Wahl der unteren Grenzen bedingt. — Nach §. 4 ff. des genannten Aufsatzes lässt sich der Fall, wo die Θ-Function unabhängig von gewissen Theilen der Argumente verschwindet, immer auf das Verschwinden aller Differentialquotienten bestimmter Ordnung nach den Argumenten zurückführen.

und diese sagt aus, dass *durch je* $R - r + 1$ *Punkte der Residualgruppe* G_R *noch eine* $\infty^{r+\varrho}$-*Schaar von* C_{n-3} *geht.* Nun ist aber $R - r + 1 = p - r - \varrho$; sind also $y^{(1)}, \ldots y^{(p-r-\varrho)}$ irgend welche der R Punkte $x^{(\varrho+i)}$, so besteht immer die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(y^{(1)}) & \varphi_2(y^{(1)}) & \ldots & \varphi_p(y^{(1)}) \\ \varphi_1(y^{(2)}) & \varphi_2(y^{(2)}) & \ldots & \varphi_p(y^{(2)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1(y^{(p-r-\varrho)}) & \varphi_2(y^{(p-r-\varrho)}) & \ldots & \varphi_p(y^{(p-r-\varrho)}) \\ \varphi_1(z^{(1)}) & \varphi_2(z^{(1)}) & \ldots & \varphi_p(z^{(1)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1(z^{(r+\varrho)}) & \varphi_2(z^{(r+\varrho)}) & \ldots & \varphi_p(z^{(r+\varrho)}) \end{vmatrix} = 0;$$

oder mit anderen Worten (vgl. p. 692, Anmk.): Es verschwinden alle $(r + \varrho)$-gliedrigen Unterdeterminanten der Matrix (wo $y^{(i)} = x^{(\varrho+i)}$):

$$\begin{Vmatrix} \varphi_1(y^{(1)}) & \varphi_2(y^{(1)}) & \ldots & \varphi_p(y^{(1)}) \\ \varphi_1(y^{(2)}) & \varphi_2(y^{(2)}) & \ldots & \varphi_p(y^{(2)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1(y^{(R)}) & \varphi_2(y^{(R)}) & \ldots & \varphi_p(y^{(R)}) \end{Vmatrix}.$$

Dies sagt aber eben aus, dass durch alle R Punkte der G_R noch eine $\infty^{r+\varrho}$-Schaar von C_{n-3} geht (p. 703). *Die Specialgruppen, von denen eine als Gruppe* G_Q *gegeben war, bilden sonach selbst eine Specialschaar* $g_Q^{(q)}$, *wo:*

$$q = r + \varrho = \tfrac{1}{2}(Q - R) + r$$

oder:

$$2(q - r) = Q - R,$$

was wieder die Gleichung des Riemann-Roch'schen Satzes ist. Dass q auch nicht grösser als $r + \varrho$ sein kann, erkennt man daraus, dass derselbe Beweisgang auch umgekehrt verfolgt werden kann, die Annahme $q = r + \varrho + 1$ also auf die Zahl $r + 1$ statt auf r für die Mannigfaltigkeit der Gruppen G_R führen würde.

Ein anderer Beweis unseres Fundamentalsatzes knüpft, wie erwähnt, an die Darstellbarkeit algebraischer Functionen durch Integrale 2. Gattung an.*) Wir sprechen das zu beweisende Theorem zunächst in etwas anderer Fassung aus.

Die Mannigfaltigkeit der zu einer gegebenen G_Q residualen G_R kann man in folgender Weise algebraisch definiren. Man lege durch G_Q eine beliebige adjungirte Curve $\psi = 0$, welche die Gruppe G_R auf f ausschneidet; durch letztere lege man eine andere Curve gleicher

*) Vgl. Roch: Ueber die Anzahl der willkürlichen Constanten in algebraischen Functionen, Crelle's Journal, Bd. 64, p. 372; und für den einfachsten Fall R. A. F. §. 5.

Ordnung $\chi = 0$, die sonst ganz beliebig sein kann. Dann ist $\lambda = \frac{\chi}{\psi}$ eine algebraische Function, welche in den Punkten G_Q unendlich wird; und die Mannigfaltigkeit q der Schaar $g_Q^{(q)}$, die zu demselben Residuum G_R gehört, ist dann offenbar um Eins kleiner als die Zahl der willkürlichen Coëfficienten, die in der Curve $\chi = 0$ noch verfügbar sind, wenn letzterer keine andere Bedingung auferlegt wird als die, durch die Punkte der Gruppe G_R zu gehen und zu f adjungirt zu sein. Diese Zahl aber wird sich bei näherer Untersuchung von der Zahl $r + 1$ der linear von einander unabhängigen adjungirten C_{n-3} abhängig zeigen, welche man durch die Gruppe G_Q legen kann. Der von uns zu beweisende Satz ist daher folgender:

Wird eine algebraische Function λ in Q Punkten G_Q unendlich gross von der ersten Ordnung, und können in diesen Q Punkten $r + 1$ Functionen $\varphi(x)$ verschwinden, zwischen denen keine lineare Relation besteht, (d. h. geht durch G_Q eine ∞^r-Schaar von C_{n-3}), so enthält λ die Zahl $Q - p + r + 2$ willkürlicher Coëfficienten (d. h. die Gruppe G_Q gehört einer ∞^q-Schaar an, für die $q = Q - p + r + 1$).

Zum Beweise stellen wir die Function λ in anderer Form dar. Eine Function, welche in Q Punkten $x^{(1)}, \ldots x^{(Q)}$ algebraisch unendlich erster Ordnung wird, ist offenbar gegeben durch eine Summe von Q Integralen zweiter Gattung, deren jedes in je einem der Punkte $x^{(i)}$ unendlich gross wird (p. 792); und diesem Integrale kann man noch beliebige lineare Combinationen von (überall endlichen) Integralen erster Gattung hinzufügen, so dass man den Ausdruck erhält*):

$$(11) \quad \beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2 + \ldots + \beta_Q Z_Q + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_p u_p ,$$

wo die β_i und α_i Constante bedeuten. Unter Z_i ist dabei das Normalintegral zweiter Gattung verstanden, welches im Punkte $x^{(i)}$ unendlich wird und durch diesen Punkt völlig bestimmt ist, so dass:

$$dZ_i = \frac{\Omega_{n-2}(c\,x\,dx)}{n^2 a_{x^{(i)}}^{\,n-1} a_x \cdot a_x^{\,n-1} a_c},$$

während die erste Reihe der Periodicitätsmoduln von Z_i verschwindet und der Periodicitätsmodul von Z_i am Querschnitte b_ν gegeben ist durch eine *algebraische Function*, nämlich (p. 805):

$$\mathrm{H}_i^{(\nu)} = \left(\sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial u_\nu}{\partial x_k}\, \alpha_k \right)_i = \left(\frac{\varphi_\nu(x)\,(c\,x\,\alpha)}{n\, a_x^{\,n-1} a_c} \right)_i ,$$

wobei $(a_x^{\,n-1} a_\alpha)_i = 0$. Die Summe (11) ändert sich daher an einem Querschnitte a_ν der zerschnittenen Riemann'schen Fläche um $2\pi i \alpha_\nu$, dagegen an einem Querschnitte b_ν um

*) Zur unteren Grenze der Integrale Z_i ist ein beliebiger fester Punkt von f gewählt, obere Grenze ist der bewegliche Punkt x.

$\beta_1 \mathrm{H}_1^{(\nu)} + \beta_2 \mathrm{H}_2^{(\nu)} + \ldots + \beta_\varrho \mathrm{H}_\varrho^{(\nu)} + \alpha_1 a_{1\nu} + \alpha_2 a_{2\nu} + \ldots + \alpha_p a_{p\nu}$.

Bestimmt man also die noch willkürlichen Constanten α_i und β_i so, dass die Gleichungen bestehen:

$$\begin{gathered} \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0 \\ \beta_1 \mathrm{H}_1^{(\nu)} + \beta_2 \mathrm{H}_2^{(\nu)} + \ldots + \beta_\varrho \mathrm{H}_\varrho^{(\nu)} = 0 \\ (\nu = 1, 2, 3, \ldots p), \end{gathered} \tag{12}$$

so stellt der Ausdruck (11) eine Function dar, welche in der ganzen zu $f = 0$ gehörigen Riemann'schen Fläche eindeutig und stetig, und mit Ausnahme der Q Punkte $x^{(i)}$ auch überall endlich bleibt, in letzteren aber algebraisch unendlich wird; d. h. derselbe ist eine algebraische Function von x_1, x_2, x_3. Und umgekehrt kann sich die in denselben Q Punkten ebenso unendlich werdende Function λ von dem Ausdrucke (11) nur um eine Constante C unterscheiden. Man hat folglich:

$$\lambda = \frac{\chi}{\psi} = \beta_1 \mathrm{Z}_1 + \beta_2 \mathrm{Z}_2 + \ldots + \beta_\varrho \mathrm{Z}_\varrho + C. \tag{13}$$

Hier bestehen zwischen den Grössen β_i die p Gleichungen (12); es können also von denselben $Q - p$ willkürlich angenommen werden. Die Function λ enthält dann noch $Q - p + 1$ willkürliche Coëfficienten, d. h. die Curven $\chi = 0$ bestimmen auf f noch eine $\infty^{\varrho - p}$-Schaar von Gruppen G_ϱ, von denen eine durch $\psi = 0$ ausgeschnitten wird. Dies stimmt damit überein, dass im Allgemeinen p Schnittpunkte durch die übrigen bestimmt sind. Ist insbesondere $Q = p + 1$, so sind die Verhältnisse der Grössen β_i vollständig bestimmt, und wir haben eine ∞^1-Schaar von Gruppen G_{p+1}, welche durch den Büschel $\chi - \lambda\psi = 0$ gegeben werden. Für besondere Lagen der Punkte x_i kann es jedoch eintreten, dass die Gleichungen (12) nicht von einander unabhängig sind. So wird z. B. eine die Folge der anderen, wenn $Q = p$, und wenn die Determinante von (12) verschwindet. Von letzterer aber lässt sich das Product:

$$\left(\frac{(c\,x\,\alpha)}{a_x^{n-1} a_c}\right)_1 \left(\frac{(c\,x\,\alpha)}{a_x^{n-1} a_c}\right)_2 \cdots \left(\frac{(c\,x\,\alpha)}{a_x^{n-1} a_c}\right)_p$$

absondern, welches, da $\mu\,(x\,\alpha)_i = a_x^{n-1} a_i$, von den Punkten $x^{(i)}$ unabhängig ist. Die betreffende Gleichung geht daher über in:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x^{(1)}) & \varphi_2(x^{(1)}) & \ldots & \varphi_p(x^{(1)}) \\ \varphi_1(x^{(2)}) & \varphi_2(x^{(2)}) & \ldots & \varphi_p(x^{(2)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1(x^{(p)}) & \varphi_2(x^{(p)}) & \ldots & \varphi_p(x^{(p)}) \end{vmatrix} = 0. \tag{14}$$

In dem Falle liegen also die $Q = p$ Punkte $x^{(i)}$ auf einer Curve $\varphi = 0$, und die Anzahl der in λ willkürlichen Coëfficienten ist gleich

$Q - p + 1 + 1 = 2$, d. h. durch das Residuum von $p - 2$ Punkten kann man noch eine ∞^1-Schaar von C_{n-3} legen, *was mit den bekannten Resultaten übereinstimmt.* Ganz ebenso wird für einen beliebigen Werth von Q die Zahl der willkürlichen Constanten um $r + 1$ vermehrt, wenn zwischen den Gleichungen (12) $r + 1$ Relationen der Form:

$$c_1 \varphi_1 (x^{(i)}) + c_2 \varphi_2 (x^{(i)}) + \ldots + c_p \varphi_p (x^{(i)}) = 0$$

bestehen, wo die c_i Constante sind, d. h. wenn durch die Punkte $x^{(i)}$ $r + 1$ verschiedene Curven φ hindurchgehen, wodurch dann wieder der oben ausgesprochene Satz gewonnen ist. Gleichzeitig ist hiermit wieder gezeigt, dass jede *Specialschaar durch adjungirte C_{n-3} ausgeschnitten werden kann.*

Zur Erläuterung betrachten wir noch ein einfaches Beispiel; es sei eine Grundcurve $f = 0$ 5ter Ordnung ohne Doppelpunkte gegeben, also $p = 6$. Hier ist jede ganze Function zweiter Ordnung der x_i eine Function φ. Die Function

$$\lambda = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3}{b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3} = \frac{a_x}{b_x}$$

wird in den 5 Schnittpunkten von $b_x = 0$ mit $f = 0$ unendlich. In denselben verschwinden 3 von einander unabhängige Functionen φ, nämlich $b_x x_1$, $b_x x_2$, $b_x x_3$; daher enthält λ die Anzahl $5 - 6 + 2 + 2 = 3$ willkürlicher Coëfficienten, in der That die Grössen a_1, a_2, a_3. —

Man erkennt übrigens leicht, dass der vorstehende Satz auch für Schnittpunktsysteme nicht adjungirter Curven gültig bleibt. Gehen nämlich die Curven $\chi = 0$, $\psi = 0$ durch einen Doppelpunkt von f, in dem die Punkte ξ und η der Riemann'schen Fläche vereinigt liegen mögen, nicht hindurch, so nimmt die algebraische Function $\lambda = \frac{\chi}{\psi}$ für $x = \xi$ und für $x = \eta$ denselben Werth an, indem nur *eine* Curve des Büschels $\chi - \lambda \psi = 0$ durch den Doppelpunkt geht. Soll also wieder die Gleichung (13) bestehen, so erhalten wir für die Coëfficienten β_i neben den Gleichungen (12) zunächst noch die Relation:

$$(15) \qquad \beta_1 \int_\eta^\xi dZ_1 + \beta_2 \int_\eta^\xi dZ_2 + \ldots + \beta_Q \int_\eta^\xi dZ_Q = 0 .$$

Diese Gleichung aber ist identisch erfüllt. Durch nähere Untersuchung des Integrals $\int \frac{\chi}{\psi} d\Pi_{\alpha\beta}$ nämlich wird man, wie hier nicht weiter ausgeführt werden soll*), zu der Formel geführt:

*) Vgl. Cl. u. G. A. F. p. 128 f.

$$(16) \qquad \left(\frac{\chi}{\psi}\right)_\alpha - \left(\frac{\chi}{\psi}\right)_\beta = -\sum_{i=1}^{i=Q} \left(\frac{\chi}{\frac{\partial \psi}{\partial x}}\right)_i \int_\alpha^\beta dZ_i,$$

wo α, β zwei beliebige Punkte sind, und wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} a_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} a_2 + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} a_3,$$

unter a einen Punkt der Tangente von x an die Grundcurve verstanden. Die Indices α, β, i an den eingeklammerten Ausdrücken sollen andeuten, dass in diesen bez. $x = \alpha$, $x = \beta$, $x = x^{(i)}$ zu setzen ist, wo $x^{(i)}$ die Q Verschwindungspunkte von ψ sind. Die Gleichung (16) nun ist mit der Gleichung (14) identisch, wenn man setzt:

$$\alpha = x, \qquad \left(\frac{\chi}{\psi}\right)_\beta = C, \qquad \beta_i = \left(\frac{\chi}{\frac{\partial \psi}{\partial x}}\right)_i.$$

Setzt man aber in (16) $\alpha = \xi$, $\beta = \eta$, so wird $\left(\frac{\chi}{\psi}\right)_\alpha = \left(\frac{\chi}{\psi}\right)_\beta$, und wir erhalten die Gleichung (15), q. e. d. *Der oben ausgesprochene Satz* (p. 863) *bleibt also auch für Schnittpunktsysteme nicht adjungirter Curven ebenso bestehen.*

In obigem Beispiele können wir also der C_5 auch einen Doppelpunkt beilegen und die Function $\lambda = \frac{a_x}{b_x}$ betrachten. Dann wird $Q = 5$, $p = 5$, $r = 1$ (denn die Linie $b_x = 0$ wird durch jede Gerade durch den Doppelpunkt zu einer Curve φ ergänzt). Es folgt also $q = 5 - 5 + 1 + 1 = 2$, wie es geometrisch evident war.

XI. Schnittpunktsysteme nicht adjungirter Curven mit der Grundcurve. — Das erweiterte Umkehrproblem.

Die geometrischen Untersuchungen, welche wir bisher an das Abel'sche Theorem und das Umkehrproblem anknüpften, bezogen sich namentlich auf Schnittpunktsysteme adjungirter Curven; und es reichte dabei aus, Integralsummen *erster* Gattung zu betrachten (p. 817). In der That stimmt in dem Falle die Zahl p der Gleichungen mit der Zahl der zwischen den Schnittpunkten bestehenden Relationen überein; und das Jacobi'sche Umkehrproblem lehrte uns die Bestimmung von p Schnittpunkten durch die übrigen aus jenen p Integralgleichungen, vorausgesetzt, dass die Ordnung der schneidenden Curve grösser als $n - 3$ ist. Hat man es dagegen mit nicht adjungirten Curven zu thun, so sind mehr Schnittpunkte durch die übrigen bestimmt; es müssen somit zu jenen p Gleichungen für Integrale erster Gattung, welche immer bestehen bleiben, noch andere Gleichungen hinzutreten,

so dass durch die Gesammtheit derselben das Schnittpunktsystem wieder vollkommen charakterisirt wird. Man übersieht dies leicht, wenn man sich die Grundcurve allmählich so degenerirt denkt, dass sie einen Doppelpunkt erhält. Dann sinkt das Geschlecht der Curve um eine Einheit; und es gehen, wie früher erwähnt wurde, $p-1$ der p Normalintegrale erster Gattung in die *Normal*integrale *erster* Gattung der neuen Curve über, das p^{te} Integral dagegen verwandelt sich (bei passender Wahl des Querschnittsystems der Riemann'schen Fläche) in ein *Normalintegral dritter Gattung* für die neue Curve, deren Unendlichkeitspunkte ξ, η in dem neu entstandenen Doppelpunkte vereinigt liegen (vgl. p. 807). An Stelle der p Gleichungen des Jacobi'schen Umkehrproblems treten daher, wenn wir mit $\pi = p-1$ das Geschlecht der neuen Curve bezeichnen, jetzt die $\pi+1$ Gleichungen:

$$\sum_{i=1}^{i=\pi+1}\int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h = v_h \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots \pi),$$

$$\sum_{i=1}^{i=\pi+1}\int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} d\Pi_{\xi\eta} = v_{\pi+1};$$

und aus ihnen hat man wieder die oberen Grenzen $x^{(i)}$ zu bestimmen. Ebenso erhält man q Gleichungen mit Integralen dritter Gattung, wenn die betrachteten Curven durch q Doppelpunkte der Grundcurve nicht hindurchgehen; und solche q Gleichungen bestehen ja dann auch in der That nach dem Abel'schen Theoreme für Integrale dritter Gattung. Das Problem der Bestimmung der Punkte $x^{(i)}$ aus den $p+q$ Gleichungen ist es, welches man als *das erweiterte Umkehrproblem**) bezeichnet.

Die Lösung des letzteren ergibt sich indess nicht ohne Weiteres aus der des Jacobi'schen Problems durch den angedeuteten Grenzübergang. Da nämlich bei diesem eine Periode des Integrals $\Pi_{\xi\eta}$ unendlich gross wird, so kann man die beim Jacobi'schen Probleme verwendete Θ-Function nicht mehr unmittelbar benutzen; man muss vielmehr eine andere Function einführen, welche sich übrigens aus den gewöhnlichen Θ-Functionen und aus Exponentialfunctionen zusammensetzt. Im Folgenden sollen diese Verhältnisse,**) insbesondere

*) Für $p=1$, $q=1$ ist dasselbe von Rosenhain (unter anderen Gesichtspunkten) behandelt: Mémoires des savants étrangers, t. 11, p. 376, allgemein für $p=1$ von Clebsch: Crelle's Journal, Bd. 64, für $p=2$ von Brill: ib. Bd. 64, für Curven mit beliebigem Geschlechte von Clebsch und Gordan: Cl. u. G. A. F. p. 148 und 270 ff.

**) In Betreff des Jacobi'schen Umkehrproblems für $p=2$ sei nochmals auf den Aufsatz von Prym, der schon p. 765 erwähnt wurde, verwiesen.

die Eigenschaften dieser neuen Function, nur für den Fall $p = 2$ erörtert werden (wo wir wieder p statt π schreiben); an diesem Beispiele wird hinreichend hervortreten, wie man im allgemeinen Falle zu verfahren hat. Die Resultate wollen wir für die Curve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkte verwerthen, insbesondere für *die Bestimmung ihrer Doppeltangenten.* —

Wir bezeichnen die beiden Normalintegrale erster Gattung mit u_1, u_2, das zum Doppelpunkte der C_4 gehörige Normalintegral dritter Gattung mit u_3. Für die Betrachtung legen wir eine zweiblättrige Riemann'sche Fläche mit 6 Verzweigungspunkten zu Grunde, wie sie der Gleichung der C_4 (p. 797):

$$y^2 \varphi_2(x) + y \varphi_3(x) + \varphi_4(x) = 0$$

entspricht, wenn man y als Function von x auffasst. Die sechs Verzweigungspunkte sind durch drei Verzweigungsschnitte paarweise mit einander verbunden; um die letzteren legen wir die Schnitte a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 in der Weise, wie es für $p = 3$ in Fig. 71, p. 800 veranschaulicht ist. Vermöge dieser Schnitte ist die Fläche dann in eine einfach zusammenhängende zerlegt, deren Rand eben durch diese Schnitte gebildet wird. Die Werthe einer Function φ an zwei gegenüberliegenden Punkten dieses Randes wollen wir mit φ^+ und φ^- bezeichnen, indem wir in bekannter Weise eine positive und eine negative Seite der Randcurve unterscheiden.

Zufolge unserer früheren Festsetzungen über die Normalintegrale bestehen dann für jeden Punkt des Schnittes a_1 die Gleichungen:

$$(1) \quad (u_1^+ - u_1^-)_{a_1} = 2\pi i, \quad (u_2^+ - u_2^-)_{a_1} = 0, \quad (u_3^+ - u_3^-)_{a_1} = 0,$$

wobei die untere Grenze der Integrale u_i beliebig und constant gewählt ist. Ebenso haben wir für die Schnitte a_2, b_1, b_2:

$$(2) \quad (u_1^+ - u_1^-)_{a_2} = 0, \quad (u_2^+ - u_2^-)_{a_2} = 2\pi i, \quad (u_3^+ - u_3^-)_{a_2} = 0,$$

$$(3) \quad \begin{cases} (u_1^+ - u_1^-)_{b_1} = a_{11}, \ (u_2^+ - u_2^-)_{b_1} = a_{12}, \ (u_3^+ - u_3^-)_{b_1} = \int_\eta^\xi du_1 = A_1, \\ (u_1^+ - u_1^-)_{b_2} = a_{21}, \ (u_2^+ - u_2^-)_{b_2} = a_{22}, \ (u_3^+ - u_3^-)_{b_2} = \int_\eta^\xi du_2 = A_2, \end{cases}$$

und es ist gleichzeitig, wenn unter $\int_\alpha$ das über den ganzen Schnitt α geführte Integral verstanden wird, bei richtiger Wahl des Sinnes, in welchem man das Integral führt*):

$$a_{11} = \int_{a_1} du_1, \ a_{12} = a_{21} = \int_{a_2} du_1 = \int_{a_1} du_2, \ a_{22} = \int_{a_2} du_2, \ 2i\pi = \int_{b_1} du_1 = \int_{b_2} du_2.$$

*) Vgl. z. B. Neumann a. a. O. p. 126, Note.

Das Integral u_3 endlich ändert sich noch um $\pm 2i\pi$ bei jedem Umgange um einen der Unendlichkeitspunkte ξ, η. Die Schnitte c_1, c_2 kommen für die Periodicitäts-Eigenschaften der Integrale nicht weiter in Betracht.

Für die von den Integralen u_1, u_2 abhängende Θ-Function (p. 836):

$$\Theta(u_1, u_2) = \Sigma\Sigma e^{-\frac{1}{2}(r_1^2 a_{11} + 2 r_1 r_2 a_{12} + r_2^2 a_{22}) + r_1 u_1 + r_2 u_2}$$

haben wir ferner bekanntlich die Gleichungen ($\nu = 1, 2$):

$$(4) \qquad (\Theta^+ : \Theta^-)_{a_\nu} = 1, \quad (\Theta^+ : \Theta^-)_{b_\nu} = e^{u_\nu + \frac{1}{2} a_{\nu\nu}};$$

und wenn

$$(5) \qquad v_\nu' = v_\nu + 2 m_\nu \pi i + a_{1\nu} q_1 + a_{2\nu} q_2$$

gesetzt wird, so ist allgemein:

$$(6) \qquad \Theta(v') = \Theta(v) \cdot e^{q_1 v_1 + q_2 v_2 + \frac{1}{2}(q_1^2 a_{11} + 2 q_1 q_2 a_{12} + q_2^2 a_{22})}.$$

Die von uns zu behandelnde Aufgabe besteht nun darin, *aus den drei Gleichungen:*

$$(7) \qquad \int_{c^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{c^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h + \int_{e^{(3)}}^{x^{(3)}} du_h = w_h \qquad (h = 1, 2, 3)$$

die Punkte $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ in Function der gegebenen Grössen w_1, w_2, w_3 zu bestimmen. Aus dem über das Jacobi'sche Umkehrproblem Gesagten (p. 833) ist sofort klar, dass man eine Gleichung für die Werthe einer algebraischen Function $\frac{\varphi}{\psi}$ in den Punkten $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ aufstellen kann, wenn es gelingt, die Summe der Werthe eines Integrals dritter Gattung mit beliebigen Unendlichkeitspunkten ζ, ϑ als Function der Grössen w_1, w_2, w_3 darzustellen, d. h. die Summe:

$$(8) \qquad \mathrm{T}'_{\zeta\vartheta}\binom{x}{c} = \int_{c^{(1)}}^{x^{(1)}} d\Pi_{\zeta\vartheta} + \int_{c^{(2)}}^{x^{(2)}} d\Pi_{\zeta\vartheta} + \int_{c^{(3)}}^{x^{(3)}} d\Pi_{\zeta\vartheta}.$$

Es kommt also im Folgenden nur darauf an, diese Darstellung zu leisten.

Letzteres gelingt nun mit Hülfe einer von den drei Grössen u_1, u_2, u_3 (jedoch nicht symmetrisch) abhängenden Function $\Theta'(u_1, u_2, u_3)$ oder kurz $\Theta'(u)$, welche wir durch folgende Gleichung definiren:

$$(9) \qquad \Theta'(u) = \Theta(u_1 - \tfrac{1}{2}A_1, \; u_2 - \tfrac{1}{2}A_2) \cdot e^{\frac{1}{2}u_3} + \Theta(u_1 + \tfrac{1}{2}A_1, \; u_2 + \tfrac{1}{2}A_2) \cdot e^{-\frac{1}{2}u_3},$$

wo A_1, A_2 die in (3) ebenso bezeichneten Integrale bedeuten. In Rücksicht auf (3) ist nun an den Schnitten b_h für $h = 1, 2$:

$$\left(\Theta\,(u_\nu \pm \tfrac{1}{2} A_\nu)^+ : \Theta\,(u_\nu \pm \tfrac{1}{2} A_\nu)^-\right)_{b_h} = e^{u_h \pm \frac{1}{2} A_h + \frac{1}{2} a_{hh}}.$$

Wegen der in (3) ausgesprochenen Eigenschaften des Integrals u_3 haben wir also aus (9):

(10) $(\log \Theta'(u)^+ - \log \Theta'(u)^-)_{b_h} = u_h + \frac{1}{2}\, a_{hh} \qquad (h = 1, 2);$

definirt man ferner v_3' durch die Gleichung:

(11) $$v_3' = v_3 + 2\, g\, i\pi + q_1 A_1 + q_2 A_2\,,$$

v_1', v_2' dagegen wieder durch (5), *so findet man allgemein:*

(12) $\log\Theta'(v') = \log\Theta'(v) + q_1 v_1 + q_2 v_2 + \frac{1}{2}(q_1^2 a_{11} + 2\, q_1 q_2 a_{12} + q_2^2 a_{22}) + g i\pi,$

und man verificirt leicht, dass:

(13) $$\Theta'(-v) = \Theta'(v)\,.$$

Die Periodicitätseigenschaften der Function Θ' sind hiernach ganz analoge wie die der gewöhnlichen Θ-Function. Die erstere ist dagegen in der zerschnittenen Riemann'schen Fläche nicht mehr wie letztere eine überall eindeutige Function, denn durch das Zerschneiden längs der Querschnitte ist ein Umgang um einen der Punkte ξ, η noch nicht unmöglich gemacht, und ein solcher ändert das Vorzeichen von Θ'. Jedem Punkte der Fläche entsprechen daher *zwei* Werthe dieser Function; nur für die Punkte ξ und η fallen beide zusammen. In ihnen nämlich wird u_3 unendlich gross wie $\log(x - \xi)$ bez. $\log(x - \eta)$ in $x = \xi$ bez. $x = \eta$ und also Θ' *algebraisch unendlich wie* $(x - \xi)^{-\frac{1}{2}}$ *bez.* $(x - \eta)^{-\frac{1}{2}}$. *Die Punkte* ξ, η *sind daher Verzweigungspunkte der Function* Θ'; und zwar hat letztere (ausgebreitet über die zerschnittene Fläche) *keine anderen* Verzweigungspunkte, wie man aus der Art ihrer Bildung aus den gewöhnlichen Θ-Functionen erkennt. *Wenn also* $\Theta'(u)$ *in einem Punkte der Fläche verschwindet, so geschieht dies mindestens von der ersten Ordnung*, d. h. wie $(x - a)$ für $x = a$. —

Zur Lösung des in den Gleichungen (7) gegebenen Umkehrproblems verfahren wir nun genau so, wie es Riemann für das Jacobi'sche Umkehrproblem gethan hat.*) Unter u_1, u_2, u_3 verstehen wir unsere drei Integrale, deren gemeinsame untere Grenze beliebig und constant, deren gemeinsame obere Grenze variabel sein mag; ferner mögen v_1, v_2, v_3 drei beliebig gegebene Constante bedeuten. Wir beweisen alsdann zunächst den Satz, dass *die Function* $\Theta'(u - v)$ *in drei Punkten der* Riemann'*schen Fläche verschwindet,* es sei denn, dass sie identisch Null ist; letzteres soll aber zunächst

---

*) Vgl. R. A. F. §. 22, sowie die näheren Ausführungen bei Neumann und Prym a. a. O.

ausgeschlossen werden. Nach den eben gemachten Bemerkungen über das Verschwinden von Θ' brauchen wir nur zu zeigen, dass das Quadrat von $\Theta'(u-v)$ in *sechs* Punkten Null von der ersten Ordnung wird; diese sechs Punkte müssen dann eben aus drei Paaren von je zwei zusammenfallenden Punkten bestehen, damit $\Theta'(u-v)$ in ihnen unendlich von der ersten Ordnung werden kann. Wir bezeichnen deshalb im Folgenden mit $2V$ die zu suchende Zahl der Verschwindungspunkte von $[\Theta'(u-v)]^2$, dann ist V die entsprechende Zahl für $\Theta'(u-v)$.

Die Function:

$$[\Theta'(u-v)]^2 = \Theta^2(u_\nu - \tfrac{1}{2}A_\nu)\,e^{u_3} + \Theta^2(u_\nu + \tfrac{1}{2}A_\nu)\,e^{-u_3} \\ + 2\,\Theta(u_\nu - \tfrac{1}{2}A_\nu)\cdot\Theta(u_\nu + \tfrac{1}{2}A_\nu)$$

ist in der durch die Schnitte a, b, c zerschnittenen Fläche sonst überall eindeutig und stetig; nur in den Punkten ξ und η wird sie algebraisch unendlich von der *ersten* Ordnung. Es ist also nach einem bekannten Satze:

$$(14) \quad \int d\log\Big[\Theta'\Big]^2 = 2\int\frac{d\Theta'}{\Theta'} = 2i\pi(2V-1-1) = 4i\pi(V-1),$$

wenn man das links stehende Integral über die ganze Begrenzung der zerschnittenen Fläche führt, d. h. in beiden Richtungen über alle Schnitte a, b, c. Dies Integral ist andererseits gleich

$$2\int d(\log\Theta'^{+} - \log\Theta'^{-}),$$

geführt in nur einer Richtung über die Schnitte a, b, c. Nun folgt aber aus (10) und (12) für die Schnitte a und c:

$$\log\Theta'(u-v)^{+} - \log\Theta'(u-v)^{-} = 0$$

und für die Schnitte b:

$$\int\Big(d\log\Theta'(u-v)^{+} - d\log\Theta'(u-v)^{-}\Big)_{b_h} = \int_{b_h} du_h = 2\pi i\,.$$

Aus (14) erhalten wir somit:

$$\int d\log\Theta' = 4\,i\pi = 2\,i\pi\,(V-1)\,,$$

oder: $$V = 3\,,\ \text{q. e. d.}$$

Es kommt jetzt weiter darauf an, die Abhängigkeit dieser drei Verschwindungspunkte der Function $\Theta'(u-v)$ von den gegebenen Constanten v_1, v_2, v_3 näher zu bestimmen: Wir werden zu zeigen haben, dass *diese Abhängigkeit eben durch die Gleichungen* (7) *unseres Umkehrproblems dargestellt wird, wenn man auf den rechten Seiten derselben noch gewisse Constante hinzufügt* (oder — was dasselbe ist — ohne Vermittlung solcher Constanten, wenn man die unteren Grenzen $c^{(i)}$ passend wählt). Die drei Verschwindungspunkte von $\Theta'(u-v)$

würden dann mit den in (7) auftretenden Punkten $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ zusammenfallen und sollen daher sogleich mit diesen Buchstaben bezeichnet werden.

Auf der Begrenzung der durch die Linien a, b, c zerschnittenen Fläche nehmen wir nun irgendwo drei Punkte $\zeta^{(1)}$, $\zeta^{(2)}$, $\zeta^{(3)}$ an. Von $\zeta^{(1)}$ aus legen wir eine Schleife l_1, welche den Punkt $x^{(1)}$ umkreist und dann zu $\zeta^{(1)}$ zurückkehrt; ebenso verbinden wir die Punkte $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ bez. mit den Punkten $\zeta^{(2)}$, $\zeta^{(3)}$ durch Schleifen l_2, l_3 und denken uns die Fläche längs der Linien l_1, l_2, l_3 aufgeschnitten; endlich legen wir noch einen Schnitt a_3 um die Punkte ξ, η und verbinden ihn durch einen weiteren Schnitt mit der Randcurve unserer Fläche. In der so zerschnittenen Fläche ist jetzt $\log \Theta'(u - v)$ eine überall endliche stetige und eindeutige Function des veränderlichen Punktes x; Gleiches gilt von den Integralen u_1, u_2 und daher besteht die Relation:

$$W \equiv \int \log \Theta'(u - v) \,.\, du_\nu = 0 \qquad (\nu = 1,\, 2),$$

wenn man das links stehende Integral über die ganze Randcurve der Fläche erstreckt, d. h. in beiden Richtungen über alle Schnitte a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, b_1, b_2, l_1, l_2, l_3. Andererseits ist dieses Integral gleich der Summe der Integrale

$$W = \int \left\{ \log \Theta'(u - v)^+ - \log \Theta'(u - v)^- \right\} du_\nu,$$

geführt über alle Linien a, b, c, l. Nun haben wir aber

an den Linien l_1, l_2, l_3: $\log \Theta'^+ - \log \Theta'^- = -2i\pi$,
„ „ „ c_1, c_2 : $\log \Theta'^+ - \log \Theta'^- = 0$,
„ „ „ a_h : $\log \Theta'^+ - \log \Theta'^- = 2g_h i\pi \quad (h = 1, 2, 3)$,
„ „ „ b_ν : $\log \Theta'^+ - \log \Theta'^- = u_\nu - v_\nu + \frac{1}{2} a_{\nu\nu} + 2h_\nu i\pi$.

Es bedeuten hier die Grössen g und h ganze Zahlen, welche hinzugefügt werden müssen, da die Differenzen von $\log \Theta'$ nur bis auf Vielfache von $2i\pi$ definirt sind. Bezeichnen wir nun mit $\alpha_\nu^{(1)}$, $\alpha_\nu^{(2)}$, $\alpha_\nu^{(3)}$ die Werthe von u_ν in den Punkten $\zeta^{(1)}$, $\zeta^{(2)}$, $\zeta^{(3)}$, mit $a_\nu^{(1)}$, $a_\nu^{(2)}$, $a_\nu^{(3)}$ die in den Punkten $x^{(i)}$, so wird:

$$\int_{l_i} dW = 2i\pi \int_{\zeta^{(i)}}^{x^{(i)}} du_\nu = (a_\nu^{(i)} - \alpha_\nu^{(i)})\, 2i\pi\,,$$

$$\int_{a_h} dW = 2\pi i g_\nu \int_{a_h} du_\nu = 2g_\nu i\pi \,.\, a_{h\nu}, \qquad (h = 1,\, 2)$$

$$\int_{a_3} dW = 2i\pi g_3 \int_{a_3} du_\nu = 0$$

$$\int_{b_h} dW = \int_{b_h} u_h^- du_\nu + (\tfrac{1}{2} a_{hh} - v_h + 2h_h \pi i) \int_{b_h} du_\nu\,,$$

Hier ist $\int_{b_h} du_\nu$ gleich $2\pi i$ oder 0, je nachdem $h = \nu$ oder $h \gtrless \nu$, das Integral $\int_{b_h} u_h du_\nu$ hängt nur von dem constanten Anfangswerthe des Integrals u_ν ab; ebenso sind die Integrale $\alpha_\nu^{(i)}$ von den $x^{(i)}$ unabhängig. Bezeichnen wir also mit k_ν solche von den $x^{(i)}$ unabhängige Constante, so wird schliesslich für $\nu = 1, 2$:

$$0 = W = (a_\nu^{(1)} + a_\nu^{(2)} + a_\nu^{(3)} - v_\nu + 2 h_\nu i\pi + g_1 a_{1\nu} + g_2 a_{2\nu} + k_\nu) 2i\pi.$$

Eine ganz analoge Gleichung leitet man aber in derselben Weise auch für u_3 ab. Es wird also schliesslich bis auf vollständige Periodensysteme für $\nu = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} v_\nu &= a_\nu^{(1)} + a_\nu^{(2)} + a_\nu^{(3)} + k_\nu \\ &= w_\nu + k_\nu - b_\nu^{(1)} - b_\nu^{(2)} - b_\nu^{(3)} = w_\nu + \varkappa_\nu, \end{aligned}$$

wo $b_\nu^{(i)}$ den Werth des Integrals u_ν im Punkte $c^{(i)}$ bedeutet, wo ferner die $\varkappa_\nu$ neue Constante sind, und die w_ν mit den in den Gleichungen (7) gegebenen Grössen übereinstimmen sollen. Wir haben also den Satz:

Setzt man die Argumente der Function Θ', *welche durch* (9) *definirt ist, gleich* $u_\nu - w_\nu - \varkappa_\nu$, *wo die* $\varkappa_\nu$ *gewisse Constante und die* w_ν *durch* (7) *gegeben sind, so verschwindet die Function* Θ' *in den drei Punkten* $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$.

Um die Constanten $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ genauer zu bestimmen, verfahren wir nun in folgender Weise.*) Die constante untere Grenze der Integrale soll mit μ bezeichnet sein; dann verschwindet nach dem eben ausgesprochenen Satze die Function

$$\Theta'\left(\int_\mu^x du_h - \int_{c^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h - \int_{c^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h - \int_{c^{(3)}}^{x^{(3)}} du_h - \varkappa_h\right)$$

für $x = x^{(1)}$ unabhängig von den Punkten $x^{(2)}, x^{(3)}$; oder mit anderen Worten: *Die Function*

$$\Theta'\left(\int_\mu^{c^{(1)}} du_h - \int_{c^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h - \int_{c^{(3)}}^{x^{(3)}} du_h - \varkappa_h\right) \tag{15}$$

verschwindet unabhängig von der Lage der Punkte $x^{(2)}, x^{(3)}$.

Die Punkte $c^{(1)}, c^{(2)}, c^{(3)}$ sind hier noch ganz beliebig; mit ihnen müssen nur immer die Grössen $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ gleichzeitig passend geändert werden. Wir bestimmen dieselben jetzt durch folgende Con-

*) Diese Bestimmungsweise der Constanten ist der von Weber (Crelle's Journal, Bd. 70) für das Jacobi'sche Umkehrproblem gegebenen nachgebildet. Das Resultat stimmt mit dem bei Cl. u. G. A. F. p. 184 auf anderem Wege (für den allgemeinen Fall) gewonnenen überein.

struction. Die Tangente der C_4 im Punkte μ schneidet die C_4 noch in zwei Punkten; durch letztere legen wir einen Kegelschnitt, welcher die C_4 noch in drei Punkten berührt und nicht durch den Doppelpunkt geht. Solche Kegelschnitte gibt es in endlicher Zahl; und *mit den drei Berührungspunkten eines zunächst beliebig ausgewählten lassen wir die Punkte* $c^{(1)}$, $c^{(2)}$, $c^{(3)}$ *zusammenfallen.* Es soll dies jedoch ein eigentlicher Kegelschnitt der Art sein, d. h. er soll nicht in die Tangente von μ selbst und eine Doppeltangente der C_4 zerfallen. Nun schneidet die Verbindungslinie von $x^{(2)}$ und $x^{(3)}$ die C_4 noch in zwei Punkten, die mit $y^{(2)}$, $y^{(3)}$ bezeichnet seien. Dann ist nach dem Abel'schen Theoreme für $h = 1, 2, 3$:

$$
(16) \qquad 2\int_{c^{(1)}}^{\mu} du_h + \int_{c^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h + \int_{c^{(3)}}^{x^{(3)}} du_h + \int_{c^{(2)}}^{y^{(2)}} du_h + \int_{c^{(3)}}^{y^{(3)}} du_h = 0\,.
$$

Hieraus folgt, da Θ' eine gerade Function ist, dass neben der durch das Verschwinden von (15) gegebenen Gleichung auch die Gleichung besteht:

$$
(17) \qquad \Theta'\left(\int_{\mu}^{c^{(1)}} du_h - \int_{c^{(2)}}^{y^{(2)}} du_h - \int_{c^{(3)}}^{y^{(3)}} du_h + \varkappa_h\right) = 0,
$$

und zwar unabhängig von $y^{(2)}$, $y^{(3)}$. Man kann also in letzterer Gleichung auch $y^{(2)} = x^{(2)}$, $y^{(3)} = x^{(3)}$ setzen; und dann stimmt die Gleichung (17) mit (15) bis auf das Vorzeichen von $\varkappa_h$ überein.

Statt $x = x^{(1)}$ zu setzen, hätte man aber auch $x = x^{(2)}$ und $x^{(3)}$ nehmen können. Es ergibt sich somit, dass unabhängig von dem Vorzeichen der Grösse $\varkappa_\nu$ die Function

$$
\Theta'\left(\int_{\mu}^{x} du_h - \int_{c^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h - \int_{c^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h - \int_{c^{(3)}}^{x^{(3)}} du_h \pm \varkappa_\nu\right)
$$

für $x = x^{(1)}$, $x = x^{(2)}$, $x = x^{(3)}$ verschwindet. Dies ist aber nur möglich, wenn sich die Argumente der von $+\varkappa_\nu$ und der von $-\varkappa_\nu$ abhängenden Function Θ' um ein Vielfaches von Periodensystemen unterscheiden; d. h. wir haben:

$$
\begin{aligned}
\varkappa_1 &= \tfrac{1}{2}(2\mu_1\pi i + \mu_2 \,.\, 0 + \mu_3 \,.\, 0 + \gamma_1 a_{11} + \gamma_2 a_{22})\\
\varkappa_2 &= \tfrac{1}{2}(\mu_1 \,.\, 0 + 2\mu_2\pi i + \mu_3 \,.\, 0 + \gamma_1 a_{21} + \gamma_2 a_{22})\\
\varkappa_3 &= \tfrac{1}{2}(\mu_1 \,.\, 0 + \mu_2 \,.\, 0 + 2\mu_3 i\pi + \gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_3),
\end{aligned}
$$

wo nun die Zahlen μ, γ ganz bestimmt gegebene Werthe ($\equiv 0$ mod. 2) haben und eben dadurch definirt sind, dass die Function $\Theta'(\int_{\mu}^{x} du_h + \varkappa_\nu)$ in den drei Punkten $c^{(i)}$ verschwindet.

Legt man durch die beiden weiteren Schnittpunkte der Tangente von μ mit der C_1 einen anderen Kegelschnitt, der die C_4 in den Punkten $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$ berührt, so ist nach dem Abel'schen Theoreme:

$$(18) \qquad \int_{c^{(1)}}^{\alpha^{(1)}} du_h + \int_{c^{(2)}}^{\alpha^{(2)}} du_h + \int_{c^{(3)}}^{\alpha^{(3)}} du_h \equiv \tfrac{1}{2} k_h ,$$

wenn k_h ein bestimmtes Periodensystem bedeutet. Die Function $\Theta'(\int_\mu^x + \frac{1}{2} k_h + \frac{1}{2} \varkappa_h)$ verschwindet dann in den drei Punkten $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$. *Besonders ausgezeichnet ist aber hierdurch das System von Punkten $\alpha^{(i)}$, für welches $k_h = \varkappa_h$ wird, welches also die Eigenschaft besitzt, dass die Function $\Theta'(\int_\mu^x du_h)$ in den Punkten $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$ Null wird.* Es ist daher zweckmässig, dieses bestimmte Punktsystem für die unteren Grenzen der Integrale in den Gleichungen (7) zu wählen, wie es im Folgenden (analog unseren früheren Bemerkungen über das Jacobi'sche Problem p. 835 f.) geschehen soll. Es sei noch hervorgehoben, dass *der in diesen ausgezeichneten Punkten $\alpha^{(i)}$ berührende Kegelschnitt im Allgemeinen nicht in die Tangente von μ und eine Doppeltangente der C_4 zerfallen kann.* Alsdann nämlich wäre der Punkt μ unter den Punkten $\alpha^{(i)}$ enthalten, und es müsste die Function $\Theta'(\int_\mu^x du_h)$ für $x = \mu$ verschwinden, d. h. die Gleichung bestehen:

$$\Theta'(0, 0, 0) = 0,$$

was im Allgemeinen offenbar nicht eintritt.

Auf die Doppeltangenten der C_4 kommen wir sogleich noch zurück. Zuvor mögen die bisher gewonnenen Resultate für die Lösung des in den Gleichungen (7) gegebenen Umkehrproblems benutzt werden. Dasselbe erledigt sich einfach, wenn man die Function Θ' anwendet. In der That verificirt man leicht die Richtigkeit der Gleichung:

$$(19) \qquad \mathrm{T}'_{\zeta\vartheta}\binom{x}{\alpha} = \log \frac{\Theta'\left(w_h - \int_\mu^\vartheta du_h\right) \cdot \Theta'\left(\int_\mu^\zeta du_h\right)}{\Theta'\left(w_h - \int_\mu^\zeta du_h\right) \cdot \Theta'\left(\int_\mu^\vartheta du_h\right)},$$

wo:

$$\mathrm{T}'_{\zeta\vartheta}\binom{x}{\alpha} = \sum_{i=1}^{i=3} \int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(i)}} d\Pi_{\zeta\vartheta}, \qquad w_h = \sum_{i=1}^{i=3} \int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h ;$$

man braucht zu dem Zwecke nur die Periodicitäts-Eigenschaften sowie die Null- und Unendlichkeitspunkte auf beiden Seiten der Gleichung zu vergleichen. *Damit ist dann nach den obigen Bemerkungen* (p. 869) *das erweiterte Umkehrproblem gelöst.* —

Letzteres kann man nun zur Bestimmung von *Berührungscurven* benutzen, *welche durch den Doppelpunkt nicht hindurchgehen*, wie wohl nicht weiter ausgeführt zu werden braucht (vgl. p. 838 ff.). Es sei nur bemerkt, dass jetzt, wie man leicht übersieht, die Gleichungen:

$$(20) \qquad \int_{\alpha^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{\alpha^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h + \int_{\alpha^{(3)}}^{x^{(3)}} du_h \equiv \frac{1}{r}(v_h + k_h),$$

wo die v_h Constante, die k_h Periodensysteme bedeuten, $r^5 = r^{2p+1}$ Lösungen erlauben.*) Für $r = 2$ folgt hieraus, dass *es* 31 *Systeme von je einfach unendlich vielen eigentlichen Kegelschnitten gibt, welche nicht durch den Doppelpunkt gehen und die C_4 überall berühren, wo sie ihr begegnen;* denn unter den zunächst gefundenen 32 Systemen ist das der doppelt zählenden Geraden mit enthalten. —

Von besonderem Interesse ist hier indess wieder das auch für den Fall $p = 3$ schon behandelte *Problem der Doppeltangenten*, zu dessen Erledigung wir jetzt übergehen. Haben wieder $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$ die angegebene Bedeutung, und sollen $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ die Berührungspunkte einer Doppeltangente sein, so bildet letztere zusammen mit der Tangente von μ eine C_2, für welche nach dem Abel'schen Theoreme analog zu (18) die Gleichungen bestehen:

$$(21) \qquad \int_{\alpha^{(3)}}^{\mu} du_h + \int_{\alpha^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{\alpha^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h \equiv \tfrac{1}{2} k_h \qquad (h = 1, 2, 3),$$

wo die k_h Periodensysteme sind. Hier haben wir aber *drei* Gleichungen zur Bestimmung der *zwei* Unbekannten $x^{(1)}$, $x^{(2)}$; sollen dieselben zusammen bestehen können, so muss also zwischen den in ihnen vorkommenden Constanten noch eine Relation erfüllt sein. Die letztere nun ist uns sofort durch den oben bewiesenen Satz gegeben, dass die Function:

$$\Theta'\left(\int_{\alpha^{(3)}}^{\mu} du_h + \int_{\alpha^{(1)}}^{y^{(1)}} du_h + \int_{\alpha^{(2)}}^{y^{(2)}} du_h\right)$$

unabhängig von den Punkten $y^{(1)}$, $y^{(2)}$ verschwindet. Setzen wir also $y^{(1)} = x^{(1)}$, $y^{(2)} = x^{(2)}$, so haben wir die Bedingung, dass die Gleichung erfüllt sei:

$$\Theta'\left(\int_{\alpha^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{\alpha^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h + \int_{\alpha^{(3)}}^{\mu} du_h\right) \equiv \Theta'(\tfrac{1}{2} k_h) = 0.$$

---

*) Die Zahl ist hingegen wieder gleich r^{2p}, wenn der Doppelpunkt in einen Rückkehrpunkt übergeht, denn dann verwandelt sich das Integral dritter Gattung in ein Integral zweiter Gattung; und letzteres hat keine logarithmische Periode mehr.

Wir müssen daher fragen, ob es Systeme von halben Perioden $\frac{1}{2}k_1$, $\frac{1}{2}k_2$, $\frac{1}{2}k_3$ gibt, für welche, als Argumente der Function Θ', diese letztere gleich Null wird. Setzen wir nun:

$$(22)\qquad \begin{aligned} k_\nu &= 2i\pi m_h + q_1 a_{1\nu} + q_2 a_{2\nu} \qquad (\nu = 1, 2) \\ k_3 &= 2i\pi g \;\; + q_1 A_1 \;\; + q_2 A_2 \,. \end{aligned}$$

Die Function $\Theta'(\frac{1}{2}k_h)$ entsteht dann aus $\Theta'(-\frac{1}{2}k_h)$, indem man die Argumente der letzteren um ein ganzes Periodensystem k_h vermehrt; und folglich wird nach (12):

$$\begin{aligned} \log\Theta'(\tfrac{1}{2}k_h) &= \log\Theta'(-\tfrac{1}{2}k_h) + \tfrac{1}{2}(q_1{}^2 a_{11} + 2q_1 q_2 a_{12} + q_2{}^2 a_{22} - q_1 k_1 - q_2 k_2) + g i\pi \\ &= \log\Theta'(-\tfrac{1}{2}k_h) - \pi i(m_1 q_1 + m_2 q_2 - g) \end{aligned}$$

oder:

$$\Theta'(\tfrac{1}{2}k_h) = \Theta'(-\tfrac{1}{2}k) \,.\, (-1)^{m_1 q_1 + m_2 q_2 - g} \,.$$

Da aber Θ' eine gerade Function war, so ist auch

$$\Theta'(\tfrac{1}{2}k_h) = \Theta'(-\tfrac{1}{2}k_h) \,.$$

Beide Gleichungen können nur zusammen bestehen: entweder, wenn $m_1 q_1 + m_2 q_2 - g$ eine gerade Zahl ist, oder *wenn* $\Theta'(\frac{1}{2}k_h) = 0$ *ist. Letzteres tritt also immer ein, wenn* $m_1 q_1 + m_2 q_2 - g$ *eine ungerade Zahl ist, d. h. wenn:*

$$(23)\qquad m_1 q_1 + m_2 q_2 - g \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 2).$$

Nur wenn die Congruenz (23) *erfüllt ist, können daher die Gleichungen* (21) *zur Bestimmung der Doppeltangenten dienen.*

Hierdurch ist uns nun die Zahl der Doppeltangenten und ihre gegenseitige Gruppirung gegeben.*) Die Zahl derselben findet man gleich 16, was mit den Plücker'schen Formeln in Uebereinstimmung ist (p. 353), und zwar haben wir für die mit den Ziffern 1, 2, . . . 16 bezeichneten Doppeltangenten folgende Werthsysteme der Zahlen m, q:

	1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**	**13.**	**14.**	**15.**	**16.**
g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
m_1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0
q_1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1
m_2	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1
q_2	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1

*) Die Untersuchung der Doppeltangenten einer C_4 mit Doppelpunkt ist von Brill gegeben: Math. Annalen, Bd. 6, p. 66, und zwar im Anschlusse an seine Behandlung des erweiterten Umkehrproblems für $p = 2$; vgl. die Anmerkung auf p. 867. Vgl. auch Roch: Crelle's Journal, Bd. 66, p. 114 ff.

Die Berührungspunkte dieser 16 Doppeltangenten sind auch, wie schon bemerkt wurde, unter den Lösungen der Gleichungen enthalten:

$$(24) \qquad \int_{\alpha^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{\alpha^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h + \int_{\alpha^{(3)}}^{x^{(3)}} du_h \equiv \tfrac{1}{2} k_h$$

welche die Berührungspunkte der durch die übrigen Schnittpunkte der Tangente von μ gehenden Berührungs-Kegelschnitte bestimmen: Man kann hier eben einen der Punkte $x^{(i)}$ mit dem Punkte μ zusammenfallen lassen, wenn für die in den Grössen k_h vorkommenden Zahlen m, q, g die Bedingung (23) erfüllt ist. Ist diese Bedingung jedoch nicht erfüllt, so erhält man aus den Gleichungen (24) die Berührungspunkte eines eigentlichen Kegelschnittes. *Die Zahl der letzteren ist also gleich* $2^{2 \cdot 2+1} - 16 = 16$.

Zu weiteren Sätzen über die *gegenseitige Gruppirung der Doppeltangenten* gelangt man nun (wie im Falle $p = 3$), wenn man von den Systemen der (jetzt nicht adjungirten) Berührungs-Kegelschnitte ausgeht. Die Berührungspunkte $x^{(1)}, \dots x^{(4)}$ eines solchen bestimmen sich, wenn $c^{(1)}, \dots c^{(4)}$ die Schnittpunkte einer beliebigen Geraden mit der C_4 sind (die doppelt zählend einen Berührungs-Kegelschnitt gibt), aus den Gleichungen:

$$(25) \qquad \int_{c^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{c^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h + \int_{c^{(3)}}^{x^{(3)}} du_h + \int_{c^{(4)}}^{x^{(4)}} du_h \equiv \tfrac{1}{2} k_h ,$$

wo die k_h wieder durch (22) definirt sind. Es ist indess bei Lösung des Umkehrproblems geschickter andere Gleichungen zu Grunde zu legen, in denen die zu μ gehörigen Punkte $\alpha^{(i)}$ als untere Grenzen vorkommen. Nun gehen durch die beiden übrigen Schnittpunkte der Tangente von μ zwei Curven vierter Ordnung, von denen die eine aus dem doppelt zählenden, in $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$ berührenden Kegelschnitte besteht, die andere durch den in $x^{(1)}, \dots x^{(4)}$ berührenden Kegelschnitt und die doppelt zählende Tangente von μ gebildet wird. Wir können daher die Punkte $x^{(i)}$ auch aus den folgenden drei Gleichungen bestimmen:

$$(26) \qquad \int_{\alpha^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{\alpha^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h + \int_{\alpha^{(1)}}^{x^{(3)}} du_h + \int_{\alpha^{(2)}}^{x^{(4)}} du_h + 2 \int_{\alpha^{(3)}}^{\mu} du_h \equiv \tfrac{1}{2} k_h ,$$

wo die k_h von den in (25) so bezeichneten Periodensystemen verschieden sind, wenn beide zu denselben oberen Grenzen gehören. In ihnen kann immer noch ein Punkt x beliebig angenommen werden;

die anderen drei sind dadurch nach den Gesetzen des erweiterten Umkehrproblems festgelegt; in der That stimmen dann die Gleichungen (26) mit den Gleichungen (20) überein, wenn man in letzteren die v_h passend wählt. Es gibt, wie schon erwähnt, 31 *Systeme eigentlicher Berührungskegelschnitte;* dazu tritt noch das zweifach unendliche System der doppelt zählenden Geraden, deren Schnittpunkte $x^{(i)}$ sich aus (26) für $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ ergeben. In der That bildet ja jede Gerade zusammen mit der Tangente von μ eine C_2, so dass nach dem Abel'schen Theoreme:

$$(27) \qquad \int_{\alpha^{(1)}}^{x^{(1)}} du_h + \int_{\alpha^{(2)}}^{x^{(2)}} du_h + \int_{\alpha^{(1)}}^{x^{(3)}} du_h + \int_{\alpha^{(2)}}^{x^{(4)}} du_h + 2\int_{\alpha^{(3)}}^{\mu} du_h = 0\,.$$

Soll nun ein solcher Berührungskegelschnitt, dessen Periodensysteme k_h durch die Zahlen m_1, m_2, q_1, q_2, g gegeben sind, in zwei Doppeltangenten zerfallen, welche bez. durch die Zahlen m_1', m_2', q_1', q_2', g' und m_1'', m_2'' q_1'', q_2'', g'' charakterisirt sind, so muss sein (mod. 2):

$$\begin{gathered} m_1 \equiv m_1' + m_1'', \quad m_2 \equiv m_2' + m_2'', \quad g \equiv g' + g'', \\ q_1 \equiv q_1' + q_1'', \quad q_2 \equiv q_2' + q_2'', \\ m_1'q_1' + m_2'q_2' - g' \equiv 1\,, \quad m_1''q_1'' + m_2''q_2'' - g'' \equiv 1\,. \end{gathered}$$

Man erkennt hieraus leicht, dass *jedes der 31 Systeme, mit Ausnahme des durch die Zahlen $q_1 = q_2 = m_1 = m_2 = 0$, $g = 1$ bestimmten 4 Paare von Doppeltangenten (also je 8 Doppeltangenten) enthält; und diese 30 Systeme werden weiter nach dem Werthe von g paarweise einander so zugeordnet, dass immer zwei alle 16 Doppeltangenten enthalten. Jede Doppeltangente kann somit, je nachdem sie mit den andern gruppirt wird, als 15 Systemen zugehörig betrachtet werden*, wie die folgende Tabelle veranschaulicht. Dieselbe ist durch die in der vorstehenden Tabelle eingeführte Bezeichnung der Doppeltangenten mittelst der Zahlen 1, 2, . . . 16 vereinfacht. Die römischen Ziffern beziehen sich auf die 15 Paare von je zwei Kegelschnittsystemen, welche den 15 Paaren von Werthsystemen m, q, g entsprechen, wobei sich letztere Zahlen in jedem Paare nur durch den Werth von g unterscheiden. Die unter einander stehenden Doppeltangenten bilden je ein Paar; den römischen Ziffern sind die Werthe der zugehörigen Zahlen m_1, q_1, m_2, q_2 in Klammern beigesetzt, während die zugehörigen Werthe von g links am Rande bemerkt sind. Man erhält die Tabelle:

	I. (0011)	II. (1101)	III. (1110)	IV. (1100)	V. (1001)
$g=1$	1 4 7 10	2 4 6 8	3 9 5 4	4 1 2 3	5 6 7 3
	11 12 14 16	11 14 15 16	11 15 16 13	11 12 14 13	11 12 14 16
$g=0$	2 5 6 13	3 5 7 12	1 6 8 12	5 6 7 15	1 2 4 13
	3 8 9 14	1 10 9 13	2 7 10 14	9 8 10 16	8 10 9 15

	VI. (0110)	VII. (1000)	VIII. (1010)	IX. (0101)	X. (0100)
$g=1$	6 5 2 10	7 5 1 8	8 9 2 7	9 8 10 3	10 9 1 6
	11 12 15 13	11 14 15 13	11 12 16 13	11 12 14 15	11 14 16 13
$g=0$	1 3 4 14	2 3 4 12	1 3 4 14	1 2 4 13	2 3 4 12
	9 7 8 16	9 6 10 16	5 10 6 15	6 7 5 16	5 8 7 15

	XI. (1111)	XII. (0010)	XIII. (0001)	XIV. (1011)	XV. (0111)
$g=1$	2 10 7 3	2 5 9 1	3 1 8 6	10 8 4 5	7 6 4 9
	13 15 16 14	12 15 16 14	12 13 15 16	12 14 16 13	12 14 15 13
$g=0$	1 5 8 11	3 6 7 11	2 5 9 11	1 2 3 11	1 2 3 11
	4 6 9 12	4 10 8 13	4 7 10 14	7 6 9 15	10 8 2 16

In jedem dieser 15 Kegelschnittsysteme ist aber ausser den vier Paaren eigentlicher Doppeltangenten ein Paar uneigentlicher Doppeltangenten enthalten (und zwar doppelt zählend), d. i. ein Paar der vom Doppelpunkte aus an die C_4 zu legenden Tangenten. Da nämlich jeder Kegelschnitt eines solchen Systems die C_4 zweipunktig trifft, wo er ihr auch begegnet, so muss die in ξ berührende C_2 nothwendig gleichzeitig in η berühren, denn jede Curve, die ξ enthält, geht auch durch η; und dies ist nur möglich, wenn die C_2 im Doppelpunkte selbst einen Doppelpunkt hat. Der Berührungspunkt y einer vom Doppelpunkte ausgehenden Tangente bestimmt sich nun bekanntlich aus den beiden Gleichungen ($\nu = 1, 2$):

$$(28) \qquad \int_{\beta^{(1)}}^{y} du_\nu + \int_{\beta^{(2)}}^{\mu} du_\nu \equiv \tfrac{1}{2}(2m_\nu' i\pi + q_1' a_{1\nu} + q_2' a_{2\nu}) = \tfrac{1}{2} k_\nu',$$

wenn $\beta^{(1)}, \beta^{(2)}$ die dem Punkte μ so zugeordneten Punkte sind, dass die Function $\Theta(\int_\mu^x du_1, \int_\mu^x du_2)$ für $x = \beta^{(1)}$ und $x = \beta^{(2)}$ verschwindet, und wenn zwischen den rechts stehenden Zahlen die Bedingung erfüllt ist, welche aussagt, dass die Function $\Theta(\int_{\beta^{(1)}}^{y} du_\nu + \int_{\beta^{(2)}}^{\mu} du_\nu)$ verschwindet, nämlich (vgl. p. 850):

$$(29) \qquad m_1' q_1' + m_2' q_2' \equiv 1 \quad (\text{mod. } 2).$$

Um jedoch die Gleichungen (28) im Zusammenhange mit den Gleichungen (21) und (26) zu untersuchen, ist es nöthig die unteren Grenzen in ihnen übereinstimmend zu wählen. Nun ist zunächst nach dem Abel'schen Theoreme ($\nu = 1, 2$):

$$(30) \qquad \int_{\beta^{(1)}}^{\alpha^{(1)}} du_\nu + \int_{\beta^{(2)}}^{\alpha^{(3)}} du_\nu + \tfrac{1}{2}\int_{\xi}^{\alpha^{(2)}} du_\nu + \tfrac{1}{2}\int_{\eta}^{\alpha^{(2)}} du_\nu = \tfrac{1}{2} R_\nu,$$

wenn R_1, R_2 Periodensysteme bedeuten. In Folge dessen gehen die Gleichungen (28) über in:

$$(31) \qquad \int_{\alpha^{(1)}}^{y} du_\nu + \int_{\alpha^{(3)}}^{\mu} du_\nu + \tfrac{1}{2}\int_{\alpha^{(2)}}^{\xi} du_\nu + \tfrac{1}{2}\int_{\alpha^{(2)}}^{\eta} du_\nu = \tfrac{1}{2}(k_\nu' - R_\nu).$$

Ist ferner k_ν'' ein anderes Periodensystem, dessen Zahlen der Bedingung (29) genügen und z der zugehörige Berührungspunkt, so besteht zwischen z und k_ν'' eine ganz analoge Gleichung, in der dasselbe Periodensystem R_ν vorkommt. Durch Addition beider ergibt sich:

$$(32) \quad \int_{\alpha^{(1)}}^{y} du_\nu + \int_{\alpha^{(1)}}^{z} du_\nu + \int_{\alpha^{(2)}}^{\xi} du_\nu + \int_{\alpha^{(2)}}^{\eta} du_\nu + 2\int_{\alpha^{(3)}}^{\mu} du_\nu = \tfrac{1}{2}(k_\nu' + k_\nu''),$$

eine Gleichung, welche aus (26) für $y = x^{(1)}$, $z = x^{(3)}$, $\xi = x^{(2)}$, $\eta = x^{(4)}$, $k_\nu' + k_\nu'' = k_\nu$ entsteht. Nun geschieht aber die Bestimmung der Punkte y, z allein durch das gewöhnliche Umkehrproblem, ist also völlig unabhängig von dem Integrale dritter Gattung u_3, folglich auch unabhängig von dem Werthe der Zahlen g', g'', g. Letztere können vielmehr beliebig gleich Null oder Eins gesetzt werden. In der That würde ja auch die entsprechende Summe von Integralen dritter Gattung einen unbestimmten Werth annehmen. Hieraus folgt, dass *jede der vom Doppelpunkte ausgehenden Tangenten als Doppeltangente zweifach zu zählen ist, dass je zwei der 30 Kegelschnittsysteme, welche zu einem Paare gehören (sich nur durch den Werth von g unterscheiden), dasselbe Paar solcher uneigentlichen Doppeltangenten enthalten, und dass letzteres in jedem der beiden Systeme als Berührungskegelschnitt doppelt zählt.**)

---

*) In der That müssen auch in jedem zu einer C_4 gehörenden Systeme von Berührungskegelschnitten *sechs* Paare zerfallender C_2 enthalten sein; denn die Gleichung eines solchen Systems ist, wenn $P = 0$, $R = 0$ zwei C_2 desselben sind, von der Form:

$$P + 2\lambda Q + \lambda^2 R = 0.$$

Es ist dann $PR - Q^2 = 0$ die Gleichung der C_4 und $Q = 0$ die einer C_2, welche durch die Berührungspunkte von $P = 0$, $R = 0$ mit der C_4 geht. Vgl. z. B. Salmon's Higher plane curves, n. 251.

Bezeichnen wir nun mit $(m_1 q_1 m_2 q_2)$ die zu der in y berührenden Tangente vermöge (28) und (29) gehörenden Zahlen, so haben wir die 6 Tangenten (Berührungscurven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung):

1'.	2'.	3'.	4'.	5'.	6'.
(0011)	(1101)	(1110)	(1100)	(1011)	(0111);

und dieselben vertheilen sich auf die 15 Paare von Kegelschnittsystemen nach dem Schema:

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
2'3'	1'3'	1'2'	5'6'	3'6'	2'5'	1'5'	2'6'

IX.	X.	XI.	XII.	XIII.	XIV.	XV.
3'5'	1'6'	1'4'	3'4'	2'4'	4'6'	4'5'

Das 31te System von Berührungskegelschnitten endlich enthält jede der sechs vom Doppelpunkte ausgehenden Tangenten als in eine Doppelgerade ausgeartete Curve, wie man sofort bestätigt; es enthält also dieselben uneigentlichen Doppeltangenten, wie das zu demselben Werthe von g gehörige 32te System, welches aus den doppelt zählenden Geraden der Ebene besteht.

Die uneigentlichen Doppeltangenten nun stehen wieder zu den 15 Systemen von adjungirten Berührungs-Kegelschnitten in besonderen Beziehungen; doch gehen wir darauf hier nicht mehr näher ein. Man wird ferner über die Lage der Berührungspunkte leicht ähnliche Sätze aufstellen, wie im Falle $p=3$. So liegen z. B. die acht Berührungspunkte je zweier Paare von Doppeltangenten desselben Systems auf einem Kegelschnitte, u. s. f. —

Nach diesen ausführlichen Erörterungen für den Fall $p=2$ hat man Gesichtspunkte, um das erweiterte Umkehrproblem im allgemeinen Falle zu behandeln. Die sich dann bietende Aufgabe kann man in folgender Form aussprechen:

Es seien p Summen von je $p+q$ gleichartigen Normalintegralen erster Gattung mit den oberen unbekannten Grenzpunkten $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(p+q)}$ und den unteren bekannten Grenzpunkten $c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots c^{(p+q)}$ gleich gegebenen Grössen $v_1, v_2, \ldots v_p$; ausserdem aber q Summen von je $p+q$ gleichartigen Normalintegralen dritter Gattung mit den nämlichen Grenzen gleich gegebenen Grössen $w_1, w_2, \ldots w_q$; und die Unendlichkeitspunkte der letzteren Integrale seien bez. $\xi^{(1)}, \eta^{(1)}; \xi^{(2)}, \eta^{(2)}; \ldots \xi^{(q)}, \eta^{(q)}$; d. h. es seien die folgenden $p+q$ Gleichungen gegeben:

$$(33)\qquad \sum_{i=1}^{i=p+q} \int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} du_1 = v_1, \; \ldots \; \sum_{i=1}^{i=p+q} \int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} du_p = v_p,$$

$$(34)\qquad \sum_{i=1}^{i=p+q} \int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} d\Pi_{\xi^{(1)}\eta^{(1)}} = w_1, \; \ldots \; \sum_{i=1}^{i=p+q} \int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} d\Pi_{\xi^{(q)}\eta^{(q)}} = w_q.$$

Die Aufgabe ist, die Coordinaten der oberen Grenzpunkte $x^{(i)}$ als Functionen der Grössen v, w darzustellen, oder als solche die Coëfficienten einer Gleichung

$$\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)^{p+q} + N_1 \left(\frac{\varphi}{\psi}\right)^{p+q-1} + N_2 \left(\frac{\varphi}{\psi}\right)^{p+q-2} + \ldots + N_{p+q} = 0$$

darzustellen, deren $p + q$ Wurzeln die den oberen Grenzen entsprechenden Werthe einer homogenen Function $\frac{\varphi}{\psi}$ sind, deren Zähler und Nenner gleich hohe Ordnung haben.

In dieser Form ist das Problem zunächst unabhängig davon, ob die Unendlichkeitspunkte $\xi^{(i)}$, $\eta^{(i)}$ paarweise in Doppelpunkten vereinigt liegen oder nicht. Für die geometrische Anwendung ist jedoch der erstere Fall von hervorragender Bedeutung, und auf ihn kann der andere durch eindeutige Transformation der Grundcurve zurückgeführt werden. Von besonderem Interesse ist wieder die Frage nach denjenigen Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch q Doppelpunkte der Grundcurve nicht hindurchgehen und dieselbe überall berühren, wo sie ihr begegnen, indem dann zwischen den Grössen $v_1, \ldots v_{p+q}$ des Umkehrproblems, d. i. zwischen den entsprechenden halben Periodensystemen, noch eine Relation erfüllt sein muss, wenn das Problem lösbar sein soll. Alle diese Fragen wird man in analoger Weise erledigen können, wie dies für $p = 2$ geschah. Besondere Betrachtungen sind indess immer anzustellen, wenn unter den q Doppelpunkten auch Rückkehrpunkte enthalten sind.

XII. Curven vom Geschlechte $p = 0$.

Bei unseren Untersuchungen über die Geometrie auf einer algebraischen Curve waren die Fälle $p = 0$, $p = 1$ zunächst ausgeschlossen, wenigstens bei allen Problemen, die sich auf adjungirte Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung bezogen; denn Schaaren solcher Curven gibt es eben nicht, wenn $p < 2$. Diese beiden Fälle sollen nun im Folgenden nach einander betrachtet werden; insbesondere wird uns die Parameterdarstellung der Grundcurve genauer beschäftigen, die wir dann auch für $p = 2$ und überhaupt für hyperelliptische Curven ausführen wollen.*)

Wir beginnen mit den Curven n^{ter} Ordnung vom Geschlechte $p = 0$, welche also $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppel- und Rückkehrpunkte**) besitzen. Wir wollen zunächst zeigen, dass *dieselben immer in eine*

*) Vgl. Cl. u. G. A. F. p. 67 ff.

**) Diese werden immer getrennt liegend angenommen. In Betreff höherer Singularitäten vgl. das auf p. 491 ff. und 678 Gesagte.

*gerade Linie eindeutig transformirt werden können.**) Die Doppelpunkte betrachten wir zusammen mit $2n-3$ anderen beliebig auf der Curve gewählten Punkten als Grundpunkte eines Büschels von Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Dieser Büschel ist dadurch vollständig bestimmt, denn durch die $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-1$ festen Punkte sind die Constanten einer Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung bis auf eine gegeben. Sei diese eine, willkürlich gebliebene, mit λ bezeichnet, so ist die Gleichung des Büschels von der Form

$$(1) \qquad \varphi + \lambda\psi = 0,$$

wo φ und ψ Functionen $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung sind, welche, gleich Null gesetzt, irgend zwei Curven des Büschels darstellen.

Verbinden wir die Gleichung (1) mit der Gleichung $f=0$ der gegebenen Curve und einer Gleichung $u_x=0$, so erhalten wir durch Elimination der x_i das Product der Gleichungen der $n(n-1)$ Schnittpunkte in Liniencoordinaten; und dieses ist vom Grade n in λ, vom Grade $n(n-1)$ in den u_i. Die $n(n-1)$ Schnittpunkte aber bestehen aus den $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ festen, je doppelt zählenden Doppel- und Rückkehrpunkten von f, aus den $2n-3$ willkürlich gewählten festen Punkten und aus

$$n(n-1)-(n-1)(n-2)-(2n-3)=1$$

beweglichen, d. h. von λ abhängenden, Schnittpunkten. Von dem Eliminationsresultate muss sich daher ein Factor vom Grade $[n(n-1)-1]$ in den u_i absondern lassen, welcher λ nicht enthält; und nach dessen Absonderung wird die Eliminationsgleichung von der Form:

$$f_1u_1+f_2u_2+f_3u_3=0,$$

wo die f_i Functionen n^{ten} Grades in λ sind. Dieses ist die Gleichung des beweglichen Schnittpunktes; seine Coordinaten verhalten sich also zu einander wie die f_i; und *man hat die Coordinaten x_i des beweglichen Schnittpunktes als rationale Functionen n^{ten} Grades eines Parameters λ dargestellt mit Hülfe der Gleichungen:*

$$(2) \qquad \varrho x_1 = f_1, \quad \varrho x_2 = f_2, \quad \varrho x_3 = f_3.$$

wobei ϱ ein willkürlicher Factor ist.

Setzen wir noch $\lambda = \frac{y_1}{y_2}$, so haben wir die x_i als homogene Functionen n^{ter} Ordnung von y_1, y_2 dargestellt. Sehen wir nun y_1, y_2, y_3 als Coordinaten eines Punktes der transformirten Curve an, so können

---

*) Das Folgende gilt jedoch nur für irreducible Curven; so stellt z. B. eine allgemeine C_3 zusammen mit einer Geraden eine C_4 vom Geschlechte Null dar; die Coordinaten ihrer Punkte können jedoch nicht rational durch einen Parameter ausgedrückt werden.

wir die x_i als Functionen der y_i betrachten, bei welchen $y_3 = 0$; es ist also letzteres die Gleichung der transformirten Curve, d. h. dieselbe ist eine Gerade, wie es sein sollte.

Wir können so jede Curve mit $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *Doppel- und Rückkehrpunkten in eine Gerade überführen mit Hülfe der Transformation* (2), *welche von der* n^{ten} *Ordnung und eindeutig umkehrbar ist.*

Dass umgekehrt jede Curve, für welche sich die Coordinaten ihrer Punkte rational durch einen Parameter darstellen lassen, vom Geschlechte $p = 0$ ist, ist evident; denn diese Darstellung ist eben nichts anderes als die eindeutige Transformation der Curve in eine Gerade*); und bei einer solchen bleibt das Geschlecht erhalten. Man kann sich aber weiter die Aufgabe stellen, wirklich die Gleichungen anzugeben, von denen die verschiedenen singulären Punkte abhängen, und so die Plücker'schen Zahlen direct bestimmen; damit wollen wir uns im Folgenden beschäftigen, um dann weiterhin noch zu sehen, wie sich das Abel'sche Theorem und überhaupt die Sätze über Schnittpunktsysteme hier gestalten.**)

Wenn wir nun eine Curve durch die Gleichungen (2) oder für $\lambda = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}$ durch die Gleichungen:

$$(3) \qquad \begin{cases} \varrho x_1 = f_1(\varkappa_1, \varkappa_2) = a_\varkappa^n \\ \varrho x_2 = f_2(\varkappa_1, \varkappa_2) = a'^n_\varkappa \\ \varrho x_3 = f_3(\varkappa_1, \varkappa_2) = a''^n_\varkappa \end{cases}$$

gegeben annehmen, so setzen wir dabei voraus, dass die Functionen f_i von einander unabhängig sind, vor Allem, *dass nicht* f_3 *in der Form* $kf_1 + lf_2$ *darstellbar ist.* — Zunächst bietet sich naturgemäss die Aufgabe, aus den Gleichungen (3) die Gleichung der Curve selbst in Punktcoordinaten herzuleiten. Letztere wird dabei von der Ordnung

---

*) Ist für eine Curve die rationale Parameterdarstellung gegeben, so braucht jedoch nicht immer jedem Punkte der Curve auch nur ein Werth des Parameters zu entsprechen. Man kann dann aber immer einen neuen Parameter einführen, so dass dies der Fall ist; vgl. darüber Lüroth: Math. Annalen, Bd. 9, p. 163.

**) Vgl. im Folgenden besonders: Clebsch, Ueber diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind, Crelle's Journal, Bd. 64. Einzelne Eigenschaften dieser Curven waren schon früher von Salmon in der ersten Auflage von dessen Treatise on the higher plane curves behandelt; vgl. auch den barycentrischen Calcul von Möbius. — Auf die Gestaltung der Sätze über specielle Punktsysteme (p. 702 ff. und p. 742 und 749) im Falle $p = 0$ gehen wir im Texte nicht ein. Dieselben erledigen sich hier wesentlich einfacher, da man (in Folge der Parameterdarstellung) nur in einem binären Gebiete, also auf einer Geraden, operirt; vgl. darüber Brill: Math. Annalen, Bd. 5, p. 395.

n, denn die Parameter der Schnittpunkte einer beliebigen Geraden u mit ihr sind die Wurzeln der Gleichung n^{ten} Grades:

$$u_1 a_\varkappa^n + u_2 a'^n_\varkappa + u_3 a''^n_\varkappa = 0. \tag{4}$$

Die gesuchte Curvengleichung*) erhält man durch Elimination von ϱ, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ aus den Gleichungen (3); es soll auch sogleich noch gezeigt werden, wie diese Elimination sich in den einfachsten Fällen, d. i. für $n = 2$ und $n = 3$, wirklich ausführen lässt. Aber auch für die Liniencoordinatengleichung der Grundcurve lässt sich allgemein ein Bildungsgesetz angeben. Soll nämlich eine Gerade u die Curve berühren, so müssen zwei Wurzeln $\varkappa_1 : \varkappa_2$ der Gleichung (4) einander gleich werden; d. h. *die Liniengleichung der Grundcurve ist durch das Verschwinden der Discriminante des in* (4) *links stehenden Ausdrucks gegeben.* Andererseits kann man die Coordinaten einer Tangente in ihrer Abhängigkeit von dem Parameter des Berührungspunktes einfach darstellen. Für einen zu x benachbarten Punkt $x + dx$ nämlich haben wir nach (3):

$$\sigma\, dx_1 = a_\varkappa^{n-1} a_{d\varkappa}, \quad \sigma\, dx_2 = a'^{n-1}_\varkappa a'_{d\varkappa}, \quad \sigma\, dx_3 = a''^{n-1}_\varkappa a''_{d\varkappa}.$$

Die Coordinaten der Verbindungslinie von x mit $x + dx$ sind daher:

$$\begin{aligned} u_3 = \varrho\sigma\,(x_1 dx_2 - x_2 dx_1) &= a_\varkappa^{n-1} a'^{n-1}_\varkappa (a_\varkappa a'_{d\varkappa} - a'_\varkappa a_{d\varkappa}) \\ &= (\varkappa\, d\varkappa)\,.\,(a a')\, a_\varkappa^{n-1} a'^{n-1}_\varkappa, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

oder, da der Factor $(\varkappa\, d\varkappa)$ in den drei Coordinaten gleichmässig vorkommt:

$$\left\{\begin{aligned} \tau u_1 &= (a' a'')\, a'^{n-1}_\varkappa a''^{n-1}_\varkappa = \vartheta_{23}, \\ \tau u_2 &= (a'' a)\, a''^{n-1}_\varkappa a_\varkappa^{n-1} = \vartheta_{31}, \\ \tau u_3 &= (a a')\, a_\varkappa^{n-1} a'^{n-1}_\varkappa = \vartheta_{12}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Diese Gleichungen stehen den Gleichungen (3) *dualistisch gegenüber; sie geben die Parameterdarstellung für die Tangenten der Grundcurve. — Man erhält daher auch bis auf einen Factor die Gleichung der letzteren in Punktcoordinaten, wenn man die Discriminante des Ausdrucks*

$$x_1 \vartheta_{23} + x_2 \vartheta_{31} + x_3 \vartheta_{12}$$

gleich Null setzt.

Da nun der Berührungspunkt einer Tangente immer auf der Tangente selbst liegt, so besteht die (auch leicht direct abzuleitende) Identität:

$$f_1 \vartheta_{23} + f_2 \vartheta_{31} + f_3 \vartheta_{12} = 0. \tag{6}$$

---

*) Das Resultat der Elimination gibt nichts anderes als die Relation, welche nach einer Bemerkung auf p. 222 zwischen je drei beliebigen binären Formen bestehen muss; die drei Formen sind im Texte nur von der gleichen Ordnung angenommen.

Für $n = 2$ würde man also unter Hinzunahme dieser Gleichung, wenn

$$\vartheta_\varkappa^2 = x_1 \vartheta_{23} + x_2 \vartheta_{31} + x_3 \vartheta_{12} = \vartheta_0 \varkappa_1^2 + 2\vartheta_1 \varkappa_1 \varkappa_2 + \vartheta_2 \varkappa_2^2$$

gesetzt wird, die Gleichung des Kegelschnittes durch Elimination von ϱ, $\varkappa_1^2$, $2\varkappa_1\varkappa_2$, $\varkappa_2^2$ aus (3) und (6) in der Form erhalten:

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_0 & a_1 & a_2 \\ x_2 & a_0' & a_1' & a_2' \\ x_3 & a_0'' & a_1'' & a_2'' \\ 0 & \vartheta_0 & \vartheta_1 & \vartheta_2 \end{vmatrix} = 0,$$

wo a_i, a_i', a_i'' die Coëfficienten der drei Formen f_1, f_2, f_3 bedeuten. Eleganter gestaltet sich diese Elimination, wenn man zuerst die Gleichung in Liniencoordinaten bildet. Letztere wird gegeben durch Verschwinden der Discriminante der Gleichung:

$$u_1 a_\varkappa^2 + u_2 a'^2_\varkappa + u_3 a''^2_\varkappa = 0,$$

also durch:

$$(7) \quad D_{11} u_1^2 + D_{22} u_2^2 + D_{33} u_3^2 + 2 D_{23} u_2 u_3 + 2 D_{31} u_3 u_1 + 2 D_{12} u_1 u_2 = 0,$$

wo die D_{ik} die aus je zwei Formen f_i zu bildenden Invarianten bezeichnen:

$$D_{11} = (ab)^2, \quad D_{12} = (aa')^2, \quad D_{13} = (aa'')^2, \text{ etc.}$$

Nach bekannten Sätzen der Kegelschnitttheorie *ist daher die Gleichung des durch die Gleichungen* (3) *für* $n = 2$ *dargestellten Kegelschnittes in* ***Punktcoordinaten, d. i. das Resultat der Elimination von*** ϱ, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ ***aus den Gleichungen*** (3)*):

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & x_1 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & x_2 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

---

*) Für $x_1 = f_1$, $x_2 = f_2$, $x_3 = f_3$ ist dies eine Identität, vgl. Clebsch: Theorie der binären algebraischen Formen, Leipzig 1872, p. 205. — Wegen (5) und (7) bestehen auch zwischen den f_i und ϑ_{ik} die drei Identitäten:

$$\varrho f_i = D_{i1} \vartheta_{23} + D_{i2} \vartheta_{31} + D_{i3} \vartheta_{12},$$

wo man für ϱ durch weitere Rechnung den Werth findet:

$$-R = -(aa')(a'a'')(a''a).$$

Hierin ist der geometrische Inhalt des von Clebsch a. a. O. p. 418 studirten Dualismus gegeben, welcher zwischen den drei quadratischen Formen und deren Functionaldeterminanten besteht. Auch das sogenannte Hesse'sche Uebertragungsprincip (vgl. Hesse: Crelle's Journal, Bd. 66) findet in den Gleichungen (3) für $n = 2$ seinen einfachsten algebraischen Ausdruck.

Für $n = 3$ haben wir zu beachten, dass durch jeden Punkt $\varkappa$ der Curve ausser seiner Tangente auch die Tangente des Punktes $\varkappa + d\varkappa$ hindurchgeht, d. h. dass neben (6) auch die Gleichung besteht:

$$f_1 d\vartheta_{23} + f_2 d\vartheta_{31} + f_3 d\vartheta_{12} = 0 .$$

Da aber immer $d\varkappa_2 = 0$, oder $d\varkappa_1 = 0$ genommen werden darf, so dürfen wir diese Gleichung und (6) ersetzen durch die beiden folgenden:

$$(9)\qquad \begin{aligned} f_1 \frac{\partial \vartheta_{23}}{\partial \varkappa_1} + f_2 \frac{\partial \vartheta_{31}}{\partial \varkappa_1} + f_3 \frac{\partial \vartheta_{12}}{\partial \varkappa_1} &= 0 \\ f_1 \frac{\partial \vartheta_{23}}{\partial \varkappa_2} + f_2 \frac{\partial \vartheta_{31}}{\partial \varkappa_2} + f_3 \frac{\partial \vartheta_{12}}{\partial \varkappa_2} &= 0 . \end{aligned}$$

Setzen wir also:

$$\vartheta_{23} x_1 + \vartheta_{31} x_2 + \vartheta_{12} x_3 = \vartheta_0 \varkappa_1^4 + 4\vartheta_1 \varkappa_1^3 \varkappa_2 + 6\vartheta_2 \varkappa_1^2 \varkappa_2^2 + 4\vartheta_3 \varkappa_1 \varkappa_2^3 + \vartheta_4 \varkappa_2^4 ,$$

so erhalten wir für $n = 3$ *die Gleichung der Curve* 3ter *Ordnung* durch Elimination der Grössen ϱ, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ aus (3) und (9) in der Gestalt*):

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & x_1 \\ a_0' & a_1' & a_2' & a_3' & x_2 \\ a_0'' & a_1'' & a_2'' & a_3'' & x_3 \\ \vartheta_0 & \vartheta_1 & \vartheta_2 & \vartheta_3 & 0 \\ \vartheta_1 & \vartheta_2 & \vartheta_3 & \vartheta_4 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Wir gehen dazu über, die Gleichungen aufzustellen, von denen die Bestimmung der Plücker'schen Zahlen für unsere Curve abhängt. Diese Gleichungen sind selbstverständlich unabhängig von der Lage des Coordinatensystems, auf welches sich die Parameterdarstellung (3) gründet. Sie dürfen sich daher nur um einen Factor (Potenz der Substitutionsdeterminante) ändern, wenn man statt der Formen f_i beliebige lineare Combinationen der f_i zu Grunde legt; und Analoges gilt überhaupt für Gleichungen, welche invariante Eigenschaften von Punktsystemen auf der Grundcurve oder solche Punktsysteme selbst bestimmen. *Die linken Seiten aller solchen Gleichungen sind daher Combinanten der drei binären Formen* f_1, f_2, f_3. Dass dieselben überhaupt *simultane Invarianten* der drei letzteren Formen sein müssen, ist evident, da die Parameterdarstellung von dem binären Coordinatensysteme $\varkappa_1 : \varkappa_2$ nicht wesentlich abhängt.

Um zunächst die $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelpunkte der Grundcurve zu bestimmen, gehen wir von der Bedingung aus, dass drei Punkte $\varkappa$, λ, μ auf einer Geraden liegen, welche hier in der Form erscheint:

---

*) Vgl. Rosenow: Die Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte, Breslau 1873, p. 48.

$$(11) \qquad R = \begin{vmatrix} f_1(\varkappa) & f_2(\varkappa) & f_3(\varkappa) \\ f_1(\lambda) & f_2(\lambda) & f_3(\lambda) \\ f_1(\mu) & f_2(\mu) & f_3(\mu) \end{vmatrix} = 0 .$$

Die links stehende Determinante verschwindet für $\varkappa = \lambda$ oder $\lambda = \mu$ oder $\mu = \varkappa$; sie muss daher durch $(\varkappa\lambda)$, $(\lambda\mu)$ und $(\mu\varkappa)$ theilbar sein, d. h. wir dürfen setzen:

$$R = (\varkappa\lambda)(\lambda\mu)(\mu\varkappa) \, . \, R' ,$$

wo nun R' symmetrisch von $\varkappa$, λ, μ abhängt und in jeder dieser Veränderlichen vom Grade $n-2$ ist. Symbolisch sei daher*):

$$R' = \alpha_\varkappa^{n-2} \beta_\lambda^{n-2} \gamma_\mu^{n-2} ,$$

so dass erst je $n-2$ Symbole α zusammen mit je $n-2$ Symbolen β und je $n-2$ Symbolen γ wirkliche Bedeutung haben. Sind die Punkte λ, μ gegeben, so findet man aus der Gleichung $R' = 0$ die $n-2$ weiteren Schnittpunkte μ der Verbindungslinie von $\varkappa$ und λ mit der Curve; und für $\varkappa = \lambda$ gibt die Gleichung $\alpha_\varkappa^{n-2} \beta_\varkappa^{n-2} \gamma_\mu^{n-2} = 0$ zu jedem gegebenen Punkte μ die Berührungspunkte der $2n-4$ von μ an die Curve zu ziehenden Tangenten.

Doppelpunkte der Curve nun sind diejenigen Punkte, für welche zwei Werthsysteme ($\varkappa_i$ und λ_i) des Parameters dieselben Werthe der Coordinaten ergeben, so dass:

$$(12) \qquad \sigma f_1(\varkappa) = f_1(\lambda), \quad \sigma f_2(\varkappa) = f_2(\lambda), \quad \sigma f_3(\varkappa) = f_3(\lambda) .$$

Hier wird die Verbindungslinie der (über einander liegenden) Punkte $\varkappa$ und λ unbestimmt; es besteht also *unabhängig von* μ_1, μ_2 die Gleichung: $\alpha_\varkappa^{n-2} \beta_\lambda^{n-2} \gamma_\mu^{n-2} = 0$, d. h. wir haben das System von $n-1$ Gleichungen:

$$(13) \quad \alpha_\varkappa^{n-2} \beta_\lambda^{n-2} \gamma_1^{n-2} = 0, \; \alpha_\varkappa^{n-2} \beta_\lambda^{n-2} \gamma_1^{n-3} \gamma_2 = 0, \; \ldots \; \alpha_\varkappa^{n-2} \beta_\lambda^{n-2} \gamma_2^{n-2} = 0 .$$

Aus ihnen können wir die $n-1$ Grössen λ_1^{n-2}, $\lambda_1^{n-3}\lambda_2$, $\ldots$ λ_2^{n-2} eliminiren; setzen wir also

$$\varrho_{i,k} = \alpha_\varkappa^{n-2} \beta_1^{n-k-2} \beta_2^k \gamma_1^{n-i-2} \gamma_2^i ,$$

so ist ein Doppelpunkt $\varkappa$ bestimmt durch die Gleichung**):

$$(14) \qquad \begin{vmatrix} \varrho_{0,0} & \varrho_{0,1} & \cdots & \varrho_{0,n-2} \\ \varrho_{1,0} & \varrho_{1,1} & \cdots & \varrho_{1,n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varrho_{n-2,0} & \varrho_{n-2,1} & \cdots & \varrho_{n-2,n-2} \end{vmatrix} = 0 .$$

*) Ueber die Bildung des Ausdrucks R' vgl. Gordan, Math. Annalen, Bd. 5, p. 118 ff. — Für die im Folgenden zur Bestimmung der Plücker'schen Zahlen angewandte Schlussweise vgl. auch eine Note von Weyr: Schlömilch's Zeitschrift, Bd. 16.

**) Ueber die Bildung dieser Gleichung vgl. auch Haase, Math. Annalen, Bd. 2, p. 525.

Dieselbe ist vom Grade $(n-1)(n-2)$ in $\varkappa$. Auf die nämliche Gleichung, geschrieben in λ, wird man auch geführt, wenn man aus (13) die Grössen $\varkappa_i$ eliminirt; je *zwei* Wurzeln von (14) geben daher denselben Doppelpunkt. *Es gibt also in der That* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *Doppelpunkte**), *und dieselben werden durch* (14) *bestimmt; letztere Gleichung aber kann auf eine Gleichung vom Grade* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *und auf* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *quadratische Gleichungen zurückgeführt werden.* Letzteres ergibt sich nach bekannten Sätzen daraus, dass man von je zwei zusammengehörigen Wurzeln die eine rational berechnen kann, wenn die andere gegeben ist.

Zur Bestimmung der Wendepunkte unserer Curve haben wir die Bedingung aufzustellen, dass drei benachbarte Punkte $\varkappa$, $\varkappa + d\varkappa$, $\varkappa + 2d\varkappa + d^2\varkappa$ auf einer Geraden liegen. Da wir nun immer $d\varkappa_2 = 0$ annehmen dürfen, so ist für einen Wendepunkt $\varkappa$:

$$\begin{vmatrix} a_\varkappa^n & a'^n_\varkappa & a''^n_\varkappa \\ a_\varkappa^{n-1} a_1 & a'^{n-1}_\varkappa a'_1 & a''^{n-1}_\varkappa a''_1 \\ a_\varkappa^{n-2} a_1^2 & a'^{n-2}_\varkappa a'^2_1 & a''^{n-2}_\varkappa a''^2_1 \end{vmatrix} = 0,$$

oder nach dem Satze von den homogenen Functionen:

$$\Delta = a_\varkappa^{n-2} a'^{n-2}_\varkappa a''^{n-2}_\varkappa \begin{vmatrix} a_2^2 & a'^2_2 & a''^2_2 \\ a_1 a_2 & a'_1 a'_2 & a''_1 a''_2 \\ a_1^2 & a'^2_1 & a''^2_1 \end{vmatrix}$$

$$(15) \qquad = (aa')(a'a'')(a''a)\, a_\varkappa^{n-2} a'^{n-2}_\varkappa a''^{n-2}_\varkappa = 0.$$

Die Zahl der Wendepunkte ist daher gleich $3(n-2)$.**)

Andererseits müssen sich die Wendepunkte aus der Gleichung $R' = 0$ für $\varkappa = \lambda = \mu$ ergeben. Wir können daher auch setzen:

$$(16) \qquad \Delta = \alpha_\varkappa^{n-2} \beta_\varkappa^{n-2} \gamma_\varkappa^{n-2}.$$

---

*) Die *Zahl* der Doppelpunkte ergibt sich auch einfach durch Betrachtung des übervollständigen Systems von Gleichungen:

$$\left\| \begin{matrix} f_1(\varkappa) & f_2(\varkappa) & f_3(\varkappa) \\ f_1(\lambda) & f_2(\lambda) & f_3(\lambda) \end{matrix} \right\| = 0,$$

welches mit den Gleichungen (12) äquivalent ist.

**) Die Wendepunkte werden also unbestimmt, wenn die Combinante Δ identisch Null ist; *dann geben aber die Gleichungen* (3) *überhaupt nicht die Parameterdarstellung einer Curve* n^{ter} *Ordnung.* Das Verschwinden von Δ nämlich sagt aus, dass die $(n-2)^{\text{ten}}$ Polaren eines beliebigen Punktes $\varkappa$ Punktepaare einer Involution sind (p. 520), d. h. dass unabhängig von $\varkappa$ und λ:

$$a_\varkappa^{n-2} a_\lambda^2 = \alpha \,.\, a'^{n-2}_\varkappa a'^2_\lambda + \beta \,.\, a''^{n-2}_\varkappa a''^2_\lambda.$$

Insbesondere folgt hieraus für $\varkappa = \lambda$: $f_1 = \alpha f_2 + \beta f_3$, so dass die Elimination von $\varkappa$ aus den Gleichungen (3) das Resultat gibt: $x_1 - \alpha x_2 - \beta x_3 = 0$; *die Curve besteht also aus einer* (*n-fach dargestellten*) *Geraden*: ein Fall, der schon auf p. 885 ausgeschlossen wurde.

Die Doppeltangenten findet man durch dualistische Uebertragung des bei Aufsuchung der Doppelpunkte angewandten Verfahrens, d. h. indem man die Formen f_1, f_2, f_3 bez. mit den Functionaldeterminanten ϑ_{23}, ϑ_{31}, ϑ_{12} vertauscht. Man erhält dadurch zunächst eine Gleichung vom Grade $(2n-3)(2n-4)$, entsprechend der Gleichung (14). Es ist aber zu bemerken, dass in letzterer Gleichung zwei zusammengehörige (d. i. denselben Doppelpunkt liefernde) Wurzeln einander gleich werden müssen, wenn einer der Doppelpunkte in einen Rückkehrpunkt ausarten soll. Da nun jede Wendetangente dualistisch entsprechend als Ausartung einer Doppeltangente aufzufassen ist, so wird die erwähnte Gleichung vom Grade $(2n-3)(2n-4)$ neben den Doppeltangenten auch je zweifach zählend die Wendetangenten liefern, d. h. von ihrer linken Seite wird sich der Factor Δ^2 absondern lassen. Weil ferner je zwei Wurzeln der übrig bleibenden Gleichung sich auf *dieselbe* Doppeltangente beziehen, *so ist die Zahl der Doppeltangenten gleich*

$$\tfrac{1}{2}\left\{(2n-3)(2n-4)-6(n-2)\right\}=2(n-2)(n-3).$$

Wenn man die der Form Δ dualistisch entsprechende Form Δ', welche vom Grade $3(2n-4)$ wird, aus den Functionaldeterminanten ϑ_{ik} bildet, so würde die Gleichung $\Delta'=0$ nach den vorstehenden Bemerkungen die Rückkehrpunkte von f liefern; solche sind aber auf der Grundcurve im Allgemeinen nicht vorhanden (d. h. wenn die f_i von einander unabhängig gewählt sind), während andererseits keine Wendepunkte auftreten würden, wenn die ϑ_{ik} von einander unabhängig gewählt werden. Die Rückkehrpunkte müssen daher sämmtlich durch die Wendetangenten absorbirt sein, d. h. *die Combinante Δ' muss zu dem Quadrate der Combinante Δ proportional werden.**)

Die Gleichung (14) muss, wie soeben bemerkt wurde, eine Doppelwurzel haben, wenn ein Doppelpunkt in einen Rückkehrpunkt übergehen soll. Wenn aber andererseits die Discriminante von (14) verschwindet, so hat man zwei verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nachdem zwei zusammengehörige Wurzeln jener Gleichung einander gleich werden, oder zwei nicht zusammengehörige. Im letzteren Falle tritt kein Rückkehrpunkt ein, sondern es erscheinen zwei unendlich nahe Doppelpunkte, wobei dann freilich auch die beiden Tangenten eines jeden von ihnen in eine zusammenfallen. Dieses Vorkommen führt keine weitere Reduction der *Klasse* mit sich, als diesen zwei

*) Und zwar hat man nach Gleichung (19) p. 207 in Clebsch's Theorie der binären Formen: $\Delta'=\frac{1}{2}\Delta^2$; die daselbst für $n=2$ ausgeführten Rechnungen sind nämlich allgemein gültig, wenn man nur alle Gleichungen mit symbolischen Factoren des Typus $a_x^{n-2}a'^{n-2}_x a''^{n-2}_x$ multiplicirt; in Gleichung (19) daselbst hat man dann noch die Indices 3, 4, 5, 6 bez. durch 2, 3, 3, 1 zu ersetzen.

Doppelpunkten überhaupt zukommt; eine solche Reduction tritt jedoch im zweiten Falle ein, indem man einen wirklichen Rückkehrpunkt erhält. In den Gleichungen (12) hat man dann nämlich $\lambda_1 = \varkappa_1 + \varepsilon$, $\lambda_2 = \varkappa_2$ zu setzen, so dass z. B. die erste dieser Gleichungen übergeht in:

$$(17) \qquad (\sigma - 1)\, a_\varkappa^n = n\varepsilon \,.\, a_\varkappa^{n-1} a_1$$

und für $\lambda_2 = \varkappa_2 + \eta$, $\lambda_1 = \varkappa_1$:

$$(18) \qquad (\sigma - 1)\, a_\varkappa^n = n\eta \,.\, a_\varkappa^{n-1} a_2 \,.$$

Aus beiden Gleichungen folgt aber, wenn man für f_2 und f_3 eine analoge Ueberlegung anstellt:

$$(19) \qquad \begin{aligned} \zeta a_\varkappa^{n-1} a_1 &= a_\varkappa^{n-1} a_2 \quad (\equiv \alpha_1)\,, \\ \zeta a'^{n-1}_\varkappa a'_1 &= a'^{n-1}_\varkappa a'_2 \quad (\equiv \alpha_2)\,, \\ \zeta a''^{n-1}_\varkappa a''_1 &= a''^{n-1}_\varkappa a''_2 \quad (\equiv \alpha_3)\,. \end{aligned}$$

Nun wurde die Liniencoordinatengleichung der Grundcurve durch das Verschwinden der Discriminante von (4) gegeben, d. h. durch Elimination von $\varkappa$ aus den beiden Gleichungen:

$$(20) \qquad \begin{aligned} u_1 a_\varkappa^{n-1} a_1 + u_2 a'^{n-1}_\varkappa a'_1 + u_3 a''^{n-1}_\varkappa a''_1 &= 0 \\ u_1 a_\varkappa^{n-1} a_2 + u_2 a'^{n-1}_\varkappa a'_2 + u_3 a''^{n-1}_\varkappa a''_2 &= 0 \end{aligned}$$

gewonnen. Von letzteren aber wird wegen (19) eine die Folge der andern; und die Discriminante muss dann nothwendig den Factor $u_1 \alpha_1 + u_2 \alpha_2 + u_3 \alpha_3$ enthalten, durch dessen Verschwinden beide Gleichungen (20) befriedigt werden, wobei nach (3) die Grössen α_i die Coordinaten des betreffenden Rückkehrpunktes sind. *Ist also $\varkappa$ die Anzahl von Rückkehrpunkten, so ist die Klasse der Grundcurve gleich* $2(n - 1) - \varkappa$. In ähnlicher Weise bestimmt man leicht den Einfluss eines Rückkehrpunktes auf die übrigen Plücker'schen Zahlen.*) —.

Betrachten wir nun *die Schnittpunkte der Grundcurve mit einer anderen Curve*, so werden wir wieder auf das Abel'sche Theorem geführt; da aber die Grundcurve vermöge der Gleichungen (3) auf eine Gerade abgebildet ist, enthalten die betreffenden Integrale jetzt keine Irrationalität mehr und können daher einzeln wirklich ausgewerthet werden. Des Näheren gestalten sich diese Verhältnisse in folgender Weise.

Wir setzen der Kürze wegen $\varkappa_1 = \lambda$ und $\varkappa_2 = 1$; sodann bezeichnen wir durch $a^{(1)}, b^{(1)}; a^{(2)}, b^{(2)}; a^{(3)}, b^{(3)}; \ldots a^{(\nu)}, b^{(\nu)}$, wo $\nu = \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$, die bez. den verschiedenen Doppelpunkten entsprechenden Werthepaare von λ. Die Durchschnitte der gegebenen Curve mit einer Curve m^{ter} Ordnung

$$(21) \qquad \varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$$

*) Vgl. Clebsch in Crelle's Journal a. a. O.

werden gefunden, indem man in dieser Gleichung für die x_i ihre Werthe (3) einsetzt. Man erhält dann eine Gleichung in λ von der Form:

$$(22)\ \Omega(\lambda) \quad c(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\dots(\lambda-\lambda_{nm}) \equiv \varphi(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

wo die Parameterwerthe $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_{nm}$ den mn Schnittpunkten entsprechen. Setzen wir nun in (22) λ einmal gleich $a^{(i)}$, das andere Mal gleich $b^{(i)}$, so bleiben dabei die x bis auf einen gemeinschaftlichen Factor $c^{(i)}$, also auch φ und Ω bis auf den Factor $(c^{(i)})^m$, ungeändert; und man erhält: $\Omega(a^{(i)}) = (c^{(i)})^m \Omega(b^{(i)})$, oder:

$$(23) \qquad \frac{(a^{(i)}-\lambda_1)(a^{(i)}-\lambda_2)\dots(a^{(i)}-\lambda_{nm})}{(b^{(i)}-\lambda_1)(b^{(i)}-\lambda_2)\dots(b^{(i)}-\lambda_{nm})} = (c^{(i)})^m$$

$$\text{für} \quad i = 1, 2, 3 \dots \nu, \quad \text{wo} \quad \nu = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

Diese ν Gleichungen sind für die Theorie der vorliegenden Curven von der höchsten Wichtigkeit. Sie treten hier an Stelle des Systems von $\nu + p$ Gleichungen, welche für den allgemeinen Fall aus dem Abel'schen Theoreme hervorgehen, und welche für eine Curve vom Geschlechte p mit ν Doppelpunkten aussagen, dass mn Punkte der Curve auf einer nicht durch die Doppelpunkte gehenden Curve m^{ter} Ordnung liegen (p. 882). Weil es nämlich für $p = 0$ keine Integrale erster Gattung gibt, so bleiben hier nur die ν Gleichungen für Integrale dritter Gattung; diese Integrale sind einzeln bez. gleich $\log \frac{a^{(i)}-\lambda}{b^{(i)}-\lambda}$ für $i = 1, 2, \dots \nu$; und in (23) treten eben die Summen solcher logarithmischen Integrale auf.*)

Wenn also mn Punkte $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_{mn}$ der durch (3) *dargestellten Curve auf einer Curve m^{ter} Ordnung liegen sollen, so ist es nothwendig und hinreichend, dass ihre Parameter den Gleichungen* (23) *genügen.*

Die letzteren erleiden eine leichte Modification, wenn einer der Doppelpunkte (z. B. $a^{(i)}, b^{(i)}$) in einen Rückkehrpunkt übergeht. Man hat dann $a^{(i)} = \alpha^{(i)}$, $b^{(i)} = \alpha^{(i)} + \varepsilon$, $c^{(i)} = 1 - \varkappa^{(i)}\varepsilon$, wo ε unendlich klein ist, und also:

$$\frac{a^{(i)}-\lambda}{b^{(i)}-\lambda} = 1 - \frac{\varepsilon}{\alpha^{(i)}-\lambda} \dots$$

Die Gleichung (23) geht daher über in folgende (vgl. für $n = 3$ p. 592):

$$(24) \qquad \frac{1}{\alpha^{(i)}-\lambda_1} + \frac{1}{\alpha^{(i)}-\lambda_2} + \dots + \frac{1}{\alpha^{(i)}-\lambda_{nm}} = m\varkappa^{(i)}.$$

Die Integralsummen dritter und zweiter Gattung, welche, gleich Null gesetzt, bez. die Stelle der Gleichungen (23) und (24) vertreten,

*) Vgl. für $n = 3$ p. 586 und p. 592.

wie soeben erwähnt wurde, findet man, indem man erstere Gleichung logarithmisch, letztere gewöhnlich differentiirt, und dann von $\varrho^{(i)}$ bis λ bez. von $\sigma^{(i)}$ bis λ integrirt. Man erhält so statt (23) und (24) die Gleichungen (für $\mu = mn$):

$$(25)\begin{cases} \int\limits_{\varrho^{(i)}}^{\lambda_1} \frac{(a^{(i)} - b^{(i)})\,d\lambda}{(a^{(i)} - \lambda)(b^{(i)} - \lambda)} + \int\limits_{\varrho^{(i)}}^{\lambda_2} \frac{(a^{(i)} - b^{(i)})\,d\lambda}{(a^{(i)} - \lambda)(b^{(i)} - \lambda)} + \cdots + \int\limits_{\varrho^{(i)}}^{\lambda_\mu} \frac{(a^{(i)} - b^{(i)})\,d\lambda}{(a^{(i)} - \lambda)(b^{(i)} - \lambda)} = 0, \\ \int\limits_{\sigma^{(i)}}^{\lambda_1} \frac{d\lambda}{(\alpha^{(i)} - \lambda)^2} + \int\limits_{\sigma^{(i)}}^{\lambda_2} \frac{d\lambda}{(\alpha^{(i)} - \lambda)^2} + \cdots + \int\limits_{\sigma^{(i)}}^{\lambda_\mu} \frac{d\lambda}{(\alpha^{(i)} - \lambda)^2} = 0; \end{cases}$$

und die unteren Grenzen ϱ, σ bestimmen sich aus der Vergleichung mit (23), (24) durch die Gleichungen:

$$(26)\qquad \frac{a^{(i)} - \varrho^{(i)}}{b^{(i)} - \varrho^{(i)}} = (c^{(i)})^{\frac{1}{n}}, \quad \frac{1}{a^{(i)} - \sigma^{(i)}} = \frac{\varkappa^{(i)}}{n}.$$

Durch Veränderung des Integrationsweges kann man auf der rechten Seite der ersten dieser Gleichungen 0 in $2h\pi\sqrt{-1}$ verwandeln, so dass diese Integralsummen die Periode $2i\pi$ zulassen; die Integrale der zweiten Gleichung dagegen haben immer die Periode Null, da sie nur paarweise zusammenfallende Unendlichkeitspunkte besitzen. Dies kommt damit überein, dass man in (23) rechts $(c^{(i)})^m e^{2hi\pi}$ für $(c^{(i)})^m$ setzen kann, während $m\varkappa^{(i)}$ auf der rechten Seite von (24) sich durch nichts anderes ersetzen lässt. Man kann sonach folgenden Satz aussprechen:

Für eine Curve n^{ter} Ordnung mit $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppel- bez. Rückkehrpunkten, ist, wenn (für $\varkappa_1 = \lambda$, $\varkappa_2 = 1$) $a^{(i)}$, $b^{(i)}$ die Parameter eines Doppelpunktes sind, immer die Summe gleichartiger Integrale $(a^{(i)} - b^{(i)})\int\limits_{\varrho}^{\lambda} \frac{d\lambda}{(a^{(i)} - \lambda)(b^{(i)} - \lambda)}$ gleich $2h\pi\sqrt{-1}$, hingegen, wenn $\alpha^{(i)}$ der Parameter eines Rückkehrpunktes ist, die Summe der Integrale $\int\limits_{\sigma}^{\lambda} \frac{d\lambda}{(\alpha^{(i)} - \lambda)^2}$ gleich Null; wo die Summen auf alle Parameter erstreckt werden, welche den Schnittpunkten der Grundcurve mit einer anderen algebraischen Curve entsprechen.

Hieraus geht sofort hervor, dass alle *Aufgaben über Berührungscurven*, welche im allgemeinen Falle mit Hülfe des sogenannten *erweiterten Umkehrproblems* der Abel'schen Integrale und der Theilungsprobleme für die dabei auftretenden Transscendenten gelöst werden (p. 866 ff.), bei den hier vorliegenden Curven auf die *Kreistheilung* zurückkommen und auf die Auflösung einer Gleichung q^{ten} Grades,

wenn die Berührungscurve durch q von den ν Doppelpunkten nicht hindurchgehen soll. In der That lässt sich dies aus den Gleichungen (23), (24) direct nachweisen. In allen jenen Aufgaben sind nämlich $k = nm - \mu q$ Schnittpunkte gegeben (von denen $2(\nu - q)$ in Doppelpunkten liegen), während von den übrigen q-mal μ zusammenfallen sollen. Bezeichnen wir die den ersteren entsprechenden (gegebenen) Parameter durch $l_1, l_2, \ldots l_k$, die der gesuchten Punkte durch $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_q$, so gehen die Gleichungen (25), von denen hier nur noch q in Betracht kommen, über in:

$$(27) \quad \begin{cases} \prod_{r=1}^{r=q} \frac{a^{(i)} - \lambda_r}{b^{(i)} - \lambda_r} = e^{\frac{2h^{(i)}\pi\sqrt{-1}}{\mu}} \sqrt[\mu]{(c^{(i)})^m \prod_{r=1}^{r=k} \frac{b^{(i)} - l_r}{a^{(i)} - l_r}} \\ \sum_{r=1}^{r=q} \frac{1}{\alpha^{(i)} - \lambda_r} = \frac{1}{\mu} \left\{ m\varkappa^{(i)} - \sum_{r=1}^{r=k} \frac{1}{\alpha^{(i)} - l_r} \right\}. \end{cases}$$

Diese q Gleichungen genügen völlig, um die symmetrischen Functionen der λ_r durch bekannte Grössen auszudrücken, und so eine Gleichung q^{ten} Grades für λ anzusetzen. Man bemerkt zugleich, dass der Einfluss eines Rückkehrpunktes darin besteht, eine der ν Perioden $2i\pi$ zu entfernen (indem dieselbe unendlich gross werden würde). Wenn, wie dies bei den Curven vierter Ordnung noch geschehen kann, sämmtliche Doppelpunkte in Rückkehrpunkte übergehen, so hört die Benutzung der Kreistheilungs-Gleichungen überhaupt auf. Es haben dann die betreffenden Aufgaben nur je eine Lösung.

Wie die Bestimmung der Berührungscurven und der Systeme von solchen in einzelnen Fällen zu geschehen hat, braucht nach den früheren allgemeinen Erörterungen wohl kaum noch wieder besprochen zu werden. Insbesondere ist für $m \geqq n - 2$ und $q = \nu = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ hier immer die Aufgabe lösbar, *durch $mn - \nu r$ Punkte der Curve n^{ter} Ordnung eine Curve m^{ter} Ordnung zu legen, welche die erstere in ν Punkten je $(r-1)$-punktig berührt;* und die Gesammtzahl der Lösungen findet man, wenn keine Rückkehrpunkte vorhanden sind, gleich r^ν. Ausgezeichnet sind jedoch, wie bei den Curven von allgemeinem Geschlechte, (nach unseren Fundamentalsätzen über Schnittpunktsysteme) die Fälle, wo $m \leqq n - 3$. Z. B. für $m = n - 3$ sind $\frac{1}{2}n(n-3)$ Schnittpunkte einer nicht durch die Doppelpunkte gehenden C_{n-3} durch die übrigen $\frac{1}{2}n(n-3)$ bestimmt; man kann daher nur noch die Forderung stellen, *eine C_{n-3} so zu legen, dass sie die C_n überall, wo sie derselben begegnet, also in $\frac{1}{2}n(n-3)$ Punkten, berührt.*

Diese Aufgabe führt zur Aufstellung einer Relation zwischen ν Grössen $v^{(i)}$, welche bestehen muss, wenn dieselben gleich Summen von

je $\nu - 1$ Integralen dritter Gattung der obigen Form sollen gesetzt werden dürfen. Wir wollen sie für $n = 4$ noch behandeln, wo sie uns die Bestimmung der *Doppeltangenten einer C_4 mit drei Doppelpunkten* gibt.*) Zuvor sei bemerkt, dass man die in (23) auftretenden Grössen $c^{(i)}$ leicht durch die $a^{(i)}$ und $b^{(i)}$ ausdrücken kann, was für das Folgende nützlich ist. Sondert man nämlich den Doppelpunkt $a^{(i)}$, $b^{(i)}$ von den übrigen $\frac{1}{2} n (n - 3)$ Doppelpunkten ab, so bilden diese übrigen (je doppelt zählend) den vollständigen Durchschnitt der C_n mit einer C_{n-3}, welche durch dieselben gerade bestimmt ist. Stellt man nun für die Schnittpunkte dieser C_{n-3} die Gleichungen (23) auf, so bleibt nur die eine Gleichung bestehen, welche sich auf den Doppelpunkt $a^{(i)}$, $b^{(i)}$ bezieht, durch den die C_{n-3} nicht hindurchgeht; und in dieser Gleichung hat man den $n (n - 3)$ Grössen λ die $n (n - 3)$ Werthe a, b beizulegen, welche den Index i nicht haben; setzt man also der Kürze wegen:

$$(\varkappa - a^{(1)}) (\varkappa - a^{(2)}) \dots (\varkappa - a^{(\nu)}) = \varphi (\varkappa),$$

$$(\varkappa - b^{(1)}) (\varkappa - b^{(2)}) \dots (\varkappa - b^{(\nu)}) = \psi (\varkappa),$$

so besteht die Gleichung:

$$(28) \qquad (c^{(i)})^{n-3} = - \frac{\varphi' (a^{(i)}) \, . \, \psi (a^{(i)})}{\varphi (b^{(i)}) \, . \, \psi' (b^{(i)})} .$$

Die zuletzt erwähnte Aufgabe gibt nun nach (23) zwischen den $\nu - 1$ Grössen λ die ν Gleichungen:

$$(29) \qquad \frac{(a^{(i)} - \lambda_1) (a^{(i)} - \lambda_2) \dots (a^{(i)} - \lambda_{\nu-1})}{(b^{(i)} - \lambda_1) (b^{(i)} - \lambda_2) \dots (b^{(i)} - \lambda_{\nu-1})} = (c^{(i)})^{\frac{1}{2}(n-3)} e^{h^{(i)} \pi \sqrt{-1}} .$$

Zwischen den Zahlen $h^{(i)}$ muss daher, wie erwähnt, noch eine Relation bestehen; um letztere zu finden, gehen wir zunächst von dem allgemeineren Gleichungssysteme aus:

$$(30) \qquad \frac{(a^{(i)} - \lambda_1) \dots (a^{(i)} - \lambda_{\nu-1})}{(b^{(i)} - \lambda_1) \dots (b^{(i)} - \lambda_{\nu-1})} = e^{v^{(i)}} (c^{(i)})^{\frac{n-3}{2}} = \zeta^{(i)}$$

und fragen nach der zwischen den $v^{(i)}$ nothwendig bestehenden Relation.**) Diese ergibt sich direct durch Elimination der $\nu - 1$ symmetrischen Functionen der λ_i aus den ν Gleichungen (30) in der Form:

$$(31) \qquad \begin{vmatrix} a^{(1)^{\nu-1}} - \zeta^{(1)} b^{(1)^{\nu-1}}, & a^{(1)^{\nu-2}} - \zeta^{(1)} b^{(1)^{\nu-2}}, & \dots & 1 - \zeta^{(1)} \\ a^{(2)^{\nu-1}} - \zeta^{(2)} b^{(2)^{\nu-1}}, & a^{(2)^{\nu-2}} - \zeta^{(2)} b^{(2)^{\nu-2}}, & \dots & 1 - \zeta^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{(\nu)^{\nu-1}} - \zeta^{(\nu)} b^{(\nu)^{\nu-1}}, & a^{(\nu)^{\nu-2}} - \zeta^{(\nu)} b^{(\nu)^{\nu-2}}, & \dots & 1 - \zeta^{(\nu)} \end{vmatrix} = 0 .$$

---

*) Vgl. das entsprechende Problem für $n = 4$ und $p = 2$ auf p. 876.

**) Man würde dieselbe natürlich auch aus der allgemeinen Behandlung des erweiterten Umkehrproblems ableiten können, wie dieselbe oben angedeutet und bei Cl. u. G. A. F. p. 270 ausgeführt ist.

Ordnet man die links stehende Determinante nach den $\xi^{(i)}$ und ersetzt letztere Grössen durch die in (30) gegebenen Werthe, so resultirt eine Gleichung in den e^{v}, welche jede dieser Grössen nur auf lineare Weise enthält.

Für $n = 4$, d. i. $\nu = 3$, erhalten wir also insbesondere eine Gleichung der Form*):

$$(32) \quad A + B_1 e^{v^{(1)}} + B_2 e^{v^{(2)}} + B_3 e^{v^{(3)}} + B_{12} e^{v^{(1)}+v^{(2)}} + B_{23} e^{v^{(2)}+v^{(3)}} + B_{31} e^{v^{(3)}+v^{(1)}} + C e^{v^{(1)}+v^{(2)}+v^{(3)}} = 0,$$

in welcher die Coëfficienten A, B, C noch näher zu bestimmen sind. Nun ist zunächst:

$$A = \begin{vmatrix} a^{(1)2} & a^{(1)} & 1 \\ a^{(2)2} & a^{(2)} & 1 \\ a^{(3)2} & a^{(3)} & 1 \end{vmatrix} = (a^{(1)} - a^{(2)})(a^{(1)} - a^{(3)})(a^{(2)} - a^{(3)}),$$

und ebenso:

$$C = -(b^{(1)} - b^{(2)})(b^{(1)} - b^{(3)})(b^{(2)} - b^{(3)}) \cdot (c^{(1)}c^{(2)}c^{(3)})^{\frac{1}{2}}.$$

Andererseits folgt aus (28):

$$(33) \qquad c^{(1)}c^{(2)}c^{(3)} = \left\{\frac{(a^{(1)} - a^{(2)})(a^{(1)} - a^{(3)})(a^{(2)} - a^{(3)})}{(b^{(1)} - b^{(2)})(b^{(1)} - b^{(3)})(b^{(2)} - b^{(3)})}\right\}^2,$$

und somit wird:

$$(34) \qquad C = -A.$$

Für B_1 dagegen findet man unter Benutzung von (28):

$$B_1 = -(b^{(1)} - a^{(2)})(b^{(1)} - a^{(3)})(a^{(2)} - a^{(3)})(c^{(1)})^{\frac{1}{2}}$$
$$= -\left\{\frac{(b^{(1)} - a^{(2)})(b^{(1)} - a^{(3)})(a^{(1)} - a^{(2)})(a^{(1)} - a^{(3)})(a^{(1)} - b^{(2)})(a^{(1)} - b^{(3)})}{(b^{(1)} - b^{(2)})(b^{(1)} - b^{(3)})}\right\}^{\frac{1}{2}}(a^{(2)} - a^{(3)}).$$

Der hier rechts stehende Werth ergibt sich aber bis auf das Vorzeichen auch für B_{23}, d. i. für

$$B_{23} = (a^{(1)} - b^{(2)})(a^{(1)} - b^{(3)})(b^{(2)} - b^{(3)})(c^{(2)}c^{(3)})^{\frac{1}{2}},$$

wenn man darin $c^{(2)}$ und $c^{(3)}$ nach (28) durch a, b ausdrückt. Es folgt also, da Analoges für B_2 und B_3 gilt:

$$(35) \qquad B_{23} = -B_1, \quad B_{31} = -B_2, \quad B_{12} = -B_3;$$

und die Gleichung (32) geht wegen (34) und (35) über in:

$$(36) \qquad A(1 - e^S) + \sum_i B_i (e^{v^{(i)}} - e^{S - v^{(i)}}) = 0,$$

wenn $S = v^{(1)} + v^{(2)} + v^{(3)}$ gesetzt wird. *Diese Bedingung muss für $n = 4$, $\nu = 3$ erfüllt sein, wenn die Gleichungen* (30) *zusammen bestehen sollen.*

---

*) Vgl. die allgemeine Behandlung der Aufgabe bei Clebsch a. a. O.

Nehmen wir nun, wie in (29), $v^{(i)} = h^{(i)}\pi\sqrt{-1}$, so werden alle Grössen e^v gleich ± 1, und die Gleichung (36) geht einfach über in: $c^S = 1$, oder:

$$h^{(1)} + h^{(2)} + h^{(3)} \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2). \tag{37}$$

Die vier Doppeltangenten unserer C_4 bestimmen sich also aus den Gleichungen (29) für $n = 4$, $\nu = 3$, wenn man bez. setzt:

$$\begin{aligned} h^{(1)} &= 0, & h^{(2)} &= 0, & h^{(3)} &= 0; \\ h^{(1)} &= 0, & h^{(2)} &= 1, & h^{(3)} &= 1; \\ h^{(1)} &= 1, & h^{(2)} &= 1, & h^{(3)} &= 0; \\ h^{(1)} &= 1, & h^{(2)} &= 0, & h^{(3)} &= 1. \end{aligned}$$

Von Interesse ist hier, wie im Falle $n = 4$ und $p = 1$, die Vertheilung der Doppeltangenten auf die verschiedenen Systeme von Berührungskegelschnitten. Letztere bestimmen sich aus den drei Gleichungen:

$$\frac{(a^{(i)} - \lambda_1)(a^{(i)} - \lambda_2)(a^{(i)} - \lambda_3)(a^{(i)} - \lambda_4)}{(b^{(i)} - \lambda_1)(b^{(i)} - \lambda_2)(b^{(i)} - \lambda_3)(b^{(i)} - \lambda_4)} = c^{(i)} e^{g^{(i)} i\pi},$$

worin λ_4 noch willkürlich gewählt werden kann. *Es gibt daher* 7 *Systeme von je einfach unendlich vielen Kegelschnitten, welche die* C_4 *in vier Punkten berühren;* und es gilt (wie immer) der Satz, dass die Berührungspunkte je zweier Kegelschnitte desselben Systems auf einem Kegelschnitte liegen. Bezeichnen wir mit $(g^{(1)}, g^{(2)}, g^{(3)})$ das durch die drei Zahlen g besimmte System, so sind jene sieben Systeme:

(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1);

denn das System (0, 0, 0) besteht aus der Gesammtheit der je doppelt zählenden Geraden der Ebene. Man erkennt hieraus, dass *drei dieser Systeme je zwei Paare von Doppeltangenten enthalten*, nämlich

(0, 1, 1) die Paare {(0, 0, 0), (0, 1, 1)} und {(1, 1, 0), (1, 0, 1)},
(1, 0, 1) „ „ {(0, 0, 0), (1, 0, 1)} „ {(1, 1, 0), (0, 1, 1)},
(1, 1, 0) „ „ {(0, 0, 0), (1, 1, 0)} „ {(1, 0, 1), (0, 1, 1)},

Die vier übrigen Systeme enthalten keine eigentlichen Doppeltangenten. Unter ihnen ist noch das System (1, 1, 1) ausgezeichnet, insofern dasselbe *drei* Paare *uneigentlicher* Doppeltangenten enthält, nämlich die drei Paare von Tangenten, welche man bez. von den drei Doppelpunkten aus an die C_4 legen kann. Man überzeugt sich davon leicht, wenn man beachtet, dass sich z. B. die von dem Doppelpunkte $a^{(1)}, b^{(1)}$ ausgehenden Tangenten aus den Gleichungen bestimmen ($k = 2, 3$):

$$\frac{a^{(k)} - \lambda_1}{b^{(k)} - \lambda_1} = \left(c^{(k)}\right)^{\frac{1}{2}} e^{h^{(k)}\pi i} \left\{\frac{(b^{(k)} - b^{(1)})(b^{(k)} - a^{(1)})}{(a^{(k)} - b^{(1)})(a^{(k)} - a^{(1)})}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

und dass hier wieder $h^{(2)} + h^{(3)} \equiv 0$ (mod. 2) sein muss.*)

---

*) Die 6 anderen Systeme enthalten auch Paare uneigentlicher Doppeltangenten in anderer Gruppirung, denn in jedem Systeme müssen 6 Paare zerfallender Kegelschnitte vorkommen; vgl. die Anmerkung auf p. 881.

Diese Resultate erleiden Modificationen, wenn einige der Doppelpunkte in Rückkehrpunkte ausarten, wie man nach dem Obigen leicht näher verfolgt. Tritt *ein Rückkehrpunkt* auf, so hat man noch zwei Doppeltangenten, und es gibt drei Systeme von Berührungs-Kegelschnitten, deren eines das Paar der Doppeltangenten enthält. Bei *zwei Rückkehrpunkten* ist noch eine Doppeltangente und ein System von Berührungskegelschnitten vorhanden; die Berührungspunkte der letzteren aber liegen nicht mit denen der Doppeltangente auf einem Kegelschnitte. Endlich bei *drei Rückkehrpunkten* hat man zwar noch eine Doppeltangente, aber kein System von Berührungskegelschnitten mehr. Die Curve ist von der dritten Klasse geworden, ihre nähere Behandlung also ganz analog der für die Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt früher gegeben (p. 587 ff.). —

Besonders einfach gestaltet sich die Aufstellung der Gleichungen für die Singularitäten der Grundcurve in dem Falle $n = 3$; und bei diesem wollen wir daher noch etwas verweilen*); dadurch werden dann gleichzeitig unsere früheren Untersuchungen über die Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte vervollständigt. Es seien also an Stelle von (3) die Gleichungen gegeben:

$$\varrho x_1 = a_\varkappa{}^3, \quad \varrho x_2 = a'_\varkappa{}^3, \quad \varrho x_3 = a''_\varkappa{}^3. \tag{38}$$

Wir haben zunächst die Form $\alpha_\varkappa \beta_\lambda \gamma_\mu$ aufzustellen, deren Verschwinden aussagt, dass die Punkte $\varkappa, \lambda, \mu$ auf einer Geraden liegen. Nun war aber:

$$\alpha_\varkappa \beta_\lambda \gamma_\mu \,.\, (\varkappa\lambda)(\lambda\mu)(\mu\varkappa) = \begin{vmatrix} a_\varkappa{}^3 & a'_\varkappa{}^3 & a''_\varkappa{}^3 \\ a_\lambda{}^3 & a'_\lambda{}^3 & a''_\lambda{}^3 \\ a_\mu{}^3 & a'_\mu{}^3 & a''_\mu{}^3 \end{vmatrix}.$$

Die hier rechts stehende Determinante ändert sich nicht, wenn man a mit $\varkappa$, a' mit λ, a'' mit μ vertauscht; sie muss daher neben dem wirklichen Factor $(\varkappa\lambda)(\lambda\mu)(\mu\varkappa)$ auch den symbolischen Factor $(aa')(a'a'')(a''a)$ enthalten. Der übrig bleibende Factor muss linear und symmetrisch, sowohl in $\varkappa, \lambda, \mu$, als in a, a', a'' sein; er hat daher den Werth:

$$a_\varkappa a'_\lambda a''_\mu + a_\mu a'_\varkappa a''_\lambda + a_\lambda a'_\mu a''_\varkappa.$$

Bezeichnet also $\Delta_\varkappa{}^3$ wieder die in (15) eingeführte Combinante, von welcher die 3 Wendepunkte abhängen, so kann man setzen**):

*) Vgl. **Rosenow** a. a. O., sowie die Anmerkung auf p. 584.

**) Nicht so einfach gestaltet sich die Berechnung der Determinante (11), wenn $n > 3$. Man hat dieselbe dann mit Hülfe der Reihenentwicklungen zu behandeln, welche für binäre Formen mit mehreren Reihen von Veränderlichen gelten (vgl. Clebsch's Theorie der binären Formen, p. 15 ff.); dabei können in

(39) $$\alpha_\varkappa \beta_\lambda \gamma_\mu = C \,.\, \Delta_\varkappa \Delta_\lambda \Delta_\mu \,,$$

wo C einen Zahlenfactor bedeutet.

Die Gleichung $\Delta_\varkappa \Delta_\lambda \Delta_\mu = 0$ *sagt sonach aus, dass die Punkte* $\varkappa$, λ, μ *in einer Geraden liegen;* $\Delta_\varkappa^2 \Delta_\lambda = 0$ *gibt die zwei Berührungs-*

---

der Entwicklung der Form $\alpha_\varkappa^{n-2} \beta_\lambda^{n-2} \gamma_\mu^{n-2}$ nur gerade Potenzen von $(\varkappa\lambda)$, $(\lambda\mu)$, $(\mu\varkappa)$ auftreten, denn diese Form ändert sich nicht, wenn man zwei der Grössen $\varkappa$, λ, μ mit einander vertauscht. In Rücksicht hierauf findet man z. B. für $n = 4$:

$$\alpha_\varkappa^2 \beta_\lambda^2 \gamma_\mu^2 = p \Delta_\varkappa^2 \Delta_\lambda^2 \Delta_\mu^2 + q \left\{ (\varkappa\lambda)^2 D_\mu^2 + (\lambda\mu)^2 D_\varkappa^2 + (\mu\varkappa)^2 D_\lambda^2 \right\},$$

wo p, q Zahlenfactoren bedeuten, wo $\Delta_\varkappa^6$ durch (15) definirt ist, und wo:

$$D_\varkappa^2 = (a a')(a' a'')(a'' a) \left\{ (a' a'')^2 a_\varkappa^2 + (a'' a)^2 a'^2_\varkappa + (a a')^2 a''^2_\varkappa \right\}.$$

Insbesondere kann hier die Form $D_\varkappa^2$ identisch Null sein; dann sagt die einfachere Gleichung $\Delta_\varkappa^2 \Delta_\lambda^2 \Delta_\mu^2 = 0$ aus, dass $\varkappa$, λ, μ in gerader Linie liegen; und hieraus findet man leicht, dass die Berührungspunkte der vier Doppeltangenten durch die Hesse'sche Form von Δ, d. i. durch die Gleichung:

$$H_\Delta \equiv (\Delta\Delta')^2 \Delta_\varkappa^4 \Delta'^4_\varkappa = 0$$

gegeben werden, die Paare von Parameterwerthen für die drei Doppelpunkte dagegen durch die Gleichung:

$$j \equiv (\Delta\Delta')^2 (\Delta'\Delta'')^2 (\Delta''\Delta)^2 \Delta_\varkappa^2 \Delta'^2_\varkappa \Delta''^2_\varkappa = 0\,.$$

Die geometrische Bedeutung dieses Falles ergibt sich durch folgende Ueberlegung. Man kann drei binäre biquadratische Formen immer als zweite Polaren einer Grundform 6ter Ordnung auffassen, wie in Rücksicht auf die typische Darstellung der Formen gerader Ordnung durch quadratische Covarianten (vgl. Clebsch a. a. O.) oder nach dem Hesse'schen Uebertragungsprincipe (vgl. p. 887, Anmk.) daraus folgt, dass ein Kegelschnittnetz im Allgemeinen Polarennetz einer C_3 ist. Sei also $f = \alpha_\varkappa^6$ diese Grundform, so kann man setzen:

$$a_\varkappa^4 = \alpha_\varkappa^4 \alpha_1^2\,, \qquad a'^4_\varkappa = \beta_\varkappa^4 \beta_1 \beta_2\,, \qquad a''^4_\varkappa = \gamma_\varkappa^4 \gamma_2^2\,,$$

und es wird:

$$\Delta = \tfrac{1}{6} (\alpha\beta)^2 (\beta\gamma)^2 (\gamma\alpha)^2 \alpha_\varkappa^2 \beta_\varkappa^2 \gamma_\varkappa^2 = \tfrac{1}{6} j_f$$

$$D_\varkappa^2 = -\tfrac{1}{6} (\alpha\beta)^2 (\alpha\gamma)^2 (\beta\gamma)^4 \alpha_\varkappa^2 = -\tfrac{1}{6} (i, f)_4 = -\tfrac{1}{6} l\,,$$

wenn i und l die bei Clebsch (a. a. O. p. 283 ff.) so genannten Formen sind. Ist aber $l \equiv 0$ und $i \gtrless 0$, so kann man setzen (a. a. O. p. 446): $f = \varkappa_1^6 + \varkappa_2^6$, und dann wird auch $j_f \equiv 0$. Dieser Fall gibt keine eigentliche C_4. Ist dagegen $l \equiv 0$ dadurch, dass i identisch verschwindet; dann zerfallen die 6 Grundpunkte von f (wie bei der Covariante T einer biquadratischen Form) in drei Paare, von denen je zwei zu einander harmonisch liegen (ib. p. 447), und man kann setzen: $f = \varkappa_1 \varkappa_2 (\varkappa_1^4 - \varkappa_2^4)$; dann wird aber $\frac{1}{6} j_f \equiv \Delta = -\frac{1}{105} \varkappa_1 \varkappa_2 (\varkappa_1^4 - \varkappa_2^4) = -\frac{1}{108} f$. Es wird daher auch j_Δ zu Δ proportional; d. h. die sechs Wendepunkte liegen paarweise in den Doppelpunkten vereinigt. *Durch die Bedingung* $D_\varkappa^2 \equiv 0$ *sind also diejenigen* C_4 *charakterisirt, welche in jedem Doppelpunkte gleichzeitig zwei Wendepunkte haben* (es sei denn, dass keine eigentliche C_4 überhaupt vorliegt; vgl. p. 890, 2. Anmk.). Ein Beispiel hierfür gibt die gewöhnliche *Lemniscate;* bei ihr liegen zwei Doppelpunkte in den imaginären Kreispunkten.

punkte $\varkappa$ der von λ ausgehenden Tangenten oder den Tangentialpunkt λ des Punktes $\varkappa$, und $\Delta_\varkappa^3 = 0$ gibt die drei Wendepunkte.

Ist insbesondere $\varkappa$ ein Wendepunkt, d. i. eine Wurzel von $\Delta_\varkappa^3 = 0$, so besteht die erste Polare von $\varkappa$ in Bezug auf Δ aus dem Punkte $\varkappa$ selbst und dem vierten harmonischen Punkte ν von $\varkappa$ in Bezug auf die beiden andern Wurzeln von Δ (wobei dann ν ein Wurzelpunkt der Covariante Q von Δ ist). Die Gleichung $\Delta_\varkappa \Delta_\lambda \Delta_\mu = 0$ sagt dann also aus, dass λ und μ zu $\varkappa$ und ν harmonisch liegen; diese Bedingung ist aber nach dem eben Gesagten erfüllt, wenn λ, μ die beiden anderen Wendepunkte von Δ sind; und somit ergibt sich der bekannte Satz, dass *die drei Wendepunkte auf einer Geraden liegen.*

Die Bestimmung des Doppelpunktes geschieht vermöge obiger Gleichung (14), d. h. durch Elimination von λ aus den beiden Gleichungen:

$$\Delta_\varkappa \Delta_\lambda \Delta_1 = 0, \quad \Delta_\varkappa \Delta_\lambda \Delta_2 = 0.$$

Die beiden Parameter des Doppelpunktes sind daher die Grundpunkte der Hesse'*schen Form $\tau_\varkappa^2$ von Δ, d. h. die Wurzeln der Gleichung:*

$$\tau_\varkappa^2 = 2(\Delta\Delta')\Delta_1\Delta_2'\Delta_\varkappa\Delta_\varkappa' = (\Delta\Delta')^2\Delta_\varkappa\Delta_\varkappa' = 0.$$

Gleichzeitig folgt hieraus, dass das Verschwinden der Determinante von τ, d. h. der Invariante $R = (\tau\tau')^2$ von Δ, die *Bedingung für das Auftreten eines Rückkehrpunktes* liefert.

Aber auch für die Polare $\tau_\varkappa\tau_\lambda$ von $\tau_\varkappa^2$ ist leicht eine Bedeutung anzugeben. Die Gleichung $\tau_\varkappa\tau_\lambda = 0$ nämlich ergibt sich durch Elimination von μ aus den beiden Gleichungen:

$$\Delta_\varkappa^2 \Delta_\mu = 0, \quad \Delta_\lambda^2 \Delta_\mu = 0.$$

Zunächst erhält man das Resultat $(\Delta\Delta')\Delta_\varkappa^2\Delta_\lambda'^2 = 0$. Nun ist aber:

$$\begin{aligned}(\Delta\Delta')\Delta_\varkappa^2\Delta_\lambda'^2 &= \tfrac{1}{2}(\Delta\Delta')(\Delta_\varkappa^2\Delta_\lambda'^2 - \Delta_\lambda^2\Delta_\varkappa'^2)\\ &= \tfrac{1}{2}(\Delta\Delta')^2(\Delta_\varkappa\Delta_\lambda' + \Delta_\lambda\Delta_\varkappa')(\varkappa\lambda)\\ &= (\Delta\Delta')^2\Delta_\varkappa\Delta_\lambda'(\varkappa\lambda) = \tau_\varkappa\tau_\lambda \, . \, (\varkappa\lambda).\end{aligned}$$

Die Gleichung $\tau_\varkappa\tau_\lambda = 0$ sagt also aus, dass die Punkte $\varkappa$, λ einen gemeinsamen Tangentialpunkt haben);* d. h. dass sie ein conjugirtes Polepaar auf der Grundcurve bilden, wenn man letztere als Hesse'sche Curve einer anderen Curve dritter Ordnung auffasst (was beim Auftreten eines Doppelpunktes nur noch auf eine Weise möglich ist).

Besonders ausgezeichnet sind noch auf der Curve die Berührungspunkte λ der drei von den Wendepunkten $\varkappa$ ausgehenden Tangenten. Dieselben findet man durch Elimination von $\varkappa$ aus den Gleichungen:

---

*) Hierin liegt dann wieder der auf p. 587 im Anschlusse an die kanonische Form von Δ nämlich ($\Delta = \lambda^3 + \mu^3$) ausgesprochene Satz über die von den Verbindungslinien zweier Punkte, die gemeinsamen Tangentialpunkt haben, mit dem Doppelpunkte gebildete Involution.

$$\Delta_\varkappa^3 = 0\,, \quad \Delta_\varkappa \Delta_\lambda^2 = 0\,.$$

Letztere kann man aber durch einfachere ersetzen. Da nämlich die eine der beiden vom Wendepunkte ausgehenden Tangenten mit der Wendetangente zusammenfällt, so bildet der Wendepunkt $\varkappa$ mit dem zugehörigen Berührungspunkte λ selbst ein conjugirtes Polepaar, so dass $\tau_\varkappa \tau_\lambda = 0$; und die Elimination von $\varkappa$ aus dieser Gleichung und aus $\Delta_\varkappa \Delta_\lambda^2 = 0$ gibt:

$$Q \equiv q_\lambda^3 \equiv (\Delta\tau) \Delta_\lambda^2 \tau_\lambda = 0\,.$$

*Die Grundpunkte der Covariante Q von Δ sind also die Berührungspunkte der von den Wendepunkten ausgehenden Tangenten.**)

Die Bedeutung der Polaren der Form Q endlich ergibt sich in folgender Weise. Es seien $\varkappa$, λ, μ die drei Punkte einer Geraden, in μ ziehen wir die Tangente, welche die Curve noch in dem Tangentialpunkte μ' von μ trifft; von μ' aus ziehen wir die zweite Tangente, deren Berührungspunkt μ'' sei, so dass μ und μ'' ein conjugirtes Polepaar bilden. Dann bestehen die Gleichungen:

$$\Delta_\varkappa \Delta_\lambda \Delta_\mu = 0\,, \quad \tau_\mu \tau_{\mu''} = 0\,;$$

und durch Elimination von μ ergibt sich:

$$\Delta_\varkappa \Delta_\lambda \tau_{\mu''} (\Delta\tau) = 0\,.$$

Nun ist aber:

$$\begin{aligned} 3 q_\varkappa^2 q_{\mu''} &= (\Delta\tau) \left\{\Delta_\varkappa^2 \tau_{\mu''} + 2 \Delta_\varkappa \Delta_{\mu''} \tau_\varkappa\right\} \\ &= (\Delta\tau) \left\{3 \Delta_\varkappa^2 \tau_{\mu''} + 2 \Delta_\varkappa (\Delta_{\mu''} \tau_\varkappa - \tau_{\mu''} \Delta_\varkappa)\right\} \\ &= 3 (\Delta\tau) \Delta_\varkappa^2 \tau_{\mu''} - 2 (\Delta\tau)^2 \Delta_\varkappa \,.\, (\varkappa\mu'')\,. \end{aligned}$$

Da aber nach Gleichung (10) p. 219 die zweite Ueberschiebung von Δ mit τ identisch Null ist, so wird $q_\varkappa^2 q_{\mu''} = (\Delta\tau)^2 \Delta_\varkappa^2 \tau_{\mu''}$; und also auch durch Polarenbildung:

$$q_\varkappa q_\lambda q_{\mu''} = (\Delta\tau)^2 \Delta_\varkappa \Delta_\lambda \tau_{\mu''}\,.$$

*Die Gleichung $q_\varkappa q_\lambda q_{\mu''} = 0$ sagt somit aus, dass die Verbindungslinie von $\varkappa$ und λ die Grundcurve in einem dritten Punkte trifft, welcher durch μ'' zu einem conjugirten Polepaare ergänzt wird.***)

---

*) Es sei bemerkt, dass drei binäre Formen dritter Ordnung keine anderen Combinanten haben, als die Formen Δ, τ, Q und R; vgl. Gordan: Math. Annalen, Bd. 5, p. 117 ff.

**) Hieraus folgt dann weiter, dass $\varkappa$, λ, μ'' drei Punkte sind, in denen ein Kegelschnitt je einfach die Grundcurve berühren kann, denn die Tangentialpunkte von $\varkappa$, λ, μ'' liegen wieder in einer Geraden (p. 533); vgl. auch Steiner in Crelle's Journal, Bd. 66 und Schröter's Bearbeitung von Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie, Bd. 2.

Mit Hülfe der entwickelten Relationen kann man nun weiter die Probleme des fortgesetzten Tangentenziehens (p. 588) und andere Fragen der Art behandeln; doch soll darauf hier nicht näher eingegangen werden. Es sei nur noch bemerkt, dass sich die vorstehenden Sätze über die Schnittpunkte einer Geraden mit der Curve dritter Ordnung unmittelbar auf die Schnittpunktsysteme von je drei beweglichen Punkten übertragen lassen, welche auf einer C_n mit $p = 0$ von den zweifach unendlich vielen C_{n-2} ausgeschnitten werden, die durch $\frac{1}{2} n (n - 3)$ Doppelpunkte und durch $n - 3$ feste einfache Punkte der C_n hindurchgehen. Von je drei solchen Punkten nämlich ist (wie bei der C_3) einer durch die beiden anderen bestimmt; und man kann daher durch Benutzung eines solchen Netzes von C_{n-2} die vorliegende C_n in eine Curve 3ter Ordnung mit einem Doppelpunkte eindeutig transformiren; auf letzterer wird dann eben die entsprechende zweifach unendliche Schaar von je drei Punkten durch die geraden Linien der Ebene ausgeschnitten.

XIII. Die Curven vom Geschlechte $p = 1$.

Gehen wir jetzt zu den Curven n^{ter} Ordnung mit $\frac{1}{2} n (n - 3)$ Doppelpunkten über, für welche $p = 1$ ist. Wir untersuchen zuerst (wie bei $p = 0$) die rein algebraischen Fragen, welche sich den betreffenden allgemeineren Erörterungen nicht unterordnen*); nämlich: die Transformation auf eine *Normalcurve* und die Bestimmung von *Anzahl und Bedeutung der Moduln.* Daran knüpfen wir dann noch einige Bemerkungen über die Einführung der elliptischen Functionen und Integrale; bei letzteren können wir uns kurz fassen, da dieselben nur Anwendungen unserer allgemeinen Theorien bieten, und da wir entsprechende Verhältnisse bei den Curven dritter Ordnung schon eingehend besprochen haben.

Als Normalcurve findet man hier die *allgemeine Curve dritter Ordnung*, und zwar in folgender Weise.**) Man betrachte die $\frac{1}{2} n (n - 3)$ Doppel- und Rückkehrpunkte nebst $2n - 3$ anderen, auf der Curve beliebig gewählten, festen Punkten als die $\frac{1}{2} (n + 2)(n - 1) - 2$ Grundpunkte eines Curvennetzes der $(n - 1)^{ten}$ Ordnung. Die Curven des letzteren treffen die C_n dann noch in

$$n(n - 1) - n(n - 3) - (2n - 3) = 3$$

*) Durch die $\frac{1}{2} n (n - 3)$ Doppelpunkte nämlich ist im Allgemeinen gerade *eine* adjungirte C_{n-3} bestimmt; dieselbe schneidet f aber sonst nicht, so dass die früheren Untersuchungen über C_{n-3} illusorisch werden.

**) Vgl. Clebsch: Ueber diejenigen Curven, deren Coordinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen, Crelle's Journal, Bd. 64 und: Cl. u. G. A. F. p. 69 ff.

beweglichen Punkten; benutzt man sie also als Transformationscurven, so resultirt in der That eine Curve der dritten Ordnung. Eine weitere Reduction der Ordnung ist nicht möglich, da es eine Curve von niedrigerer als der dritten Ordnung mit dem Geschlechte $p = 1$ nicht gibt.

Bei der Transformation entsprechen den Curven des Netzes, welche durch einen beliebigen Punkt x der C_n gehen, eindeutig die Strahlen des durch den entsprechenden Punkt y der C_3 gehenden Büschels, insbesondere also den vier berührenden Curven jenes Curvenbüschels die vier Tangenten dieses Strahlbüschels; und daraus folgt, dass das Doppelverhältniss der vier Tangenten jener vier Curven in einem der Basispunkte (z. B. x) des Büschels gleich ist dem (von y unabhängigen) Doppelverhältnisse der vier von y aus an die C_3 gehenden Tangenten (vgl. p. 578 und 715). *Dieses Doppelverhältniss gibt daher den einen Modul unserer elliptischen Curve;* dass letztere in der That auch *nur* einen Modul besitzt, erkennt man daraus, dass die C_3 auch gegenüber linearen Transformationen nur eine absolute Invariante hat (nämlich eben jenes Doppelverhältniss). Da nun das Doppelverhältniss der vier von y ausgehenden Tangenten unabhängig von der Lage des Punktes y auf der C_3 ist, so können wir auch folgenden Satz aussprechen:

In einem Büschel von adjungirten Curven $(n-1)^{ter}$ Ordnung, von dessen Basispunkten $2n-3$ in einfachen Punkten der Grundcurve n^{ter} Ordnung (vom Geschlechte Eins) liegen, gibt es im Allgemeinen vier Curven, welche diese C_n in einem Punkte berühren, der mit keinem der $2n-3$ Basispunkte zusammenfällt, und das Doppelverhältniss der vier Tangenten dieser Curven in einem der Basispunkte ist unabhängig von der Lage dieser letzteren auf der C_n. Dasselbe gibt gleichzeitig den Modul der Curve.

Statt der Curven $(n-1)^{ter}$ Ordnung hätten wir aber auch irgend ein Netz von adjungirten Curven s^{ter} Ordnung zur Transformation benutzen können, welche die C_n in *drei* beweglichen Punkten treffen; und ein solches ist auch immer angebbar, wenn nur $s > n-3$. Man hat nämlich nur noch $n(s-n+3)-3$ feste Punkte auf der C_n beliebig anzunehmen*), dann ist die Zahl der beweglichen Schnittpunkte in der That gleich

$$ns - n(n-3) - n(s-n+3) + 3 = 3.$$

Hieraus folgt, dass *der zuletzt für Curven $(n-1)^{ter}$ Ordnung ausgesprochene Satz, ebenso für Büschel von adjungirten Curven s^{ter} Ordnung, von deren Basispunkten $n(s-n+3)-2$ in einfachen Punkten der*

---

*) Das Netz selbst ist dann im Allgemeinen noch nicht nothwendig völlig bestimmt, wohl aber die Schaar $g_3^{(2)}$ von Durchschnittspunkten, welche von den Curven desselben auf der C_n bestimmt werden.

C_n *liegen, gültig ist, wenn nur* $s > n - 3$*); *und dies gilt auch insbesondere wieder für eine Grundcurve dritter Ordnung.* In der That hängt ja die Zahl der berührenden Curven eines Büschels nur von der Zahl der beweglichen Schnittpunkte und dem Geschlechte der Grundcurve ab (p. 460), ist also von s nicht wesentlich abhängig.

Die Coordinaten der Punkte einer allgemeinen Curve vom Geschlechte Eins kann man nun in ganz ähnlicher Weise als Function eines Parameters darstellen, wie dies bei den Curven dritter Ordnung gelang (p. 627 und 647 ff.). Diese Darstellung ist von selbst gegeben, sobald die Transformation der vorliegenden C_n auf die C_3 und die Umkehrung derselben bekannt ist; man kann sie aber auch direct in folgender Weise herstellen.**) Wir betrachten einen Büschel $\varphi + \lambda\psi = 0$ von adjungirten Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche sämmtlich durch $2n-2$ beliebige Punkte der C_n hindurchgehen und also die C_n in zwei beweglichen Punkten treffen. Die Gleichung der letzteren in Liniencoordinaten u_i ergibt sich durch Elimination der x_i aus den Gleichungen:

$$(1) \qquad f = 0, \quad \varphi + \lambda\psi = 0, \quad u_x = 0.$$

Von der Resultante wird sich ein Factor vom Grade $n(n-1) - 2$ in den u_i absondern, welcher λ nicht enthält; die erwähnte Gleichung, dargestellt durch Nullsetzen des übrig bleibenden Factors, wird daher von der Form:

$$(2) \quad 0 = w_{11}u_1^2 + w_{22}u_2^2 + w_{33}u_3^2 + 2w_{23}u_2u_3 + 2w_{31}u_3u_1 + 2w_{12}u_1u_2,$$

wo die w_{ik} Functionen n^{ten} Grades in λ sind. Da die rechte Seite sich in zwei lineare Factoren auflösen lässt, so verschwindet die Determinante der w_{ik}, d. h. es ist:

$$W = \begin{vmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Coordinaten der beiden beweglichen Schnittpunkte sollen nun bez. mit x_1, x_2, x_3 und ξ_1, ξ_2, ξ_3 bezeichnet werden; es seien ferner l_1, l_2, l_3 die Coordinaten der Verbindungslinie von x und ξ. Dann kann man setzen:

$$(2) \qquad W_{ik} = -l_i l_k Q,$$

wenn W_{ik} die Unterdeterminanten der Determinante W bedeuten; die Grössen l_i, l_k, Q hängen hier selbstverständlich von λ ab, und zwar

---

*) Vgl. auch Cayley: Proceedings of the London Mathematical Society, 16. Octb. 1865.

**) Für das Folgende, sowie auch für die weiterhin gegebenen Anwendungen der Theorie der elliptischen Functionen vgl. immer Clebsch a. a. O., Crelle's Journal, Bd. 64.

in sogleich noch zu bestimmender Weise. Für die Coordinaten x_i, ξ_i selbst findet man zufolge früherer Betrachtungen die Relationen*):

$$
\begin{array}{lll}
x_1 \xi_1 = w_{11} & x_2 \xi_1 = w_{21} - l_3 \sqrt{Q} & x_3 \xi_1 = w_{31} + l_2 \sqrt{Q} \\
x_1 \xi_2 = w_{12} + l_3 \sqrt{Q} & x_2 \xi_2 = w_{22} & x_3 \xi_2 = w_{32} - l_1 \sqrt{Q} \\
x_1 \xi_3 = w_{13} - l_2 \sqrt{Q} & x_2 \xi_3 = w_{23} + l_1 \sqrt{Q} & x_3 \xi_3 = w_{33}.
\end{array} \tag{3}
$$

Hieraus erhält man aber unmittelbar die Verhältnisse der Grössen x und ξ. Durch Einführung willkürlicher Grössen γ_1, γ_2, γ_3, mit denen wir bez. diese Gleichungen multipliciren und dann addiren, erhalten wir für $\varrho = \gamma_1 \xi_1 + \gamma_2 \xi_2 + \gamma_3 \xi_3$ die Verhältnisse der x_i insbesondere in der Form:

$$
\begin{aligned}
\varrho x_1 &= w_{11}\gamma_1 + w_{12}\gamma_2 + w_{13}\gamma_3 + (\gamma_2 l_3 - \gamma_3 l_2)\sqrt{Q} \\
\varrho x_2 &= w_{21}\gamma_1 + w_{22}\gamma_2 + w_{23}\gamma_3 + (\gamma_3 l_1 - \gamma_1 l_3)\sqrt{Q} \\
\varrho x_3 &= w_{31}\gamma_1 + w_{32}\gamma_2 + w_{33}\gamma_3 + (\gamma_1 l_2 - \gamma_2 l_1)\sqrt{Q}.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Lässt man hier das Vorzeichen von $\sqrt{Q}$ unbestimmt, so geben diese Gleichungen sowohl die x als die ξ, indem man der Wurzel nur einmal das positive, einmal das negative Zeichen beizulegen braucht.**)

Es kommt jetzt nur noch darauf an, den Grad der Function Q in dem Parameter λ anzugeben. Die Gleichung $Q = 0$ bestimmt offenbar diejenigen Curven des Büschels $\varphi + \lambda\psi = 0$, welche die Grundcurve berühren; andererseits wissen wir, dass es vier Curven dieser Art in dem Büschel gibt: Die Function Q ist also vom vierten Grade in λ; die Grössen l_i werden dann nach (2) in λ vom $(n-2)^{\text{ten}}$ Grade.***)

---

*) Vgl. die Gleichungen (9) auf p. 104; es ist daselbst α durch x, β durch ξ, $\varrho^2 = -\mu$ durch Q, ξ durch l zu ersetzen.

**) Die Ausdrücke (4) gestatten eine sehr einfache geometrische Deutung. Betrachtet man nämlich die γ_i als Coordinaten einer Geraden, so sind die Coëfficienten von $\sqrt{Q}$ die Coordinaten des (veränderlichen) Punktes, in dem die willkürlich (aber fest) gewählte Gerade γ von der Linie l (d. i. der Verbindungslinie der beiden beweglichen Punkte) getroffen wird. Die ersten Theile der rechten Seiten sind die Coordinaten des Poles von γ in Bezug auf jenes Punktepaar selbst, d. i. die Coordinaten des Punktes, welcher mit dem erwähnten Punkte und mit dem Paare, zu welchem x gehört, auf der Linie l ein harmonisches System bildet.

***) Für $\lambda = \lambda_1 : \lambda_2$ können wir also die Gleichungen (4) in der Form schreiben:

$$\varrho x_1 = a_\lambda{}^n + \alpha_\lambda{}^{n-2}\sqrt{q_\lambda{}^4}, \qquad \varrho x_2 = a'_\lambda{}^n + \alpha'_\lambda{}^{n-2}\sqrt{q_\lambda{}^4},$$

$$\varrho x_3 = a''_\lambda{}^n + \alpha''_\lambda{}^{n-2}\sqrt{q_\lambda{}^4}.$$

Dann wird:

$$\sqrt{q_\lambda{}^4}(\varrho\, dx_1 + x_1\, d\varrho) = n a_\lambda{}^{n-1} a_{d\lambda}\sqrt{q_\lambda{}^4} + (n-2)\,\alpha_\lambda{}^{n-3}\alpha_{d\lambda}\, q_\lambda{}^4 + 2\alpha_\lambda{}^{n-3}\, q_\lambda{}^3\, q_{d\lambda},$$

u. s. f.

Nach den Gleichungen (2) *ist also die Parameterdarstellung der Curve n^{ter} Ordnung vom Geschlechte Eins rational bis auf die Quadratwurzel aus einem Ausdrucke Q der vierten Ordnung*; letzterer ist multiplicirt in rationale Functionen der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung, die übrigen Theile der Ausdrücke x_i sind rationale Functionen n^{ter} Ordnung; die Grössen γ_i kommen in den Gleichungen (4) nur formell vor, wie aus den Gleichungen (3) hervorgeht.

Durch die Gleichungen (4) ist übrigens auch wieder die Abbildung der C_n auf eine C_3 von selbst gegeben, wie hier noch kurz erwähnt sein möge. Schreiben wir nämlich Q in der Form

$$Q = (\lambda - a_1)(\lambda - a_2)(\lambda - a_3)(\lambda - a_4)$$

und setzen:

$$(5)\quad y_1 = (\lambda - a_1)(a_3 - a_2), \quad y_2 = (\lambda - a_2)(a_3 - a_1), \quad y_1 y_3 = \frac{\sqrt{Q}}{m},$$

$$m^2 = \frac{a_1 - a_2}{(a_3 - a_1)(a_1 - a_2)^2 (a_3 - a_2)^2},$$

so lassen sich die w_{ik}, l_i als Functionen w_{ik}', l_i' in y_1, y_2 darstellen, welche in letzteren Grössen von demselben Grade sind wie die w_{ik}, l_i in λ, und $\sqrt{Q}$ wird bis auf eine Constante m gleich $y_1 y_3$. Man findet daher die x_i in folgender Weise ausgedrückt:

$$(6)\qquad \varrho x_i = \gamma_1 w_{i1}' + \gamma_2 w_{i2}' + \gamma_3 w_{i3}' + m(\gamma l')_i y_1 y_3,$$

wo $(\gamma l')_1 = \gamma_2 l_3' - \gamma_3 l_2'$, etc. Die x_i sind also als ganze Functionen n^{ter} Ordnung der y_i dargestellt, und zwischen letzteren besteht nach (5) die Identität:

$$(7)\qquad F(y) \equiv y_3^2 y_1 - y_2 (y_1 - y_2)(y_1 - k^2 y_2) = 0,$$

wo
$$k^2 = \frac{a_3 - a_2}{a_2 - a_1} \cdot \frac{a_4 - a_1}{a_4 - a_2}:$$

Somit findet man für die Coordinaten u_i der Tangente des Punktes x:

$$\begin{aligned}\sigma u_3 &= \tau(x_1 dx_2 - x_2 dx_1)\\ &= 2 n q_\lambda^4 \left\{(a\alpha') a_\lambda^{n-1} \alpha'^{\,n-3}_\lambda + (\alpha a') \alpha_\lambda^{n-3} a'^{\,n-1}_\lambda\right\}\\ &+ 2 q_\lambda^3 \left\{a'^{\,n}_\lambda (\alpha q) a_\lambda^{n-3} - a_\lambda^n (\alpha' q) \alpha'^{\,n-3}_\lambda\right\}\\ &+ \sqrt{q_\lambda^4} \left\{n (a a') a_\lambda^{n-1} a'^{\,n-1}_\lambda + (n-2) q_\lambda^4 (\alpha\alpha') \alpha_\lambda^{n-3} \alpha'^{\,n-3}_\lambda\right\},\end{aligned}$$

u. s. w.

Dadurch ist auch *die Parameterdarstellung der C_n, aufgefasst als Tangentengebilde*, gegeben. Dass die letzten Gleichungen in der That eine Curve $2n^{\text{ter}}$ Klasse darstellen, wie es sein soll, erkennt man auf analogem Wege, wie im Texte sogleich gezeigt werden wird, dass die durch (4) dargestellte Curve nur von der n^{ten} Ordnung ist, indem die Ordnungen der rechts stehenden Ausdrücke noch reducirt werden können.

in der That *die Gleichung einer Curve dritter Ordnung, deren Doppelverhältniss (Modul) gleich* k^2 *ist.* Die Gleichungen (6) geben also die Umkehrung der Formeln $\varrho y_i = \Phi_i(x)$, durch welche dieselbe Transformation hergestellt wird, wenn $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, $\Phi_3 = 0$ drei zu der gegebenen C_n adjungirte Curven aus einem Netze mit drei beweglichen Schnittpunkten sind. Man kann übrigens auch aus den Gleichungen (6) wieder umgekehrt die y_i als Function der x_i berechnen; denn es ist $\lambda = -\frac{\varphi}{\psi}$ eine rationale Function der x_i, wodurch y_1, y_2 sofort dargestellt sind, und y_3 kommt in den Gleichungen (6) nur linear vor.

Geht man andererseits von der Curve (7) aus, die durch die Formeln (6) in eine C_n transformirt werden soll, so müssen durch die Gleichungen, welche entstehen, wenn man die rechten Seiten der Ausdrücke (6) gleich Null setzt, drei Curven n^{ter} Ordnung dargestellt werden, und die Curven des durch sie bestimmten Netzes müssen die C_3 noch in n beweglichen Schnittpunkten treffen; d. h. *es muss auf der* C_3 (7) $2n$ *feste Punkte geben, durch welche alle Curven des so entstehenden Netzes* n^{ter} *Ordnung hindurchgehen.* Diese $2n$ Punkte kann man nun auch leicht direct aus den Formeln (6) bestimmen. Betrachten wir die durch irgend eine lineare Verbindung der rechten Theile von (6) dargestellte Curve, bilden also mittelst der drei willkürlichen Grössen β_1, β_2, β_3 die Gleichung:

$$(8) \qquad \Sigma\Sigma\gamma_i\beta_k w_{ik}' + m y_1 y_3 (\gamma l' \beta) = 0 .$$

Diese Curve enthält ebenfalls jene $2n$ constanten Schnittpunkte. Aber in der Nähe von $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ geht (8) in den Büschel von $n-1$ Geraden

$$y_1 \cdot (\gamma\beta l') = 0$$

über. Die Curve (8) hat also im Punkte $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ einen $(n-1)$-fachen Punkt, dessen eine Tangente ($y_1 = 0$) die Curve (7) berührt. *Daher fallen in diesen Punkt n Schnittpunkte der beiden Curven* (7) *und* (8). Ferner folgt aus (8):

$$(9) \qquad (\Sigma\Sigma\gamma_i\beta_i w_{ik}')^2 = m^2 y_1^2 y_3^2 (\gamma\beta l')^2 ,$$

wo nun y_3^2 mit Hülfe von (7) eliminirt werden kann. Aber dann wird nach (2) und (5)

$$(10) \qquad m^2 y_1^2 y_3^2 l_i' l_k' = Q l_i' l_k' = - W_{ik}' ,$$

wenn mit W_{ik}' die aus den w_{ik}' zu bildenden Unterdeterminanten bezeichnet werden; und die rechte Seite von (9) geht daher über in die Determinante

$$-\begin{vmatrix} W_{11}' & W_{12}' & W_{13}' & \gamma_1 & \beta_1 \\ W_{21}' & W_{22}' & W_{23}' & \gamma_2 & \beta_2 \\ W_{31}' & W_{32}' & W_{33}' & \gamma_3 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(\Sigma\Sigma w_{ik}'\gamma_i\beta_k)^2 - (\Sigma\Sigma w_{ik}'\gamma_i\gamma_k)(\Sigma\Sigma w_{ik}'\beta_i\beta_k)\,.$$

Die Gleichung (9) zerfällt daher in die beiden Gleichungen:

$$\Sigma\Sigma w_{ik}'\gamma_i\gamma_k = 0\,, \quad \Sigma\Sigma w_{ik}'\beta_i\beta_k = 0\,.$$

Nur die zweite von den letzteren ist von den speciellen Constanten β der Curve (8) abhängig; die erste liefert also n constante Verhältnisse $y_1 : y_2$, und jedem solchen Verhältnisse entspricht aus (8) ein Werth von y_3, welcher gleichfalls von den β unabhängig ist, *so dass man aus der Gleichung:*

(11) $$\Sigma\Sigma w_{ik}'\gamma_i\gamma_k = 0$$

in Verbindung mit (8) *die n weiteren constanten Schnittpunkte findet.* Was nämlich den Werth von y_3 betrifft, so ist, wenn wirklich der aus (8) gefundene Werth von den β_i unabhängig sein soll, nothwendig:

$$m y_1 y_3 = \frac{w_{11}'\gamma_1 + w_{12}'\gamma_2 + w_{13}'\gamma_3}{\gamma_3 l_2' - \gamma_2 l_3'} = \frac{w_{21}'\gamma_1 + w_{22}'\gamma_2 + w_{23}'\gamma_3}{\gamma_1 l_3' - \gamma_3 l_1'} = \frac{w_{31}'\gamma_1 + w_{32}'\gamma_2 + w_{33}'\gamma_3}{\gamma_2 l_1' - \gamma_1 l_2'}\,.$$

Setzt man aber diese Quotienten paarweise einander gleich, so hat man die drei Bedingungen:

$$\gamma_r \Sigma\Sigma w_{ik}'\gamma_i l_k' - l_r'\Sigma\Sigma w_{ik}'\gamma_i\gamma_k = 0 \quad (r = 1, 2, 3),$$

welche sich wegen (11) auf die eine Bedingung

$$\Sigma\Sigma w_{ik}'\gamma_i l_k' = 0$$

reduciren. Letztere aber geht, mit $m^2 y_1^2 y_3^2 l_h'$ multiplicirt, wegen (10) über in:

$$\sum_i\sum_k w_{ik}'\gamma_i W_{kh}' = W'\,.\,\gamma_h = 0\,;$$

und diese Bedingung ist in der That erfüllt, da die Determinante W' der Grössen w_{ik}' verschwindet. —

Durch die Gleichungen (6) ist nun auch die Einführung der elliptischen Functionen sofort gegeben. Mittelst derselben werden nämlich die Punkte der Curve (7) nach Früherem dargestellt durch die Gleichungen (p. 604):

$$\varrho y_1 = \sin^3 \operatorname{am} u\,, \quad \varrho y_2 = \sin \operatorname{am} u\,, \quad \varrho y_3 = \cos \operatorname{am} u\,.\,\Delta \operatorname{am} u\,,$$

Dividirt man also in (6) auf beiden Seiten mit $\sin^n \operatorname{am} u$, so erhält man Formeln von der Gestalt:

(12) $\sigma x_i = F_i^{(n)}(\sin^2 \operatorname{am} u) + F_i^{(n-2)}(\sin^2 \operatorname{am} u) \frac{d \sin^2 \operatorname{am} u}{du}$,

wo der Grad der Functionen F_i in ihrem Argumente durch den oberen Index angezeigt ist; diesen Grad können wir indess, wie sich weiterhin ergeben wird, noch mehr erniedrigen.

In die Gleichungen (12) kann man (analog wie auf p. 629) die Function $\mathrm{H}(u)$ statt $\sin \operatorname{am} u$ einführen, um sodann sofort wieder auf das Abel'sche Theorem geführt zu werden. Jeder der in (12) rechts stehenden Ausdrücke verschwindet nämlich für $2n$ Werthe des Arguments u. Bezeichnen wir diese Werthe bez. mit

$$\begin{array}{l} \alpha_1', \; \alpha_2', \; \ldots \alpha_n', \; \alpha_{n+1}', \; \ldots \alpha_{2n}' \\ \alpha_1'', \; \alpha_2'', \; \ldots \alpha_n'', \; \alpha_{n+1}'', \; \ldots \alpha_{2n}'' \\ \alpha_1''', \; \alpha_2''', \; \ldots \alpha_n''', \; \alpha_{n+1}''', \; \ldots \alpha_{2n}''', \end{array}$$

so wird nach den schon bei den C_3 benutzten Satze*), wenn wir für $\sigma \Theta^{2n}(u)$ wieder σ schreiben und unter den C_i Constante verstehen:

(13) $\sigma x_i = C_i \mathrm{H}(u - \alpha_1^{(i)}) \,.\, \mathrm{H}(u - \alpha_2^{(i)}) \ldots \mathrm{H}(u - \alpha_{2n}^{(i)})$.

Die Linie $x_i = 0$ schneidet aber die C_n nur in n Punkten; es müssen daher n von den $2n$ Verschwindungswerthen des Arguments u, welche rechts auftreten, für uns unbrauchbar sein, indem sie den drei Linien $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ gleichmässig zukommen. Dies bestätigt sich in der That direct aus den Gleichungen (4). Bestimmt man nämlich den Schnitt einer beliebigen Geraden $\beta_x = 0$ mit der C_n, so muss dies durch eine Gleichung n^{ten} Grades für den Parameter λ geschehen. Setzt man jedoch in $\beta_x = 0$ die Werthe der x_i aus (4) ein, so kommt:

$$\Sigma \Sigma w_{ik} \beta_i \gamma_k + \sqrt{Q}\,(\beta \gamma l) = 0)$$

und dies ist wegen (5) wieder die Gleichung (8), von welcher wir bereits nachgewiesen haben, dass sie n von den β_i völlig unabhängige Wurzeln besitzt, nämlich die Wurzeln der Gleichung (11). Wir können also setzen:

$$\alpha'_{n+1} = \alpha''_{n+1} = \alpha'''_{n+1}, \; \alpha'_{n+2} = \alpha''_{n+2} = \alpha'''_{n+2}, \ldots \alpha'_{2n} = \alpha''_{2n} = \alpha'''_{2n};$$

und wenn wir dann den in allen drei Gleichungen (13) auftretenden Factor

$$\mathrm{H}(u - \alpha'_{n+1}) \,.\, \mathrm{H}(u - \alpha'_{n+2}) \ldots \mathrm{H}(u - \alpha'_{2n})$$

in den Proportionalitätsfactor σ eingehen lassen, so wird:

(14) $\sigma x_i = C_i \mathrm{H}(u - \alpha_1^{(i)}) \,.\, \mathrm{H}(u - \alpha_2^{(i)}) \ldots \mathrm{H}(u - \alpha_n^{(i)})$.

---

*) Dieser Hermite'sche Satz ist im Grunde für $p = 1$ identisch mit dem auf p. 831 erwähnten allgemeinen Satze über die Darstellbarkeit algebraischer Functionen durch Quotienten von Θ-Functionen.

Für die mn Argumente $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{mn}$ der Schnittpunkte unserer C_n mit einer Curve m^{ter} Ordnung wird jetzt nach dem bekannten Hermite'schen Satze (p. 629 f.), wie wohl nicht noch einmal ausgeführt zu werden braucht:

$$(15) \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_{mn} = m\vartheta,$$

wenn $\vartheta = -\alpha'_{n+1} - \alpha'_{n+2} \ldots - \alpha'_{2n}$, und dies ist wieder nichts anderes, als das Abel'sche Theorem, denn der Parameter u ist eben gleich dem *einen* zu der C_n gehörigen endlichen Integrale (p. 603):

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad \text{für} \quad z = \sin \operatorname{am} u.$$

Auf Anwendungen des Abel'schen Theorems zur Bestimmung von Berührungscurven (p. 838) soll für diesen besonderen Fall ($p = 1$) hier nicht noch einmal eingegangen werden. Es sei nur daran erinnert, dass auch hier das *erweiterte Umkehrproblem* zur Anwendung kommen muss (p. 866), sobald man Curven betrachtet, welche nicht durch sämmtliche Doppelpunkte der Grundcurve C_n hindurchgehen.*) —

Wie bei den Curven vom Geschlechte Null (p. 889) kann man nun auch hier wieder umgekehrt fragen, ob durch Gleichungen der Form (4) oder (14) *immer* eine Curve vom Geschlechte Eins dargestellt wird, und wie sich, wenn dies der Fall ist, die Singularitäten dieser Curve bestimmen. Dass erstere Frage im Allgemeinen zu bejahen ist**), bedarf kaum der Erörterung; was die andere Frage angeht, so sollen hier noch die Doppelpunkte der C_n aus der Parameterdarstellung bestimmt werden, wodurch dann übrigens auch erstere Frage mit erledigt ist. Es könnte dies zunächst, indem man die Gleichungen (6) in Verbindung mit (7) zu Grunde legt, in der Weise geschehen, wie es in der allgemeinen Theorie der eindeutigen Transformationen gelehrt wurde (also mittelst der Curve $M = 0$, vgl. p. 644); es soll jedoch hier unsere Aufgabe sein, diese Bestimmung unter alleiniger Benutzung der in den Gleichungen (4) eingeführten binären Veränderlichen zu leisten.

---

*) Vgl. in Betreff des Näheren Clebsch a. a. O. Man findet daselbst genauer die Curven 4ter Ordnung mit zwei Doppelpunkten als Beispiel behandelt, insbesondere auch die Bestimmung ihrer Doppeltangenten. — Rein algebraisch sind diese Curven (doch in wesentlich anderer Richtung) von Casey, Chasles, Quetelet, Cayley, Hart untersucht; vgl. darüber Salmon's Higher plane curves. Besonders sind die metrischen Eigenschaften von Curven 4ter Ordnung studirt, deren beide Doppelpunkte in den Kreispunkten liegen.

**) Ausnahmen könnten z. B. bei zerfallenden Curven vorkommen.

Zu dieser Untersuchung sind jedoch letztere Gleichungen selbst nicht ohne Weiteres brauchbar. Wir haben nämlich gesehen, dass die in ihnen rechts stehenden Ausdrücke gleichzeitig verschwinden, sobald die Bedingung $\Sigma\Sigma w_{ik}'\gamma_i\gamma_k = 0$ erfüllt ist; und zwar muss dies dadurch geschehen, dass alle drei Ausdrücke den Factor $\sqrt{\Sigma\Sigma w_{ik}'\gamma_i\gamma_k}$ enthalten, denn das Quadrat des letzteren trat als Factor der durch Quadriren aus (8) entstandenen Gleichung (9) auf. Um nun die rechten Seiten von (4) durch eine irrationale Substitution in eine möglichst einfache Gestalt zu bringen, knüpft man am besten wieder an die Darstellung durch elliptische Functionen, d. i. an die Gleichungen (12) und (14) an. In ihnen führen wir an Stelle von u einen neuen Parameter*)

$$(16) \qquad v = u - \frac{\vartheta}{n}$$

ein und an Stelle der α die constanten Werthe:

$$\beta_k^{(i)} = \alpha_k^{(i)} - \frac{\vartheta}{n},$$

so dass man die Gleichungen (14) in der Form schreiben kann:

$$(17) \qquad \varrho x_i = C_i \mathrm{H}(v - \beta_1^{(i)}) \cdot \mathrm{H}(v - \beta_2^{(i)}) \ldots \mathrm{H}(v - \beta_n^{(i)}).$$

wo nun:

$$\beta_1^{(i)} + \beta_2^{(i)} + \ldots + \beta_n^{(i)} \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Wegen der letzteren Relation kann man jetzt nach der Umkehrung des mehrfach benutzten Hermite'schen Satzes den Gleichungen (17), wenn n gerade ist, die Form geben:

$$(18) \quad \varrho x_i = C_i \left\{ F_i^{\left(\frac{n}{2}\right)}(\mu) + \sqrt{\mu(1-\mu)(1-k^2\mu)} \, . \, F_i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(\mu) \right\},$$

wo $\mu = \sin^2 \mathrm{am}\, v$, und wo die oberen Indices der F_i wieder die Ordnungen dieser Functionen anzeigen, dagegen, wenn n ungerade ist**):

$$(19) \quad \varrho x_i = C_i \left\{ F_i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(\mu)\sqrt{\mu} + \sqrt{(1-\mu)(1-k^2\mu)} \, . \, F_i^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}(\mu) \right\},$$

oder wenn wir auf den rechten Seiten mit $\sqrt{\mu}$ multipliciren:

$$(19^*) \quad \varrho x_i = C_i \left\{ F_i^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}(\mu) + \sqrt{\mu(1-\mu)(1-k^2\mu)} \, . \, F_i^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}(\mu) \right\}.$$

---

*) Analog wie bei den C_3 auf p. 630.

**) Die Modification jenes Satzes für diesen Fall kann man aus dem vorigen dadurch ableiten, dass man etwa $\beta_n^{(i)} = 0$ nimmt, dann muss sich links ein Factor $\sqrt{\mu} = \sin \mathrm{am}\, v$ absondern; und es bleiben die hier angegebenen Ausdrücke. Das in (19*) gewonnene Resultat stimmt mit dem für die Curven 3ter Ordnung auf p. 647 gewonnenen überein, denn für sie ist $\frac{1}{2}(n+1) = 2$, $\frac{1}{2}(n-3) = 0$.

In die Gleichungen (4) hatten wir die elliptischen Functionen eingeführt mittelst der Substitution:

(20) $$\frac{\lambda - a_1}{\lambda - a_2} \cdot \frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1} = \lambda' = \sin^2 \operatorname{am} u \,.$$

Die jetzt in (18) und (19) auftretende Variable μ dagegen hat die Bedeutung:

(21) $$\sqrt{\mu} = \sin \operatorname{am}\left(u - \frac{\vartheta}{n}\right) = \frac{\sqrt{\lambda'(1-\varepsilon)(1-k^2\varepsilon)} - \sqrt{\varepsilon(1-\lambda')(1-k^2\lambda')}}{1 - k^2\varepsilon\lambda'},$$

wo λ' durch (20) definirt ist, und ε durch:

(22) $$\sqrt{\varepsilon} = \sin \operatorname{am} \frac{\vartheta}{n},$$

Wir sind also von den Gleichungen (4) *zu den reducirten Gleichungen* (18) *und* (19) *mittelst einer irrationalen Substitution* (21) *übergegangen,* welche die Entfernung der überflüssigen Factoren ermöglichte. Denken wir uns schliesslich statt μ wieder einen neuen Parameter z eingeführt, so dass $\mu = \frac{\alpha + \beta z}{\gamma + \delta z}$, so können wir die gewonnenen Resultate in folgender Form aussprechen:

Die Coordinaten eines Punktes einer Curve $2m^{ter}$ Ordnung vom Geschlechte $p = 1$ lassen sich immer in der Form darstellen:

$$\varrho x_i = f_i^{(m)}(z) \pm \varphi_i^{(m-2)}(z) \sqrt{R^{(3)}(z)}$$

und diejenigen eines Punktes einer Curve $(2m+1)^{ter}$ Ordnung in der Form:

$$\varrho x_i = f_i^{(m)}(z) \sqrt{P^{(1)}(z)} \pm \varphi_i^{(m-1)}(z) \sqrt{Q^{(2)}(z)} \,.$$

Beide Darstellungen können wir für eine Curve n^{ter} Ordnung in der einen Formel zusammenfassen*):

(23) $$\varrho x_i = f_i^{(k)}(z) \sqrt{M} \pm \varphi_i^{(h)}(z) \sqrt{N},$$

wenn wir festsetzen, dass $k < \frac{1}{2} n$, $h \leq \frac{1}{2} n$ und immer $h + k = n - 2$, dass ferner M von der Ordnung $n - 2k$, N von der Ordnung $n - 2h$ sei (so dass das Product MN immer von der 4ten Ordnung ist). Die Gleichungen (23) stellen dann in der That immer eine C_n dar, denn für die Schnittpunkte mit einer Geraden $\beta_x = 0$ findet man die Gleichung n^{ten} Grades in z:

$$(\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \beta_3 f_3)^2 M - (\beta_1 \varphi_1 + \beta_2 \varphi_2 + \beta_3 \varphi_3)^2 N = 0 \,.$$

Die Doppelpunkte der Curve (23) bestimmen sich nun dadurch, dass

*) Dies Resultat hätte man auch ohne Vermittelung der H-Functionen directer finden können (vgl. den folgenden Abschnitt); mit Hülfe der elliptischen Functionen konnten wir indess auch in (21) *die Substitution wirklich angeben*, welche die verlangte Umformung leistet.

sich für zwei verschiedene Werthe z, z' einander proportionale Werthe der x_i ergeben. Dann müssen also die Gleichungen bestehen:

$$f_i \sqrt{M} + \varphi_i \sqrt{N} = \sigma\,(f_i' \sqrt{M'} + \varphi_i' \sqrt{N'})\,, \tag{24}$$

wo auf der rechten Seite die oberen Striche auf das Argument z' hinweisen sollen. Die dreigliedrigen Determinanten, welche man aus dem Schema

$$\begin{matrix} f_1 & \varphi_1 & f_1' & \varphi_1' \\ f_2 & \varphi_2 & f_2' & \varphi_2' \\ f_3 & \varphi_3 & f_3' & \varphi_3' \end{matrix}$$

durch Weglassen je einer Verticalreihe bilden kann, dividirt durch $z - z'$, bezeichnen wir bez. mit

$$F,\quad \Phi,\quad F',\quad \Phi';$$

so dass diese Functionen in z bez. von den Ordnungen sind:

$$h - 1,\quad k - 1,\quad h + k - 1,\quad h + k - 1$$

und in z' bez. von den Ordnungen:

$$h + k - 1,\quad h + k - 1,\quad h - 1,\quad k - 1.$$

Dann folgt aus (24)

$$\sqrt{M} : \sqrt{N} : \sigma \sqrt{M'} : \sigma \sqrt{N'} = F : \Phi : F' : \Phi',$$

oder:

$$\begin{aligned} F^2 N - \Phi^2 M &\equiv \Omega\,(z, z') = 0\,, \\ F'^2 N' - \Phi'^2 M' &= \Omega\,(z', z) = 0\,. \end{aligned} \tag{25}$$

Beide Gleichungen sind für das erste Argument vom Grade $n - 2$, für das zweite vom Grade $2n - 6$, und beide unterscheiden sich nur durch Vertauschung von z mit z'. Eliminirt man also z' aus ihnen, so ist das Resultat durch $\Omega\,(z, z)$ theilbar, und also der nach Absonderung dieses Factors übrig bleibende Ausdruck vom Grade

$$(n - 2)^2 + (2n - 6)^2 - 3n - 8 = (n - 3)\,(5n - 16)\,.$$

Aber auch die so erhaltene Gleichung besitzt noch einen überflüssigen Factor; denn die Gleichungen (25) bedingen rückwärts die Gleichungen (24) nur dann, wenn nicht F, Φ, F', Φ' gleichzeitig verschwinden. Letzteres kann aber in der That eintreten. Von den Gleichungen:

$$F = 0,\quad \Phi = 0,\quad F' = 0,\quad \Phi' = 0 \tag{26}$$

ist nämlich die dritte und vierte immer eine Folge der beiden ersten. Denn da zufolge der Entstehung dieser Ausdrücke immer identisch:

$$F f_i + \Phi \varphi_i + F' f_i' + \Phi_i' \varphi_i' = 0\,,$$

so finden für $F = 0$, $\Phi = 0$ immer die drei Gleichungen statt:

$$F' f_i' + \Phi' \varphi_i' = 0,$$

aus denen im Allgemeinen immer $F' = 0$, $\Phi' = 0$ folgt (d. h. wenn nicht gleichzeitig etwa $f_1' = 0$, $\varphi_1' = 0$ und $f_2' \varphi_3' - f_3 \varphi_2' = 0$). Nun sind nach dem Obigen die Ordnungen von F und Φ in z gleich $h - 1$ und $k - 1$, in z' gleich $h + k - 1$. Die Zahl der den Gleichungen $F = 0$, $\Phi = 0$ gemeinsamen Werthepaare z, z' ist also gleich

$$(h + k - 1)(h + k - 2) = (n - 3)(n - 4).$$

Es ist aber jede der Gleichungen (25) in Folge von (26) quadratisch erfüllt; betrachten wir dieselben daher als Gleichungen zweier Curven in den Coordinaten z, z', so sind die jenen $(n - 3)(n - 4)$ Werthepaaren z, z' zugehörigen Punkte der Ebene Doppelpunkte beider Curven; und folglich fallen in diese Punkte $4(n - 3)(n - 4)$ Schnittpunkte derselben. Von der durch Elimination von z' aus (25) entstehenden Gleichung muss sich daher ein Factor vom Grade $4(n - 3) . (n - 4)$ absondern lassen; der Rest bleibt dann vom Grade

$$(n - 3)(5n - 16) - 4(n - 3)(n - 4) = n(n - 3).$$

Dies stimmt mit der Existenz von $\frac{1}{2} n (n - 3)$ Doppelpunkten überein, da jedem Doppelpunkte *zwei* Argumente, also zwei Wurzeln dieser Gleichung zukommen. Die letztere hat zugleich die Eigenschaft, dass aus (25) immer eine Wurzel z' eine rationale Function einer bestimmten Wurzel z wird und z dieselbe rationale Function von z'. Man löst also jene Gleichung $n(n - 3)^{\text{ten}}$ Grades mit Hülfe einer Gleichung vom Grade $\frac{1}{2} n (n - 3)$ und $\frac{1}{2} n (n - 3)$ quadratischer Gleichungen.

XIV. Die Curven vom Geschlechte $p = 2$.

Wir wollen endlich noch *die Curven n^{ter} Ordnung vom Geschlechte* $p = 2$ näher studiren. Schon aus unseren früheren allgemeinen Untersuchungen ging hervor, dass diese Curven immer zu den hyperelliptischen gehören (vgl. p. 717, Anmk.), d. h. dass man einen Büschel von adjungirten C_{n-3} angeben kann, welcher sie nur in zwei beweglichen Punkten trifft (auf der C_n eine $g_2^{(1)}$ ausschneidet); und daraus folgte dann weiter, dass *jede Curve vom Geschlechte $p = 2$ in eine Curve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkte übergeführt werden kann*, und zwar immer in die Form (p. 720):

$$x_2^2 \varphi_2(x_1, x_3) - \psi_4(x_1, x_3) = 0. \tag{1}$$

Dass hier ein solcher Büschel von C_{n-3} existirt, ist in der That evident; denn, da $p - 1 = 1$ und $2p - 2 = 2$, gibt es eben nur *eine einfach* unendliche Schaar von je *zwei* Punkten, die durch adjungirte C_{n-3} ausgeschnitten werden kann.

Diesen Büschel von C_{n-3} wird man nun, ganz wie den Büschel von C_{n-1} bei den Curven vom Geschlechte $p=1$, zur Durchführung der Parameterdarstellung unserer C_n benutzen können. Dies Verfahren ist jedoch ebenso bei hyperelliptischen Curven höheren Geschlechtes anwendbar; wir wollen daher im Folgenden die Parameterdarstellung sogleich für beliebige hyperelliptische Curven durchführen. Eine solche war ja dadurch definirt, dass auf ihr eine Schaar $g_2^{(1)}$ existirt; es gibt also jedenfalls einen Büschel

$$\chi_1 + \lambda \chi_2 = 0 \tag{2}$$

von C_{n-3}, welcher die $g_2^{(1)}$ ausschneidet. Durch Elimination der x_i aus (1), (2) und aus den Gleichungen $u_x = 0$ erhält man wieder mit Uebergehung der von λ unabhängigen Factoren*) das Product der Gleichungen der beiden beweglichen Schnittpunkte in der Form:

$$\Sigma \Sigma w_{ik} u_i u_k = 0. \tag{3}$$

wo die w_{ik} ganze Functionen n^{ter} Ordnung in λ sind, deren Determinante verschwindet. Man hat daher auch, wie im Falle $p=1$, für die Coordinaten der beweglichen Schnittpunkte als Functionen von λ die Ausdrücke (p. 906):

$$\varrho x_i = w_{i1}\gamma_1 + w_{i2}\gamma_2 + w_{i3}\gamma_3 + (\gamma l)_i \sqrt{Q}, \tag{4}$$

wo wieder die γ_i willkürliche Grössen sind, und Q, l_1, l_2, l_3 rationale Functionen von λ, so dass

$$l_i l_k Q = - W_{ik}. \tag{5}$$

Aber der Grad der Function Q in λ ist jetzt ein anderer als im Falle $p=1$. Er ist nämlich offenbar wieder gleich der Zahl der im Büschel (2) enthaltenen berührenden Curven, d. h. (nach p. 460) gleich**)

$$2(2+p-1) = 2p+2.$$

Wegen (5) werden dann die l_i vom Grade $n-p-1$ in λ, denn die W_{ik} sind ja vom Grade $2n$.

Setzt man also:

$$Q = (\lambda - a_1)(\lambda - a_2)\ldots(\lambda - a_{2p+2}), \tag{6}$$

und sodann:

---

*) Es liegen nämlich noch $2p-4$ Basispunkte des Büschels (1) in festen einfachen Punkten der C_n. — Für $p=2$ sind unter Benutzung eines Büschels von C_{n-1} analoge Betrachtungen wie im Texte bei Cl. u. G. A. F. p. 77 gegeben; vgl. dazu einige Correctionen von Clebsch: Math. Annalen, Bd. 1, p. 170. — Für beliebige hyperelliptische Curven vgl. auch die auf p. 720 erwähnte Note von Cremona.

**) Man bestätigt dies wieder direct durch Untersuchung der Functionaldeterminante von f, χ_1, χ_2, welche ja die Berührungspunkte auf $f=0$ bestimmt.

$$(7) \quad \begin{cases} y_1 = (\lambda - a_1)(a_3 - a_2), \quad y_2 = (\lambda - a_2)(a_3 - a_1) \\ y_1 y_2 y_3 (y_1 - k_1^2 y_2)(y_1 - k_2^2 y_2) \dots (y_1 - k^2_{p-2} y_2) = \frac{\sqrt{Q}}{m}, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung:

$$(8) \qquad k_r^2 = \frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1} \cdot \frac{a_{r+3} - a_1}{a_{r+3} - a_2} \qquad (r = 1, 2, \dots 2p - 1),$$

$$(9) \qquad m^2 = \frac{(a_4 - a_2)(a_5 - a_2) \dots (a_{2p+2} - a_2)}{(a_1 - a_2)^{2p} (a_3 - a_2)^{2p} (a_3 - a_1)},$$

so kann man die Functionen w_{ik}, l_i als homogene Functionen w_{ik}' n^{ter} und l_i' $(n - p - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung in y_1, y_2 darstellen und *erhält so für die x die in den y rationalen Ausdrücke:*

$$(10) \quad \varrho x_i = \gamma_1 w_{i1}' + \gamma_2 w_{i2}' + \gamma_3 w_{i3}' + m(\gamma l')_i y_1 y_2 y_3 (y_1 - k_1^2 y_2) \dots (y_1 - k^2_{p-2} y_2).$$

Ferner ergeben sich aus (7) und (8) die Relationen:

$$(11) \quad \begin{aligned} y_1 - y_2 &= (a_1 - a_2)(\lambda - a_3) \\ y_1 - k_r^2 y_2 &= \frac{(a_1 - a_2)(a_3 - a_2)}{a_{r+3} - a_2} (\lambda - a_{r+3}), \end{aligned}$$

so dass wegen (6):

$$(12) \quad Q = m^2 \cdot y_1 y_2 (y_1 - y_2)(y_1 - k_1^2 y_2)(y_1 - k_2^2 y_2) \dots (y_1 - k_{2p-1}^2 y_2).$$

Zwischen den y selbst besteht demnach wegen (7) *die Gleichung:*

$$(13) \quad y_3^2 y_1 y_2 (y_1 - k_1^2 y_2) \dots (y_1 - k_{p-2} y_2) = (y_1 - y_2)(y_1 - k^2_{p-1} y_2) \dots (y_1 - k^2_{2p-1} y_2).$$

Durch die Substitution (11) *ist also unsere C_n wirklich auf die früher angegebene und näher charakterisirte Normalform gebracht* (vgl. p. 720).

Denkt man sich wieder umgekehrt die Gleichung (13) gegeben und die dadurch dargestellte C_{p+2} mittelst der Formeln (10) in eine C_n, $f(x) = 0$, transformirt, so müssen den durch das Verschwinden der in (10) rechts stehenden Ausdrücke dargestellten drei Curven n^{ter} Ordnung sämmtliche Schnittpunkte mit der Curve (13) bis auf n gemeinsam sein; d. h. wenn β_1, β_2, β_3 homogene Parameter sind, so dürfen die Curven des Netzes:

$$(14) \quad \Sigma \Sigma w_{ik}' \gamma_i \beta_k + m(\beta \gamma l') y_1 y_2 y_3 (y_1 - k_1^2 y_2) \dots (y_1 - k^2_{p-2} y_2) = 0$$

die in (13) gegebene Curve $(p + 2)^{\text{ter}}$ Ordnung nur in n beweglichen Punkten treffen. Letzteres bestätigt man ebenso wie im Falle $p = 1$. In der Nähe des Punktes $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ nämlich kann man die Curve (14) ersetzen durch das System von $(n - 1)$ Geraden:

$$(\beta \gamma l') y_1 y_2 (y_1 - k_1^2 y_1) \dots (y_1 - k_{p-2}^2 y_2) = 0,$$

von denen p unabhängig von den β_i und gleichzeitig Tangenten der C_{p+2} in deren p-fachem Punkte sind. In letzterem haben also alle

Curven des Netzes (14) einen $(n-1)$-fachen Punkt; es fallen in ihm daher

$$(n-1)\,p + p = np$$

Schnittpunkte jeder dieser C_n mit der C_{p+2}. Man weist ferner (analog wie auf p. 909) leicht nach, dass weitere $n\,(p+2)$ feste Punkte jenes Netzes durch die Gleichung:

$$\Sigma\Sigma w_{ik}'\,\gamma_i\gamma_k = 0$$

auf der C_{p+2} gegeben sind. Dann ist aber die Zahl der beweglichen Schnittpunkte der letzteren und der Curven des Netzes in der That gleich

$$n\,(p+2) - np - n = n\,.$$

Die rechten Seiten der Gleichungen (10) können noch in der Weise reducirt werden, dass in ihnen keine gemeinsamen Verschwindungspunkte auftreten; und zwar in folgender Weise. Der Quotient $\frac{x_1}{x_3}$ ist eine algebraische Function von $y_1 : y_2$ und $y_3 : y_2$, deren Irrationalität nur durch die Gleichung (13) bedingt wird, und welche in n Punkten unendlich klein, in n anderen Punkten unendlich gross von der n^{ten} Ordnung wird, in allen anderen Punkten der Curve (13) dagegen endlich bleibt. Von den n Verschwindungspunkten der Function $\frac{x_1}{x_3}$ sind dabei nach den Sätzen über Schnittpunktsysteme (oder nach dem Abel'schen Theoreme) p durch die übrigen $n-p$ bestimmt; und Gleiches gilt von den n Unendlichkeitspunkten jener Function; in der That stellen ja $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ zufolge unserer letzten Betrachtungen Curven dar, die jedenfalls zu der Grundcurve C_{p+2} adjungirt sind, und deren Ordnung grösser als $p-1$ vorausgesetzt wurde (denn bei hyperelliptischen Curven mit $p > 2$ konnte ja ein Netz von adjungirten C_{n-3} nicht zur Transformation benutzt werden, vgl. p. 687).

Ist nun erstens n gerade: $n = 2\,m$, so können wir eine Function von genau denselben Eigenschaften auch in der Form

$$\frac{f_1^{(m)}(y_1, y_2) + \varphi_1^{(m-p-1)}(y_1, y_2)\sqrt{Y}}{f_3^{(m)}(y_1, y_2) + \varphi_3^{(m-p-1)}(y_1, y_2)\sqrt{Y}}$$

darstellen, wenn die f_i, φ_i homogene Function von y_1, y_2 der Ordnung m bez. $m-p-1$ bedeuten, und wenn:

$$(15)\qquad Y = y_1 y_2\,(y_1 - y_2)\,(y_1 - k_1^2 y_2)\ldots(y_1 - k_{2p-1}^2 y_2)\,.$$

Der Zähler des angegebenen Quotienten nämlich verschwindet in der That in $2\,m = n$ Punkten, bestimmt durch die Gleichung:

$$[f_1^{(m)}(y_1,\ y_2)]^2 - [\varphi_1^{(m-p-1)}(y_1,\ y_2)]^2\ Y = 0\,,$$

und derselbe enthält $2\,m - p$ willkürliche Constanten, so dass man

$2m-p$ dieser Verschwindungspunkte mit $2m-p$ Verschwindungspunkten von x_1 zusammenfallen lassen kann*); nach den Schnittpunktsätzen müssen dann auch die übrigen p übereinstimmen, denn die durch Verschwinden des Zählers obiger Function dargestellte Curve (wenn man vermöge (7) y_3 statt $\sqrt{Y}$ einführt) ist ja zu der Grundcurve adjungirt. Analoges gilt für den Nenner; man kann daher, wenn C eine Constante bedeutet, setzen:

$$\frac{x_1}{x_3} = C\frac{f_1^{(m)}(y_1, y_2) + \varphi_1^{(m-p-1)}(y_1, y_2)\sqrt{Y}}{f_3^{(m)}(y_1, y_2) + \varphi_3^{(m-p-1)}(y_1, y_2)\sqrt{Y}}$$

und ebenso, unter C' eine zweite Constante verstanden:

$$\frac{x_2}{x_3} = C'\frac{f_2^{(m)}(y_1, y_2) + \varphi_2^{(m-p-1)}(y_1, y_2)\sqrt{Y}}{f_3^{(m)}(y_1, y_2) + \varphi_3^{(m-p-1)}(y_1, y_2)\sqrt{Y}}.$$

Damit ist die erwähnte Reduction der Parameterdarstellung geleistet.

Ist zweitens n ungerade: $n = 2m+1$, so beweist man auf analoge Art die Richtigkeit folgender Gleichungen ($i = 1, 2$):

$$\frac{x_i}{x_3} = C^{(i)}\cdot\frac{f_i^{(m)}(y_1, y_2)\sqrt{y_1} + \varphi_i^{(m-p)}(y_1, y_2)\sqrt{Y'}}{f_3^{(m)}(y_1, y_2)\sqrt{y_1} + \varphi_3^{(m-p)}(y_1, y_2)\sqrt{Y'}}.$$

wo: $\quad Y' = y_2(y_1-y_2)(y_1-k_1^2 y_2)\dots(y_1-k^2_{2p-1}y_2)$.

Die so gewonnen Resultate lassen sich noch in mannigfach anderer Weise aussprechen je nachdem, wie man die verschiedenen Factoren von Q auf die beiden Wurzelzeichen vertheilt. Allgemein können wir sie daher in folgendem Satze zusammenfassen:

Die Coordinaten der Punkte einer hyperelliptischen Curve n^{ter} Ordnung vom Geschlechte p lassen sich als Functionen eines Parameters z darstellen in der Form:

$$\varrho x_i = f_i^{(k)}(z)\sqrt{M} + \varphi_i^{(h)}(z)\sqrt{N}, \tag{16}$$

wo immer: $k < \frac{1}{2}n$, $h \gtrless \frac{1}{2}n$, $h+k = n-p-1$, und wo M von der Ordnung $n-2k$, N von der Ordnung $n-2h$ in z sein muss.

Die Gleichungen (16) kann man zunächst wieder benutzen, um die Doppelpunkte der C_n zu bestimmen. Die Zahl der letzteren ist

*) Schreibt man kurz y für $y_1 : y_2$ und $f(y)$, $\varphi(y)$ statt $f(y_1, y_2)$, $\varphi(y_1, y_2)$, indem man gleichzeitig die Indices an f_1 und φ_1 fortlässt, und bezeichnet diese $n-p$ Punkte durch $y_1, y_2, y_3, \dots y_{n-p}$, so kann man den Zähler in der Form darstellen ($\nu = 2m-p$):

$$f(y)+\varphi(y)\sqrt{Y} = \begin{vmatrix} y^{m-p-1}\sqrt{Y}, & y^{m-p-2}\sqrt{Y}, & \dots\sqrt{Y}, & y^m, & y^{m-1}, & \dots y, & 1 \\ y_1^{m-p-1}\sqrt{Y_1}, & y_1^{m-p-2}\sqrt{Y_1}, & \dots\sqrt{Y_1}, & y_1^m, & y_1^{m-1}, & \dots y_1, & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_\nu^{m-p-1}\sqrt{Y_\nu}, & y_\nu^{m-p-2}\sqrt{Y_1}, & \dots\sqrt{Y_1}, & y_\nu^m, & y_\nu^{m-1}, & \dots y_\nu, & 1 \end{vmatrix}.$$

gleich der Zahl der Werthepaare z, z', welche den Gleichungen genügen:

$$f_i^{(k)}(z)\sqrt{M} + \varphi_i^{(h)}(z)\sqrt{N} = \sigma\left\{f_i^{(k)}(z')\sqrt{M'} + \varphi_i^{(h)}(z')\sqrt{N'}\right\}.$$

Bildet man hier, wie auf p. 914, die Functionen F, Φ, F', Φ' und mit Hülfe derselben die Gleichungen:

$$F^2 N - \Phi^2 M \equiv \Omega(z, z') = 0,$$
$$F'^2 N' - \Phi'^2 M' \equiv \Omega(z', z) = 0,$$

so sind letztere für das erste Argument vom Grade $n-2$, für das zweite Argument vom Grade $2n-2p-4$; und durch Elimination von z' ergibt sich (nach Absonderung eines Factors $\Omega(z, z)$ von dem Resultate) eine Gleichung vom Grade

$$(n-2)^2 + 4(n-p-2)^2 - (3n-2p-6).$$

Von den Lösungen der letzteren sind noch je vierfach zählend die den Gleichungen $F=0$, $\Phi=0$ zugleich genügenden Werthepaare z, z' abzuziehen, deren Zahl gleich

$$(h+k-1)(h+k-2) = (n-p-2)(n-p-3)$$

gefunden wird. Es bleibt daher, wie es sein muss, *eine Gleichung vom Grade*

$$(n-2)^2+4(n-p-2)^2-(3n-2p-6)-4(n-p-2)(n-p-3)$$
$$= (n-1)(n-2)-2p,$$

von deren Wurzeln je zwei zu einem Doppelpunkte gehören.

Dass unsere früheren Erörterungen über das Abel'sche Theorem, über das Jacobi'sche und das erweiterte Umkehrproblem*) und über Berührungscurven hier ebenso gültig bleiben, daran braucht wohl nur kurz erinnert zu werden. Hervorgehoben mag indess werden, dass für die Normalform (13) der hyperelliptischen Curven, jede adjungirte C_{n-3} (d. i. hier C_{p-1}) in $p-1$ Gerade durch den p-fachen Punkt zerfällt. —

Schliesslich wollen wir noch kurz auf *das Problem der Dreitheilung im Falle* $p=2$ hinweisen, welches ausführlich in rein algebraischer Weise behandelt worden ist und so zu interessanten Fragen aus der Theorie der binären Formen geführt hat. Die Gleichung der Grundcurve (C_4) sei:

---

*) In Betreff der hyperelliptischen Integrale vgl. das auf p. 777 Gesagte, und für das Abel'sche Theorem den auf p. 815 erwähnten Aufsatz von Abel. Ueber die Lösung des Umkehrproblems vgl. die auf p. 765 genannten Arbeiten von Weierstrass, Neumann und Prym; für $p=2$ insbesondere den auf p. 803 genannten Aufsatz von Rosenhain. Das erweiterte Umkehrproblem für $p=2$ ist oben (p. 866 ff.) behandelt; vgl. auch den dort erwähnten Aufsatz von Brill.

(17) $$z^2\varphi - \psi = 0,$$

wo φ, ψ homogene Functionen bez. 2ter und 3ter Ordnung in x, y sind. Wir bezeichnen durch s und t die beiden Normalintegrale erster Gattung; die oberen Grenzen deuten wir durch hinzugefügte obere Indices an; die untere Grenze wählen wir constant, so dass, wenn σ, τ gegebene Grössen sind, das Jacobi'sche Umkehrproblem in folgenden Gleichungen auftritt:

$$s + s' = \sigma, \quad t + t' = \tau.$$

Es sei nun v eine noch unbestimmte homogene Function dritter Ordnung in x, y; die Gleichung

(18) $$z\varphi - v = 0$$

stellt dann eine Curve dritter Ordnung dar, welche ebenfalls in $x = 0$, $y = 0$ einen Doppelpunkt hat, und zwar berühren dessen Zweige die Zweige der Curve (17). Von den zwölf Schnittpunkten beider Curven fallen daher sechs in den Doppelpunkt; die übrigen erhält man aus der Gleichung 6ten Grades:

(19) $$v^2 - \varphi\psi = 0 \quad \text{oder} \quad v^2 - f = 0, \quad \text{wenn} \quad f = \varphi \,.\, \psi\,.$$

welche aus (17) und (18) hervorgeht. Insbesondere wollen wir aber solche Functionen v suchen, dass die zugehörigen Curven (18) die C_4 in zwei verschiedenen Punkten je zweipunktig berühren (dreipunktig schneiden). Für diese muss die Gleichung (19) zweimal drei gleiche Wurzeln haben, es muss also identisch

(20) $$v^2 - f = u^3$$

werden, wenn u eine quadratische Form bezeichnet; oder — was dasselbe ist — *die gegebene Form sechster Ordnung f ($= \varphi\psi$) muss in die Form $f = v^2 - u^3$ gebracht werden können.**) Jeder Art, die Function f in dieser Form darzustellen, entspricht eine der gesuchten Berührungscurven, oder vielmehr deren zwei, welche durch die Gleichungen

$$z\varphi - v = 0 \quad \text{und} \quad z\varphi + v = 0$$

gegeben sind.

In transcendenter Form wird dasselbe Problem dargestellt durch die Gleichungen:

$$3\,(s^{(1)} + s^{(2)}) = c\,, \quad 3\,(t^{(1)} + t^{(2)}) = \gamma\,,$$

wo c und γ Constanten bedeuten, welche unabhängig von den Con-

*) Dies Transformationsproblem wurde zuerst von Cayley behandelt: Quaterly Journal, Bd. 9. Vollständig und im Zusammenhange mit der Dreitheilungsaufgabe erledigt findet man dasselbe bei Clebsch: Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Bd. 14, 1869; vgl. die Noten dazu von Brioschi: Annali di matematica Serie 2, t. VII.

stanten der Function v sind. Aber die Gleichung (18) wird offenbar auch in der hier verlangten Weise befriedigt durch eine uneigentliche Curve dritter Ordnung, welche aus einer dreifach zählenden, durch den Doppelpunkt gehenden Geraden besteht. Mag irgend eine Linie dieser Art die gegebene Curve in zwei Punkten schneiden, denen die Integrale $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$, $\tau^{(1)}$, $\tau^{(2)}$ entsprechen; man hat dann auch:

$$3\,(\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}) = c, \quad 3\,(\tau^{(1)} + \tau^{(2)}) = \gamma;$$

oder endlich, wenn P, Q Systeme zusammengehöriger Periodicitätsmoduln bezeichnen:

$$(21) \qquad \begin{aligned} s^{(1)} + s^{(2)} &= \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} + \tfrac{1}{3} P, \\ t^{(1)} + t^{(2)} &= \tau^{(1)} + \tau^{(2)} + \tfrac{1}{3} Q, \end{aligned}$$

was die Gleichungen des Problems der speciellen Dreitheilung sind (vgl. p. 840). Für $P = 0$, $Q = 0$ hat man wieder die eben angedeutete uneigentliche und zugleich unbestimmte Lösung. Es bleiben noch $3^4 - 1 = 80$ *eigentliche Lösungen übrig, welche den verschiedenen Arten entsprechen, die Function f auf die Form $v^2 - u^3$, zu bringen.*

Aber von diesen 80 Lösungen stehen immer zwei in solcher Beziehung zu einander, dass wenn die eine auf v führt, die andere $-v$ ergibt. In der That, betrachten wir zwei Lösungen, für welche die Perioden P, Q einander entgegengesetzt sind (sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden), bezeichnen wir die der einen zugehörigen Integrale durch die Indices 1, 2, die der andern durch 3, 4, so ist nach (21):

$$\begin{aligned} s^{(1)} + s^{(2)} + s^{(3)} + s^{(4)} + \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} &= 3\,(\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}) = c \\ t^{(1)} + t^{(2)} + t^{(3)} + t^{(4)} + \tau^{(1)} + \tau^{(2)} &= 3\,(\tau^{(1)} + \tau^{(2)}) = \gamma\,. \end{aligned}$$

Die Berührungspunkte der beiden benutzten Berührungscurven liegen also mit den Punkten, in welche eine durch den Doppelpunkt gezogene Gerade schneidet, in einer Curve dritter Ordnung der Schaar (18). Aber letztere wird von der beliebig durch den Doppelpunkt gelegten Geraden in vier Punkten geschnitten, besteht also aus ihr und einem Kegelschnitte; dieser endlich muss die C_4 im Doppelpunkte noch in vier Punkten schneiden, also in ihm selbst einen Doppelpunkt besitzen, d. i. in zwei Gerade zerfallen. Daher liegen die Berührungspunkte der einen Berührungscurve mit denen der andern auf zwei durch den Doppelpunkt gehenden Geraden, und zwar so, dass jede der Geraden einen Berührungspunkt von jeder der beiden Curven dritter Ordnung enthält, denn andernfalls müssten auch Gleichungen der Form bestehen:

$$\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} = c', \quad \tau^{(1)} + \tau^{(2)} = \gamma'.$$

Die Gleichung $v^2 - f = 0$ muss also für beide Curven dieselben Wurzeln liefern, d. h. die entsprechenden beiden Functionen v können sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden.*) Zwei solche Lösungen führen also auf dieselbe Transformation von f; und man hat nur 40 wesentlich verschiedene Lösungen. Die letzteren zeigen nun weiter eine sehr merkwürdige Gruppirung zu einander, wie sich einerseits aus der Theorie der binären Formen, andererseits aber auch aus der Theorie der Theilungsgleichungen für $p = 2$ ergibt.**) Es ist hier jedoch nicht der Ort, noch näher auf diese Untersuchungen einzugehen. Wir begnügen uns, nochmals auf den innigen Zusammenhang rein algebraischer Fragen mit denjenigen Problemen hinzuweisen, welche aus dem Umkehr- und dem Theilungsprobleme der Abel'schen Integrale entspringen, ein Zusammenhang, den wir für $p = 1$ schon bei Betrachtung der Punktsysteme auf einer Curve dritter Ordnung wiederholt hervorgehoben und erläutert haben (vgl. besonders p. 648 ff.).

*) Dies folgt übrigens auch schon aus dem völlig symmetrischen Verhalten der Grundcurve gegen die Linie $z = 0$.

**) Vgl. Camille Jordan: Comptes rendus, April 1869.

Siebente Abtheilung.

Die Connexe.

I. Ternäre algebraische Formen mit mehreren Reihen von Veränderlichen. — Aequivalente Systeme.

Als Gegenstand unserer Untersuchung, als Grundgebilde, betrachteten wir bisher meist eine einzelne Curve, sei es, dass wir dieselbe als Punkt- oder als Linien-Gebilde auffassten, oder — algebraisch zu reden — als *Grundform* nahmen wir eine einzelne ternäre Form an, deren Verschwinden eben jene Curve darstellte; und das Studium der Invarianten, Covarianten und Zwischenformen dieser Grundform erwies sich als wesentlich identisch mit dem Studium der projectivischen Eigenschaften jener Grundcurve und der aus ihr abgeleiteten Gebilde. Die Algebra an sich jedoch muss sich die Aufgabe stellen, auch alle Grundformen zu untersuchen, welche mehrere Reihen von Veränderlichen, sowohl Punktcoordinaten x_i, y_i, ... als Liniencoordinaten u_i, v_i, ... enthalten, wie ersteres z. B. schon bei den Polaren einer Curve der Fall ist; eine Forderung, welche ihrer Allgemeinheit wegen der Geometrie zunächst ferner liegen würde. Da ist es aber sehr wichtig, dass *das Studium dieser ganz allgemeinen Bildungen immer zurückgeführt werden kann auf das Studium eines simultanen Systems von Formen, deren jede nur eine Reihe von Punkt- oder nur eine Reihe von Linien- oder je eine Reihe von Punkt- und Linien-Coordinaten enthält* (vgl. auch p. 269). Mit der Curve (als Punkt- oder Tangentengebilde) algebraisch in diesem Sinne gleichberechtigt tritt hier also das durch Nullsetzen einer beliebigen Zwischenform*) dargestellte Gebilde auf, welches man als *Connex* bezeichnet, und dessen nähere Betrachtung nun auch von der Geometrie gefordert werden muss, wie ja überhaupt Algebra und Geometrie bestimmt sind, sich in beständiger Wechselwirkung gegenseitig anzuregen und zu fördern. Ehe wir jedoch auf die Connexe weiter eingehen, mögen die angedeuteten

---

*) Bisher hatten wir dagegen Zwischenformen nur insofern berücksichtigt, als dieselben unter den Functionalinvarianten einer Form mit einer Reihe von Veränderlichen auftreten.

algebraischen Theorien hier mit einigen Worten erörtert und an Beispielen erläutert werden, ohne dass es dabei in der Absicht liegen kann, Vollständigkeit zu erreichen.

Zwei Systeme von algebraischen Formen wollen wir *äquivalent* nennen, wenn sämmtliche Functionalinvarianten des einen unter denen des andern vorhanden sind, und umgekehrt, wenn also die Gesammtheit der zu bildenden Functionalinvarianten für beide Systeme identisch ist; und dies wird immer und nur dann eintreten, wenn alle Formen des einen Systems simultane Covarianten der Formen des andern Systems sind, und umgekehrt. Für ein gegebenes System wird man daher auf sehr mannigfache Weise äquivalente Systeme finden können; man wird aber je nach den für die Untersuchung als massgebend gewählten Gesichtspunkten besonders passende Systeme auswählen. Für unseren Zweck ist besonders ein solches System von Wichtigkeit, welches wir als *„das reducirte äquivalente System"* der vorliegenden Formen bezeichnen wollen, und welches eben dadurch ausgezeichnet ist, dass jede Form desselben nur eine Reihe von Coordinaten gleicher Art enthält, wenn auch in der Grundform mehrere Reihen derselben Art vorkommen sollten. Hervorgehoben sei dabei sogleich, dass jede Form, welche aus einer gegebenen Form Π durch den invarianten Process:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} y_2 + \frac{\partial \Pi}{\partial x_3} y_3,$$

d. i. durch Polarenbildung, abgeleitet wird, als Covariante der Form Π zu betrachten ist, wie dies in der That auch immer mit den Polaren einer Grundcurve geschah. Das äquivalente System also einer Form mit z. B. zwei Reihen von Veränderlichen (x_i, y_i), welche Polare irgend einer Ordnung einer Form mit nur einer Reihe von Punktcoordinaten ist, besteht einfach aus dieser letzteren Form selbst. Die vorliegende Fragestellung wird daher erst von Interesse bei Formen, die symbolisch in der Gestalt*):

$$f = a_x^m b_y^n \tag{1}$$

darstellbar sind, ohne doch aus der Form $a_x^m b_x^n$ durch Polarenbildung zu entstehen. Der einfachste Fall ist hier der, wo $m = n = 1$; dann stellt die Gleichung $a_x b_y = 0$ die allgemeinste dualistische Verwandtschaft dar, indem (für $\alpha_{ik} = a_i b_k$) jedem Punkte y eine Gerade mit den Coordinaten:

$$\varrho v_i = \alpha_{i1} y_1 + \alpha_{i2} y_2 + \alpha_{i3} y_3$$

zugeordnet wird. Nur für den Fall $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ ist diese Verwandtschaft identisch mit der durch den Kegelschnitt $\Sigma\Sigma \alpha_{ik} x_i x_k = 0$, d. i. $a_x b_x = 0$,

*) Diese Symbolik wurde schon gelegentlich auf p. 446 ff. benutzt.

begründeten Polarreciprocität; nur in diesem Falle also ist $a_x b_y$ die Polare der Form $a_x b_x$.*)

Wir wollen uns im Folgenden auf das eben angeführte Beispiel beschränken, d. h. auf den Fall, dass *zwei Reihen von Punktcoordinaten* in einer Grundform (1) auftreten. Es wird dies hinreichen, um an ihm das Wesentliche der betreffenden Untersuchungen zu erläutern.**) In diesem Falle behaupten wir, dass *für $m > n$ das System der Formen:*

$$(2) \quad \varphi_0 = a_x^m b_x^n, \quad \varphi_1 = a_x^{m-1} b_x^{n-1}(abu), \ldots \varphi_n = (abu)^n a_x^{m-n}$$

mit der Form $f = a_x^m b_y^n$ in angegebenem Sinne äquivalent sei. Die Form f ist dann also durch eine Reihe von Formen ersetzt, die insofern einen einfacheren Charakter zeigen, als nur eine unter ihnen von demselben Gesammtgrade wie f ist, dabei aber nur eine Reihe von Punktcoordinaten enthält, die anderen Formen dagegen sämmtlich von niedrigerem Gesammtgrade sind, wenn man unter Gesammtgrad die Summe der Grade in den x und u versteht, also hier bez. die Zahlen:

$$m + n - 1, \quad m + n - 2, \ldots m.$$

Wir haben nun zu zeigen, dass die φ_i Functionalinvarianten von f sind, und dass umgekehrt f eine simultane Covariante der φ_i ist. Ersteres aber ist schon aus dem symbolischen Bildungsgesetze der φ_i deutlich; überdies sei erwähnt, dass die φ_i aus f durch wiederholte Anwendung eines invarianten Processes entstehen (p. 269). Es entsteht nämlich φ_0 einfach aus f, indem man $x = y$ setzt, und in derselben Weise entstehen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ aus den folgenden Bildungen:

$$mn\varphi_1' = mn\, a_x^{m-1} b_y^{n-1} (abu)$$
$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial y_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial y_2}\right) u_1 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial y_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_3}\right) u_2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial y_1}\right) u_3,$$

$$(m-1)(n-1)\varphi_2' = (m-1)(n-1)\, a_x^{m-2} b_y^{n-2} (abu)^2$$
$$= \left(\frac{\partial^2 \varphi_1'}{\partial x_2 \partial y_3} - \frac{\partial^2 \varphi_1'}{\partial x_3 \partial y_2}\right) u_1 + \left(\frac{\partial^2 \varphi_1'}{\partial x_3 \partial y_1} - \frac{\partial^2 \varphi'_1}{\partial x_1 \partial y_3}\right) u_2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi_1'}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 \varphi_1'}{\partial x_2 \partial y_1}\right) u_3,$$

u. s. f. Man hat dann also:

$$\varphi_0 = (f)_{x=y}, \qquad \varphi_1 = (\varphi_1')_{x=y}, \qquad \varphi_2 = (\varphi_2')_{x=y}, \ldots$$

*) Auf die bilinearen Formen $a_x b_y$ werden wir im Folgenden nicht zurückkommen. Es sei daher hier bemerkt, dass dieselben unter den verschiedensten Gesichtspunkten näher untersucht sind. Für die algebraische Theorie vgl. besonders die Aufsätze von Kronecker in den Monatsberichten der Berliner Akademie vom Jahre 1874.

**) Allgemein ist das Problem für Formen mit beliebig vielen Veränderlichen und mit beliebig vielen Reihen von solchen behandelt von Clebsch in der auf p. 269 erwähnten Abhandlung, welche den Ausführungen des Textes zu Grunde liegt. Eine Inhaltsübersicht über dieselbe findet man auch in Math. Annalen, Bd. 5, p. 427.

Es bleibt uns jetzt nur noch zu beweisen, dass auch f eine simultane Functionalinvariante der φ_i ist. Dies geschieht, indem wir f direct als Aggregat von Formen darstellen, welche aus den Formen φ_i durch einen invarianten Process entstehen. In letzteren nämlich setzen wir zunächst:

$$u_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2, \qquad u_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3, \qquad u_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1;$$

d. h. wir bilden aus ihnen die Formen:

$$(3) \qquad \begin{aligned} &\psi_0 = a_x^m b_x^n, \qquad \psi_1 = a_x^{m-1} b_x^{n-1} (a_x b_y - a_y b_x), \\ &\psi_2 = a_x^{m-2} b_x^{n-2} (a_x b_y - b_x a_y)^2, \ldots \psi_n = a_x^{m-n} (a_x b_y - b_x a_y)^n. \end{aligned}$$

Ferner bezeichnen wir mit D den invarianten Polarenprocess:

$$D\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} y_2 + \frac{\partial \Pi}{\partial x_3} y_3 = \Pi'$$

$$D^2\Pi = \frac{\partial \Pi'}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial \Pi'}{\partial x_2} y_2 + \frac{\partial \Pi'}{\partial x_3} y_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Dann sind offenbar alle Formen $D^k \psi_i$ Functionalinvarianten der Formen φ_i, und wir behaupten, dass *sich immer die Form $f = a_x^m b_y^n$ in der Gestalt darstellen lasse:*

$$(4) \qquad f = \alpha_0 D^n \psi_0 + \alpha_1 D^{n-1} \psi_1 + \alpha_2 D^{n-2} \psi_2 + \ldots + \alpha_n \psi_n,$$

wo die α_i rein numerische, eindeutig bestimmte Zahlenfactoren bedeuten.

Für die Bestimmung der Coëfficienten α_i ergeben sich in der That durch Vergleichung beider Seiten von (4) nur *lineare* Gleichungen, und zwar gerade in der erforderlichen Anzahl. Sei z. B. $m = 3$, $n = 2$, also:

$$f = a_x^3 b_y^2,$$

und ferner zur Abkürzung:

$$f' = a_x^2 a_y b_x b_y, \qquad f'' = a_x a_y^2 b_x^2,$$

so wird:

$$(5) \qquad \begin{aligned} D^2 \psi_0 &= 2f + 12 f' + 6 f'' \\ D\psi_1 &= f + f' - 2f'' \\ \psi_2 &= f - 2f' + f''. \end{aligned}$$

Die Gleichung (4) geht daher über in:

$$f = (2\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) f + (12\alpha_0 + \alpha_1 - 2\alpha_2) f' + (6\alpha_0 - 2\alpha_1 + \alpha_2) f'';$$

und also hat man für die α_i die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 &= 1, \\ 12\alpha_0 + \alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0, \\ 6\alpha_0 - 2\alpha_1 + \alpha_2 &= 0, \end{aligned}$$

und hieraus durch Auflösung:

(6) $$\alpha_0 = \tfrac{1}{20}, \quad \alpha_1 = \tfrac{2}{5}, \quad \alpha_2 = \tfrac{1}{2},$$

so dass:

$$f = \tfrac{1}{20} D^2\psi_0 + \tfrac{2}{5} D\psi_1 + \tfrac{1}{2}\psi_2 .$$

In gleicher Weise sind im allgemeinen Falle die Glieder der rechten Seite lineare Functionen der $n+1$ Formen:

$$f = a_x{}^m b_y{}^n, \quad f' = a_x{}^{m-1} b_y{}^{n-1} a_y b_x, \ldots f^{(n)} = a_x{}^{m-n} b_x{}^n a_y{}^n,$$

so dass aus (4):

$$f = \beta_0 f + \beta_1 f' + \beta_2 f'' + \ldots + \beta_n f^{(n)},$$

wo nun die β_i lineare Combinationen der α_i sind, und für letztere die Gleichungen bestehen müssen:

$$\beta_0 = 1, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 0, \ldots \beta_n = 0 .$$

Wir haben nur noch zu zeigen, dass diese letzteren Gleichungen immer ein *bestimmtes* Werthsystem der α_i ergeben. Nun muss die für f identische Gleichung (4) identisch erfüllt bleiben, wenn man setzt:

$$y_i = x_i + \lambda z_i,$$

und zwar unabhängig von λ; d. h. es müssen dann die Coëfficienten gleicher Potenzen von λ auf beiden Seiten von (4) einander gleich sein. Durch diese Substitution geht aber

ψ_1 über in $\lambda\,(a_x b_z - a_z b_x)\, a_x{}^{m-1} b_x{}^{n-1}$ und

allgemein ψ_i „ „ $\lambda^i\,(a_x b_z - a_z b_x)^i\, a_x{}^{m-i} b_x{}^{n-i}$.

Setzen wir also in der so resultirenden Gleichung $\lambda = 0$, so erhalten wir eine Gleichung, in der nur α_0 vorkommt, wodurch diese Zahl vollkommen bestimmt ist. In dem Coëfficienten von λ auf der rechten Seite kommen neben Gliedern, die aus $D^n\psi_0$ entstehen, nur solche vor, welche von $D^{n-1}\psi_1$ herrühren; in ihm kommt also nur α_0 und α_1 vor, wodurch auch α_1 bestimmt ist, u. s. f. In dem Coëfficienten von λ^ν endlich kommt neben den jetzt schon bekannten Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{\nu-1}$ nur noch α_ν vor. Es sind also wirklich alle α_i successive zu berechnen, *wodurch das Bestehen der Gleichung* (4) *erwiesen ist.**)

Führen wir diese Rechnung noch an unserm Beispiele, d. i. für die Form $f = a_x{}^3 b_y{}^2$, durch. Bedienen wir uns der Abkürzungen:

$$f_{00} = a_x{}^3 b_x{}^2, \quad f_{01} = a_x{}^3 b_x b_z, \quad f_{10} = a_x{}^2 a_z b_x{}^2, \quad f_{11} = a_x{}^2 a_z b_x b_z, \text{ etc.},$$

*) Die wirkliche Bestimmung der Zahlen α geschieht im Allgemeinen, indem man von den entsprechenden Reihenentwicklungen für binäre Formen ausgeht, wie dieselben von Gordan (Math. Annalen, Bd. 3) und Clebsch (Theorie der binären Formen §. 8) aufgestellt sind. Vgl. Clebsch a. a. O. und Gordan: Math. Annalen, Bd. 5, p. 100.

wo also die Indices anzeigen sollen, wie viele symbolische Factoren a_x, b_x durch Factoren a_z, b_z zu ersetzen sind, so erhalten wir durch die Substitution $y = x + \lambda z$:

$$\begin{aligned} f &= a_x^3 (b_x + \lambda b_z)^2 &&= f_{00} + 2 f_{01} \lambda + f_{02} \lambda^2 \\ f' &= a_x^2 b_x (a_x + \lambda a_z)(b_x + \lambda b_z) &&= f_{00} + (f_{01} + f_{10}) \lambda + f_{11} \lambda^2 \\ f'' &= a_x b_x^2 (a_x + \lambda a_z)^2 &&= f_{00} + 2 f_{10} \lambda + f_{20} \lambda^2 . \end{aligned}$$

Es wird ferner auf der linken Seite von (4):

$$f = f_{00} + 2 \lambda f_{01} + \lambda^2 f_{02}$$

und wegen (5) auf der rechten Seite:

$$\begin{aligned} D^2 \psi_0 &= 20 f_{00} + \lambda (16 f_{01} + 24 f_{10}) + \lambda^2 (2 f_{02} + 12 f_{11} + 6 f_{20}) \\ D \psi_1 &= \lambda (3 f_{01} - 3 f_{10}) + \lambda^2 (f_{02} + f_{11} - 2 f_{20}) \\ \psi_2 &= \lambda^2 (f_{02} - 2 f_{11} + f_{20}) . \end{aligned}$$

Es ergeben sich hieraus die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1 &= 20 \alpha_0 \\ 2 f_{01} &= (16 \alpha_0 + 3 \alpha_1) f_{01} + (24 \alpha_0 - 3 \alpha_1) f_{10} \\ f_{02} &= (2 \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) f_{02} + (12 \alpha_0 + \alpha_1 - 2 \alpha_2) f_{11} + (6 \alpha_0 - 2 \alpha_1 + \alpha_2) f_{20} ; \end{aligned}$$

und also für die α_i:

$$1 = 20 \alpha_0 , \qquad 2 = 16 \alpha_0 + 3 \alpha_1 , \qquad 1 = 2 \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 ,$$

woraus man wieder die Werthe (6) findet.

Aus dem Gesagten wird man leicht übersehen, wie man beim Auftreten von mehreren Reihen Punktcoordinaten oder beim gleichzeitigen Auftreten von Liniencoordinaten in der Grundform f zu verfahren hat. Es soll auch dies nur an einem Beispiele erläutert werden: *Wir suchen das reducirte äquivalente System der Form:*

$$f = a_x^2 b_y^2 u_\alpha^2 , \tag{7}$$

welche zwei Reihen Punkt- und eine Reihe Liniencoordinaten enthält. Wir verfahren zunächst wie bei der Form (1), indem wir nur die x und y berücksichtigen; an Stelle der Formen (2) treten dann, wenn wir v für den dort gebrauchten Buchstaben u schreiben, die folgenden:

$$\varphi_0 = a_x^2 b_x^2 u_\alpha^2 , \qquad \varphi_1 = a_x b_x (a b v) u_\alpha^2 , \qquad \varphi_2 = (a b v)^2 u_\alpha^2 . \tag{8}$$

Von diesen Formen gehört die erste schon dem reducirten Systeme von f an. Die letzte enthält zwei Reihen Liniencoordinaten (u und v) und ist daher in derselben Weise weiter zu behandeln, wie die Form (1), nur dualistisch entsprechend. Die Form φ_2 ist also äquivalent mit dem Systeme folgender Formen:

$$\varphi_{20} = (a b u)^2 u_\alpha^2 , \qquad \varphi_{21} = \tfrac{1}{4} (\Omega_x \varphi_2)_{u=v} , \qquad \varphi_{22} = \tfrac{1}{4} (\Omega_x^2 \varphi_2)_{u=v} ,$$

wenn mit Ω_x der invariante Process:

$$(9)\quad \Omega_x \Pi = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_2 \partial v_3} - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_3 \partial v_2}\right) x_1 + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_3 \partial v_1} - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_1 \partial v_3}\right) x_2 + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_1 \partial v_2} - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_2 \partial v_1}\right) x_3$$

bezeichnet wird. Nun ist aber:

$$\tfrac{1}{4}\, \Omega_x \varphi_2 = (a b v)\, u_\alpha\, (a_x b_\alpha - b_x a_\alpha)\,, \qquad \tfrac{1}{4}\, \Omega_x^2 \varphi_2 = (a_x b_\alpha - b_x a_\alpha)^2$$

Das reducirte äquivalente System der Form φ_2 besteht daher aus den Bildungen:

$$(10)\quad \varphi_{20} = (a b u)^2 u_\alpha^2,\ \ \varphi_{21} = (a_x b_\alpha - b_x a_\alpha)(a b u) u_\alpha,\ \ \varphi_{22} = (a_x b_\alpha - b_x a_\alpha)^2.$$

Es bleibt jetzt noch die Form φ_1 zu behandeln. Dieselbe betrachten wir zunächst als nur von u und v abhängig, wenden also auf sie wieder den durch (9) definirten Process Ω_x an, indem wir nur auf der rechten Seite von (9) y_i statt x_i schreiben. Dann wird φ_1 zunächst äquivalent mit:

$$(11)\quad \varphi_{10} = (a b u)\, a_x b_x u_\alpha^2 \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}\, \Omega_y \varphi_1 = (a_y b_\alpha - a_\alpha b_y)\, a_x b_x u_\alpha\,.$$

Letztere Form enthält noch zwei Reihen Punkt- und eine Reihe Liniencoordinaten; ihr reducirtes äquivalentes System ist daher wieder wie für die Form (7) zu bilden. Lassen wir also die u unberücksichtigt, so erhalten wir die Formen:

$$(12)\qquad \varphi_{11} = (a_x b_\alpha - a_\alpha b_x)\, a_x b_x u_\alpha\,, \quad \varphi_{12} = -\, \Omega_v' \left(\tfrac{1}{2}\, \Omega_y \varphi_1\right),$$

wenn Ω_v' den zu Ω_x dualistischen Process bedeutet, d. h. durch (9) definirt ist, wenn man auf der rechten Seite x statt u, y statt v und v statt x schreibt. Es ist also:

$$\begin{aligned} \varphi_{12} &= -\, \{ b_\alpha u_\alpha\, \Omega_v' (a_y a_x b_x) - a_\alpha u_\alpha\, \Omega_v' (b_y a_x b_x) \} \\ &= -\, \{ b_\alpha u_\alpha\, (b a v)\, a_x - a_\alpha u_\alpha\, (a b v)\, b_x \} = (a b v)\, (a_x b_\alpha + a_\alpha b_x)\, u_\alpha\,. \end{aligned}$$

Die Formen φ_{11}, φ_{12} stehen dann zu $\Omega_y \varphi_1$ in derselben Beziehung wie die Formen (8) zu (7). Es enthält aber die Form φ_{12} wieder zwei Reihen Liniencoordinaten; sie ist daher äquivalent mit den Formen:

$$(13)\qquad \varphi_{12}' = (a b u)\, u_\alpha\, (a_x b_\alpha + a_\alpha b_x) \quad \text{und} \quad \Omega_y \varphi_{12}\,,$$

wo nun:

$$(14)\qquad \Omega_y \varphi_{12} = (a_y b_\alpha - b_y a_\alpha)\, (a_x b_\alpha + a_\alpha b_x)\,.$$

Diese Form aber enthält wieder zwei Reihen Punktcoordinaten, ist also äquivalent mit den Formen:

$$(15)\quad \varphi_{12}'' = (a_x^2 b_\alpha^2 - a_\alpha^2 b_x^2)\,,\ \ \varphi_{12}''' = -\, \tfrac{1}{2}\, \Omega_u' (\Omega_y \varphi_{12}) = (a b u)\, a_\alpha b_\alpha\,.$$

Das reducirte äquivalente System der Form (7) würde daher zunächst durch die neun Formen φ_0, φ_{10}, φ_{11}, φ_{12}', φ_{12}'', φ_{12}''', φ_{20}, φ_{21}, φ_{22} gegeben sein, welche bez. in den Gleichungen (8), (11), (12), (13),

(15), (10) definirt sind. Aber *von diesen Formen sind noch zwei überflüssig,* insofern dieselben durch einen invarianten Process aus den übrigen sechs Formen entstehen. Dies liegt daran, dass die Form $\varphi_1 = (a b v)\, a_x b_x u_\alpha^2$ der Differentialgleichung*)

$$(16) \qquad \delta \varphi_1 = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1 \partial v_1} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2 \partial v_2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_3 \partial v_3} = 0$$

identisch genügt, wie man leicht verificirt, und dass *das reducirte äquivalente System einer Form dieser Art überhaupt immer eine geringere Zahl von Bildungen umfasst, als das einer der Differentialgleichung* (16) *nicht genügenden Form.*

Letztere Behauptung ist in der That leicht allgemein zu erweisen; es soll dies jedoch hier nur für vorliegendes Beispiel geschehen. Setzen wir zur Abkürzung:

$$\varphi_1 = (a b v)\, a_x b_x u_\alpha^2 = r_x^2 u_\sigma^2 v_\tau ,$$

so wird:

$$\tfrac{1}{2}\, \delta \varphi_1 = r_\tau u_\sigma^2 r_x .$$

Der Umstand also, dass φ_1 der Gleichung (16) genügt, kann dadurch ausgesprochen werden, dass alle mit dem symbolischen Factor r_τ behafteten, aus φ_1 ableitbaren, invarianten Bildungen identisch verschwinden. Für das reducirte äquivalente System von φ_1 würden wir dann bei dieser Bezeichnungsweise zunächst die Formen haben:

$$\varphi_{10} = r_x^2 u_\sigma^2 u_\tau , \quad \varphi_{11} = (\sigma \tau x)\, r_x^2 u_\sigma , \quad \varphi_{12}' = 2\,(u_\tau r_\sigma - r_\tau u_\sigma)\, r_x u_\sigma ,$$
$$\varphi_{12}'' = 2\,(\sigma \tau x)\, r_x r_\sigma , \quad \varphi_{12}''' = (u_\tau r_\sigma - u_\sigma r_\tau)\, r_\sigma .$$

Da wir aber die Glieder, welche den symbolischen Factor r_τ enthalten, auslassen dürfen, so wird:

$$\varphi_{12}' \equiv 2\, u_\tau r_\sigma r_x u_\sigma = \tfrac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 \varphi_{10}}{\partial x_1 \partial u_1} + \frac{\partial^2 \varphi_{10}}{\partial x_2 \partial u_2} + \frac{\partial^2 \varphi_{10}}{\partial x_3 \partial u_3} \right\}$$
$$\varphi_{12}''' \equiv \quad u_\tau r_\sigma^2 \quad = \tfrac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 \varphi_{12}'}{\partial x_1 \partial u_1} + \frac{\partial^2 \varphi_{12}'}{\partial x_2 \partial u_2} + \frac{\partial^2 \varphi_{12}'}{\partial x_3 \partial u_3} \right\} .$$

Unabhängig von der Identität $\delta \varphi_1 = 0$ ist überdies

$$\varphi_{12}'' \equiv 2\,(\sigma \tau x)\, r_x r_\sigma = \delta \varphi_{11} .$$

Hierdurch sind aber die Formen φ_{12}', φ_{12}''', φ_{11}'' als Functionalinvarianten bez. der Formen φ_{10}, φ_{11} charakterisirt und daher in dem mit φ_1 äquivalenten Systeme auszulassen. Das letztere besteht also aus den zwei Formen:

$$(17) \qquad \varphi_{10} = r_x^2 u_\sigma^2 u_\tau , \quad \varphi_{11} = (\sigma \tau x)\, r_x^2 u_\sigma .$$

Ebenso gilt allgemein der Satz, dass *das reducirte äquivalente System einer Form φ mit zwei Reihen gleichartiger (cogredienter) Coordi-*

---

*) Dass der Process $\delta \varphi$ in der That invariant ist, erkennt man sofort an der symbolischen Darstellung des durch ihn erhaltenen Resultats; vgl. auch p. 548.

naten und mit einer Reihe zu ihnen ungleichartiger (contragredienter) Coordinaten, welche der Gleichung (16), *d. i.* $\delta\varphi = 0$, *genügt, gebildet wird, indem man nur in Bezug auf die beiden gleichartigen Reihen reducirt und in dem so entstandenen Systeme die vorkommenden gleichartigen Reihen (der contragredienten Variabeln) einander gleich setzt.* In der That entsteht ja φ_{11} direct aus der Form $\frac{1}{2}\Omega_y\varphi_1$, wenn man in letzterer $x = y$ setzt.

Das reducirte äquivalente System der Form (7), $f = a_x^2 b_y^2 u_\alpha^2$, *besteht also schliesslich aus den sechs Formen:*

$$(18)\quad \begin{cases} a_x^2 b_x^2 u_\alpha^2, \quad (abu)^2 u_\alpha^{2*}, \quad (abu)(a_x b_\alpha - b_x a_\alpha) u_\alpha{}^*, \\ (a_x b_\alpha - b_x a_\alpha)^{2*}, \quad (abu)\, a_x b_x u_\alpha^2, \quad (a_x b_\alpha - b_x a_\alpha)\, a_x b_x u_\alpha, \end{cases}$$

von denen die mit einem Sterne bezeichneten Formen dadurch ausgezeichnet sind, dass sie der Differentialgleichung (16) *genügen.*

Man kann aber die Reduction, welche in der Einführung des reducirten Systems liegt, noch einen Schritt weiter führen. Es ist nämlich möglich, jede Form des reducirten Systems auf eine Anzahl weiterer Formen zurückzuführen, von denen jede die Gleichung:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial u_1} + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial u_2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial u_3} = 0$$

befriedigt.*) Es folgt daraus dann, dass man sich in der Theorie der ternären algebraischen Formen (insofern es auf Aufstellung vollständiger Systeme ankommt) auf die Untersuchung solcher Formen beschränken darf, welche aus jeder Klasse von Veränderlichen nur eine Reihe enthalten und *ausserdem der Gleichung* (16) *genügen.* Ein System der letzteren Art wollen wir ein *eigentlich reducirtes* nennen. Ein solches ist z. B. für die Form (1) schon durch die in (2) auftretenden Formen φ gegeben, wovon man sich leicht überzeugt. Die Formen (18) dagegen bilden noch nicht ein *eigentlich* reducirtes System.

Es entsteht hier ferner die Frage, in wie weit, wenn man die Coëfficienten der Grundform f als von einander unabhängig voraussetzt, auch die Coëfficienten der Formen des eigentlich reducirten Systems von einander unabhängig seien, abgesehen natürlich von den durch (16) gegebenen linearen Relationen; und da zeigt sich, dass *diese Coëfficienten in der That übrigens von einander unabhängig sind.*

---

*) Dass jede Zwischenform Θ in eine Reihe der Form:

$$\Theta = [\Theta] + \alpha_1 u_x [\Theta_1] + \alpha_2 u_x^2 [\Theta_2] + \dots$$

entwickelt werden kann, wo alle $[\Theta_i]$ jener partiellen Differentialgleichung genügen, zeigte zuerst Gordan: Ueber Combinanten, Math. Annalen, Bd. 5, p. 102 ff. — Diese Reihenentwicklung ist besonders nützlich, wenn es gilt, von einem gegebenen Ausdrucke einen Factor u_x^λ abzusondern; sie gibt dafür eine allgemeine Methode, denn man braucht dann nur die Formen $[\Theta_\lambda]$, $[\Theta_{\lambda+1}]$ ... zu berechnen.

Bei ternären Formen ist also die Theorie einer Form f mit beliebig vielen Reihen von Punkt- und Liniencoordinaten nicht nur individuell, *sondern auch generell* durch die eines mit entsprechenden Ordnungszahlen, *übrigens beliebig gebildeten* simultanen Systems ersetzbar, dessen Formen sämmtlich höchstens nur eine Reihe x und eine Reihe u enthalten und die Gleichung (16) befriedigen. Insbesondere ist aber ein solches System für jeden Fall durch das eigentlich reducirte System auf oben angedeutetem Wege zu erhalten. —

Fassen wir nun gleichzeitig die obigen, an dem Beispiele erläuterten Schritte zusammen, so geschieht die Bildung des eigentlich reducirten Systems auf folgende Art.

1. Enthält f eine Reihe von x und eine Reihe von u, so bildet man die Formen:

$$\delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial u_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial u_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial u_3}$$
$$\delta^2 f = \frac{\partial^2 \delta f}{\partial x_1 \partial u_1} + \frac{\partial^2 \delta f}{\partial x_2 \partial u_2} + \frac{\partial^2 \delta f}{\partial x_3 \partial u_3}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

und bestimmt die Zahlen $\alpha, \beta \ldots$ so, dass die Formen

$$\varphi = f + \alpha u_x \delta f + \beta u_x^2 \delta^2 f + \ldots$$
$$\varphi_1 = \delta f + \alpha' u_x \delta^2 f + \beta' u_x^2 \delta^3 f + \ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

sämmtlich der Gleichung (16) genügen. Die $\alpha, \beta, \ldots$ sind hierdurch völlig und eindeutig bestimmt, wie hier nicht weiter ausgeführt werden soll (vgl. Gordan a. a. O.). Die Formen φ bilden das eigentlich reducirte System.

2. Enthält f nur zwei gleichartige Reihen, etwa x und y, so kann man symbolisch setzen: $f = a_x^m b_y^n$. Die Formen des eigentlich reducirten Systems sind dann:

$$\varphi = a_x^m b_x^n, \quad \varphi_1 = a_x^{m-1} b_x^{n-1} (abu), \quad \varphi_2 = a_x^{m-2} b_x^{n-2} (abu)^2, \text{ etc.}$$

3. Enthält f mehr als zwei Reihen, so sind unter diesen mindestens zwei gleichartig. In Bezug auf diese ersetzt man f durch dieselben Formen wie unter 2. Die so entstandenen Formen behandelt man in gleicher Weise bezüglich irgend zweier in ihnen auftretenden gleichartigen Reihen weiter und gelangt so schliesslich zu einem eigentlich reducirten Systeme. Aus letzterem fallen nur verschiedene Formen fort, weil die Formen φ unter 2. schon die besondere Eigenschaft haben, der Gleichung (16) in Bezug auf die Reihen x, u zu genügen. Die Fortsetzung der hier zu leistenden Operationen führt daher auf die folgende Aufgabe, durch deren Lösung Alles erledigt ist: *Eine Form f enthält drei Reihen x, y, u und genügt in Bezug auf*

x und u der Gleichung (16)*: man soll das eigentlich reducirte System von f angeben.* Zu dem Zwecke wird man sich erst wieder das reducirte System nach dem oben mitgetheilten und an einem Beispiele*) erläuterten Satze (p. 931 f.) bilden und mit denjenigen Formen, welche dem eigentlich reducirten Systeme nicht schon angehören, nach dem unter 1. Gesagten verfahren.

Für unser Beispiel also haben wir aus dem Systeme (18) noch die Formen φ_0, φ_{10}, φ_{11}:

$$\varphi_0 = a_x^2 b_x^2 u_\alpha^2, \quad \varphi_{10} = (abu)\, a_x b_x u_\alpha^2, \quad \varphi_{11} = (a_x b_\alpha - b_x a_\alpha)\, a_x b_x u_\alpha$$

auf Formen des eigentlich reducirten Systems zurückzuführen. Beginnen wir mit der Form φ_0. Nach Obigem haben wir dann zunächst zu bilden:

$$\tfrac{1}{4}\,\delta\varphi_0 = a_x b_x u_\alpha\,(a_\alpha b_x + b_\alpha a_x)$$
$$\tfrac{1}{4}\,\delta^2\varphi_0 = a_\alpha^2 b_x^2 + b_\alpha^2 a_x^2 + 4\, a_\alpha b_\alpha a_x b_x\,.$$

Eine nochmalige Anwendung des δ-Processes würde $\delta^3\varphi_0 \equiv 0$ ergeben. Ferner haben wir in den Formen

$$(19) \qquad \begin{aligned} [\varphi_0]_0 &= \varphi_0 + \alpha u_x \delta\varphi_0 + \beta u_x^2 \delta^2\varphi_0 \\ [\varphi_0]_1 &= \delta\varphi_0 + \alpha' u_x \delta\varphi_0 \\ [\varphi_0]_2 &= \delta^2\varphi_0 \end{aligned}$$

die Zahlen α, β, α' so zu bestimmen, dass $\delta\,[\varphi_0]_0 = 0$ und $\delta\,[\varphi_0]_1 = 0$; die Bedingung $\delta\,[\varphi_0]_2 = 0$ ist ja schon erfüllt. Nun ist aber:

$$(20) \qquad \delta\,[\varphi_0]_0 = \delta\varphi_0 + \alpha\delta\,(u_x\delta\varphi_0) + \beta\delta\,(u_x^2\delta^2\varphi_0)\,,$$

und man hat allgemein für $\psi = r_x^m u_\varrho^n$ in Rücksicht darauf, dass $\delta u_x = 3$ ist:

$$\delta\,(\psi\,.\,u_x^h) = u_x^h\delta\psi + 3\,hu_x^{h-1}\psi + \sum_{i=1}^{i=3}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial u_x^h}{\partial u_i} + \frac{\partial\psi}{\partial u_i}\frac{\partial u_x^h}{\partial x_i}\right).$$

Die rechts stehende Summe ist aber nach dem Euler'schen Theoreme gleich

$$hu_x^{h-1}\sum\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\,x_i + \frac{\partial\psi}{\partial u_i}\,u_i\right) = h\,(m+n)\,u_x^{h-1}\,\psi\,.$$

Es wird also:

$$(21) \qquad \delta\,(\psi\,.\,u_x^h) = u_x^h\,\delta\psi + h\,(m+n+3)\,u_x^{h-1}\psi\,.$$

Die Gleichung $\delta\,[\varphi_0]_0 = 0$ geht daher wegen (20) über in

$$0 = \delta\varphi_0\,(1 + 7\,\alpha) + u_x\delta^2\varphi_0\,(\alpha + 10\,\beta)\,.$$

Diese Bedingung soll unabhängig von den u und x erfüllt sein, insbesondere also auch für $u_x = 0$, und somit ergibt sich:

---

*) Es war dort (p. 931) nur u, v, x statt x, y, u genommen.

$$\alpha = -\tfrac{1}{7}, \quad \beta = \tfrac{1}{70},$$

und:

(22) $$[\varphi_0]_0 = \varphi_0 - \tfrac{1}{7} u_x \delta \varphi_0 + \tfrac{1}{70} u_x^2 \delta^2 \varphi_0 .$$

Zur Bestimmung von $[\varphi_0]_1$ findet man in gleicher Weise mittelst (21) die Relation:

$$0 = \delta^2 \varphi_0 (1 + 5\alpha'), \quad \text{also:} \quad \alpha' = -\tfrac{1}{5}, \quad \text{und:}$$

(23) $$[\varphi_0]_1 = \delta \varphi_0 - \tfrac{1}{5} u_x \delta^2 \varphi_0 .$$

Das eigentlich reducirte System der Form φ_0 besteht also aus den drei Formen (22), (23) und $\delta^2 \varphi_0$.

Ebenso findet man für das eigentlich reducirte System von φ_{10} die Bildungen:

$$[\varphi_{10}]_0 = \varphi_{10} - \tfrac{1}{8} u_x \delta \varphi_{10} + \tfrac{1}{96} u_x^2 \delta^2 \varphi_{10}, \quad [\varphi_{10}]_1 = \delta \varphi_{10} - \tfrac{1}{6} u_x \delta^2 \varphi_{10},$$
$$[\varphi_{10}]_2 = \delta^2 \varphi_{10},$$

wo: $\delta \varphi_{10} = 2\,(abu)\,(a_\alpha b_x + b_\alpha a_x)\, u_\alpha = 2\,\varphi_{12}'$,

$\delta^2 \varphi_{10} = 4\,(abu)\, a_\alpha b_\alpha \qquad = 4\,\varphi_{12}'''$.

Es treten hier also wieder die Formen φ_{12}' und φ_{12}''' auf, welche wir früher aus dem nicht eigentlich reducirten Systeme ausschliessen mussten. Das eigentlich reducirte System von φ_{11} endlich besteht aus den Formen:

$$[\varphi_{11}]_0 = \varphi_{11} - \tfrac{1}{7} u_x \delta \varphi_{11}, \quad \delta \varphi_{11} = a_x^2 b_\alpha^2 - b_x^2 a_\alpha^2 = \varphi_{12}'',$$

Das eigentlich reducirte System der Form $f = a_x^2 b_y^2 u_\alpha^2$ ist daher schliesslich durch folgende elf Bildungen gegeben

1) $[\varphi_0]_0 = \varphi_0 - \frac{1}{7} u_x \delta \varphi_0 + \frac{1}{70} u_x^2 \delta^2 \varphi_0$

2) $[\varphi_0]_1 = \delta \varphi_0 - \frac{1}{5} u_x \delta^2 \varphi_0$

3) $[\varphi_0]_2 = \delta^2 \varphi_0$ wo: $\varphi_0 = a_x^2 b_x^2 u_\alpha^3$;

4) $\varphi_{20} = (abu)^2 u_\alpha^2$, 5) $\varphi_{21} = (abu)(a_x b_\alpha - b_x a_\alpha) u_\alpha$, 6) $\varphi_{22} = (a_x b_\alpha - b_x a_\alpha)^2$;

7) $[\varphi_{10}]_0 = \varphi_{10} - \frac{1}{8} u_x \delta \varphi_{10} + \frac{1}{96} u_x^2 \delta^2 \varphi_{10}$

8) $[\varphi_{10}]_1 = \delta \varphi_{10} - \frac{1}{6} u_x \delta^2 \varphi_{10}$

9) $[\varphi_{10}]_2 = \delta^2 \varphi_{10}$ wo: $\varphi_{10} = (abu)\, a_x b_x u_\alpha^2$;

10) $[\varphi_{11}]_0 = \varphi_{11} - \frac{1}{7} u_x \delta \varphi_{11}$

11) $[\varphi_{11}]_1 = \delta \varphi_{11}$, wo: $\varphi_{11} = (a_x b_\alpha - b_x a_\alpha)\, a_x b_x u_\alpha$.

Jede dieser Formen ist von gleichem oder niedrigerem Gesammtgrade wie die Form f, und jede von ihnen genügt der partiellen Differentialgleichung (16). Nach der obigen Bemerkung über die Willkürlichkeit der Coëfficienten dieser Formen *ist aber auch umgekehrt die Theorie irgend eines simultanen Systems von elf Zwischenformen, deren Ordnungs- und Klassen-Zahlen bez. mit denen der hier angeschriebenen elf Formen übereinstimmen, und welche sämmtlich die Gleichung* (16) *be-*

friedigen, sonst aber von einander unabhängig sind, identisch mit der Theorie einer Form $f = r_x^2 s_y^2 u_\varrho^2$, deren 216 Coëfficienten von einander unabhängig sind. —

Durch die vorstehenden Entwicklungen wird es hinreichend klar sein, inwiefern die Algebra ein principielleres Studium der Zwischenformen und also auch der durch das Verschwinden derselben dargestellten sogenannten Connexe (p. 924) fordern muss. Letztere Gebilde nun, deren Untersuchung so zu sagen die ganze analytische Geometrie der Ebene (d. i. Algebra der ternären Formen) in sich schliesst, in einigen ihrer wesentlichen Beziehungen und Eigenschaften darzulegen, ist der Zweck der folgenden Erörterungen; auf eine vollständigere Theorie derselben müssen wir natürlich noch verzichten. Es sei sogleich hervorgehoben, dass wir zunächst ganz allgemeine Connexe $f \equiv a_x^m u_\alpha^n = 0$ betrachten wollen, ohne darauf Rücksicht zu nehmen, dass dieselben noch auf „Normalconnexe", d. i. solche, für welche die Gleichung (16) erfüllt ist, zurückgeführt werden können. Es fehlt uns eben noch die Möglichkeit, der erwähnten Gleichung einen geometrisch direct verwerthbaren Inhalt abzugewinnen.

II. Connexe. — Coincidenzen. — Curvenpaare.

Das Gebilde, um dessen Untersuchung es sich nunmehr handelt, wird durch eine algebraische Gleichung gegeben, welche die Coordinaten eines beweglichen Punktes (x) und einer beweglichen Geraden (u) je in homogener Weise enthält, d. h. durch eine Gleichung der Form

$$(1) \qquad f(x, u) \equiv a_x^m u_\alpha^n = 0,$$

wenn in ihr die x_i zur m^{ten}, die u_i zur n^{ten} Dimension vorkommen. Wir bezeichnen dieses Gebilde als *Connex m^{ter} Ordnung und n^{ter} Klasse*, oder kürzer als *Connex* (m, n).

Einem solchen kommt eine eigentliche geometrische Gestalt nicht mehr zu; vielmehr kann man zu *jeder* Linie u der Ebene noch unendlich viele Punkte x und zu *jedem* Punkte x noch unendlich viele Linien u finden, welche der Gleichung der Connexes genügen: Jeder Geraden u entsprechen im Allgemeinen vermöge (1) unendlich viele Punkte x, welche eine Curve C_m der m^{ten} Ordnung bilden; jedem Punkte x unendlich viele Geraden u, welche eine Curve K_n der n^{ten} Klasse umhüllen.*) So gehört z. B. für $m = 1$, $n = 1$ zu jedem Punkte x ein anderer Punkt y als Träger des von den entsprechenden

*) Gleichungen zwischen einer Reihe Punkt- und einer Reihe Liniencoordinaten werden auch bei Plücker kurz erwähnt: Analytisch-geometrische Entwicklungen, Bd. 2, Essen 1831, p. 255.

Linien u gebildeten Strahlbüschels (Curve 1ter Klasse) und jeder Geraden u entspricht wieder eine Gerade v (Curve 1ter Ordnung). In der That gibt ja in diesem Falle die Gleichung

$$f(x, u) = a_x u_a = \Sigma\Sigma\beta_{ik} x_i u_k = 0$$

nur eine besondere Darstellung der allgemeinen Collineation; denn für die Coordinaten des zu x gehörenden Punktes y findet man:

$$\varrho y_k = \beta_{1k} x_1 + \beta_{2k} x_2 + \beta_{3k} x_3,$$

und für die Coordinaten der zu u gehörenden Geraden v:

$$\sigma v_i = \beta_{i1} u_1 + \beta_{i2} u_2 + \beta_{i3} u_3.$$

Da hier Punkt und Gerade immer zusammen auftreten, ist es zur einfacheren Auffassung dieser Verhältnisse zweckmässig, weder den Punkt noch die Gerade an und für sich als Grundelement der Ebene zu betrachten; vielmehr wollen wir als „*Element* (x, u)“ *jede Combination eines Punktes* x *der Ebene mit einer Geraden* u *derselben bezeichnen.* Die Gesammtheit der Elemente (x, u) erhält man also, indem man jeden der zweifach unendlich vielen Punkte x mit jeder der zweifach unendlich vielen Geraden u combinirt. *Die gesammten Elemente bilden sonach ein vierfach unendliches System (erfüllen eine Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen);* und die Ebene ist der Träger dieser Mannigfaltigkeit. Aus ihr hebt die Gleichung eines Connexes die *drei*fach unendliche Schaar der Elemente heraus, welche derselben genügen. Das Obige kann man dann auch in folgender Form aussprechen: *Die Punkte, welche mit einer gegebenen Geraden Elemente eines Connexes* (m, n) *bilden, liegen auf einer Curve* C_m *der* m^{ten} *Ordnung; die Geraden, welche mit einem gegebenen Punkte Elemente des Connexes bilden, umhüllen eine Curve* K_n *der* n^{ten} *Klasse.* Sämmtliche so entstehenden Curven K_n bilden ein doppelt unendliches System, dessen Parameter die Verhältnisse der x_i sind; ebenso bilden die C_m ein doppelt unendliches Curvensystem, welches die Verhältnisse der u_i zu Parametern hat.

Nur in besonderen Fällen kann es eintreten, dass jeder Punkt der Ebene mit einer bestimmten Geraden oder jede Gerade mit einem bestimmten Punkte der Ebene ein Element des Connexes bildet: So bildet z. B. in dem Connexe

$$x_1 \varphi(u) + x_2 \psi(u) = 0$$

der Punkt $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ mit jeder Geraden u ein Element. Solche Punkte bez. Gerade sollen *Fundamental-Punkte bez. -Gerade* genannt werden. Dieselben können bei besonderen Connexen in beliebig grosser Anzahl auftreten; ja ihre Zahl kann unendlich gross werden. Dies letztere tritt bei irreducibeln Connexen z. B. ein, wenn die Gleichung $f = 0$ die x oder u gar nicht enthält. Enthält sie die u nicht, so hat man *die Gleichung einer Curve in Punktcoordinaten* vor sich; sie ist

als Connex so aufzufassen, dass jeder Punkt der Curve mit jeder beliebigen Geraden der Ebene ein Element des Connexes bilden kann, dass aber andere (nicht auf der Curve gelegene) Punkte sich mit Geraden überhaupt nicht zu Connexelementen vereinigen lassen. Das dualistisch Entsprechende tritt ein, wenn $f = 0$ die x nicht enthält und also *die Gleichung einer Curve in Liniencoordinaten* darstellt. Ein anderes Beispiel der Art bietet der reducible Connex

$$\varphi(x) \cdot \psi(u) = 0 .$$

Hier bildet jeder Punkt von $\varphi = 0$ mit jeder beliebigen Geraden ein Connexelement; jeder andere Punkt der Ebene dagegen bildet nur mit allen Tangenten von $\psi = 0$ Elemente des Connexes. —

Die Gesammtheit der Elemente, welche in einer Ebene existiren, bildet, wie schon erwähnt, eine Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen. Man hat daher vier Abstufungen geometrischer Gebilde zu unterscheiden, je nachdem 1, 2, 3 oder 4 Gleichungen zwischen den Coordinaten x, u des Elementes gegeben sind; und jede von diesen muss sowohl in Bezug auf die x als auf die u homogen sein, um geometrischer Interpretation fähig zu werden (d. i. für sich einen Connex darzustellen). Durch vier Gleichungen ist schon eine endliche Zahl von Elementen bestimmt; es tritt dann also nicht mehr ein continuirliches Gebilde, sondern eine Gruppe discreter Elemente auf. Die übrigen drei Stufen bleiben zu betrachten.

Die erste Stufe ist durch den einzelnen *Connex* selbst gegeben.

Die Gesammtheit der zweifach unendlich vielen Elemente, welche zwei Connexen gemeinsam sind, nennen wir eine Coincidenz. Für den Fall aber, wo diese, beiden Connexen gemeinsame, Mannigfaltigkeit reducibel ist, soll auch jeder irreducible Theil derselben einzeln als Coincidenz bezeichnet werden, ebenso wie unter Raumcurve jeder irreducible Theil des Durchschnittes zweier algebraischen Flächen verstanden wird. Demnach ist analytisch die Coincidenz gegeben entweder durch zwei Gleichungen zwischen den x und den u, oder durch mehr als zwei Gleichungen, welche aber eine *doppelt unendliche* Schaar gemeinsamer Lösungen gestatten. Innerhalb einer Coincidenz gehört zu jeder Geraden im Allgemeinen eine endliche Anzahl (μ) von Punkten, welche mit ihr ein Element bilden können; ebenso gehört zu jedem Punkte eine endliche Anzahl (ν) von Geraden. Man kann dann μ die *Ordnung*, ν die *Klasse der Coincidenz* nennen, und diese selbst als Coincidenz (μ, ν) bezeichnen. Man findet die zu einem Punkte gehörigen Geraden, indem man die gemeinsamen Tangenten aller Curven K sucht, welche in den einzelnen, die Coincidenz bestimmenden Connexen dem Punkte entsprechen. Ebenso findet man die zu einer Geraden gehörigen Punkte, indem man in allen jenen Connexen

die ihr entsprechenden Curven C aufsucht und deren gemeinsame Schnittpunkte bestimmt. *So ist insbesondere, wenn zwei Connexe* (m, n) *und* (m', n') *gegeben sind, die beiden gemeinsame (im Allgemeinen irreducible) Coincidenz von der Ordnung* $\mu = mm'$ *und von der Klasse* $\nu = nn'$.

Die Coincidenz deckt sich hiernach mit dem allgemeinsten Begriffe der *dualistischen* (im Allgemeinen indess nicht linearen) *Verwandtschaft*, d. h. einer solchen, bei welcher in zwei auf einander liegenden ebenen Systemen E, E' jedem Punkte von E eine bestimmte Zahl von Geraden in E', jeder Geraden von E' eine bestimmte Zahl von Punkten in E entspricht. Das Umgekehrte ist dabei jedoch im Allgemeinen keineswegs der Fall; den Punkten einer Geraden in E entsprechen vielmehr in E' die Tangenten einer Curve, und umgekehrt entsprechen einem Punkte in E' d. h. den Geraden des durch ihn gehenden Strahlbüschels, Punkte von E, welche eine Curve beschreiben. Durch zwei Connexe (1, 1):

$$a_x u_\alpha = 0 \quad \text{und} \quad a_x' u_{\alpha'} = 0$$

wird z. B. eine Verwandtschaft gegeben, vermöge deren jedem Punkte x die Verbindungslinie der beiden zu x gehörenden Punkte mit den Coordinaten $a_x \alpha_i$ und $a_x' \alpha_i'$ entspricht. Dieselbe wird, wenn wir mit v_i die Coordinaten dieser Verbindungslinie bezeichnen, dargestellt durch die Gleichungen:

$$\varrho v_i = (\alpha \alpha')_i \, a_x a_x' \, ;$$

die Verwandtschaft ist also quadratisch, d. h. die Punkte x von E, welche den durch einen festen Punkt y gehenden Linien v von E' entsprechen, liegen auf einem Kegelschnitte. Nur wenn besondere Bedingungen zwischen den beiden Connexen (1, 1) erfüllt sind, wird es eintreten können, dass aus der ihnen gemeinsamen Coincidenz die lineare reciproke Verwandtschaft im gewöhnlichen Sinne hervorgeht; letztere wird dann freilich bei geeigneter Wahl der Connexe hierdurch in allgemeinster Weise erzeugt. —

Die Gesammtheit aller (einfach unendlich vielen) Elemente, welche drei Connexen gemeinsam sind — oder ein rational darstellbarer Theil einer solchen Gesammtheit — *bildet ein Curvenpaar.* Es sind vermöge der Gleichungen dieser Connexe im Allgemeinen sowohl die u durch die x, als die x durch die u rational ausdrückbar, während zugleich durch Elimination der x eine Gleichung zwischen den u, durch Elimination der u eine Gleichung zwischen den x erhalten wird. Man hat also eine Curve in Punktcoordinaten und eine Curve in Liniencoordinaten vor sich; und die Punkte der einen sind auf die Tangenten der andern eindeutig bezogen. Ordnung und Klasse dieser Curven, die man bez. als *Ordnung und Klasse des Curvenpaares* bezeichnen

kann, sind nach dem bekannten Satze über den Grad der Resultante in den Coëfficienten der gegebenen Gleichungen im Allgemeinen leicht zu bestimmen: Sind drei Connexe (m, n), (m', n') und (m'', n'') gegeben, so wird die *Klasse des Curvenpaares* gleich

$$(2) \qquad n m' m'' + n' m'' m + n'' m m',$$

und die *Ordnung des Curvenpaares* gleich

$$(3) \qquad m n' n'' + m' n'' n + m'' n n'.$$

Es ist nicht ohne Interesse, das eindeutige Entsprechen zweier Curven in der Weise zu betrachten, wie es hier auftritt; denn gerade die nicht aufgelöste Form der Gleichungen, wie sie hier sich theoretisch darbietet, ist es, auf welche man in den meisten Untersuchungen unmittelbar geführt wird, wo man es mit eindeutigen Beziehungen zu thun hat.

Endlich wollen wir noch die Zahl der Elemente bestimmen, welche vier Connexen gemeinsam sind. Die letzteren seien bez. von der Ordnung m, m', m'', m''' und von der Klasse n, n', n'', n'''. Wir betrachten zuerst das Curvenpaar, welches durch die drei Connexe (m, n), (m', n'), (m'', n'') bestimmt wird, und dessen Ordnung μ und Klasse ν bez. durch die Zahlen (3) und (2) gegeben ist. Zu jedem Punkte x der C_μ des letzteren gehört dann vermöge des Connexes (m''', n''') eine Curve $K_{n'''}$ von der Klasse n''', welche mit der K_ν des Curvenpaares $\nu n'''$ Tangenten gemein hat; und jeder der letzteren entspricht vermöge der drei ersten Connexe ein Punkt y der C_μ; fällt letzterer insbesondere mit x zusammen, so haben wir ein allen vier Connexen gemeinsames Element. Die $n''' \nu$ Punkte y der C_μ, welche dem Punkte x entsprechen, können nun jedenfalls zusammen mit anderen *festen* Punkten der C_μ durch eine Curve $\varphi(x, y) = 0$ ausgeschnitten werden, da sie durch eindeutige Transformation aus dem vollständigen Systeme der gemeinsamen Tangenten zweier Curven hervorgehen; zur Bestimmung der Zahl der gemeinsamen Elemente können wir daher das erweiterte Correspondenzprincip anwenden (vgl. p. 446 und 680). Nun entsprechen offenbar jedem Punkte y der C_μ in der oben geschilderten Weise umgekehrt $m'' \mu$ Punkte x, und die Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ wird im Allgemeinen für $x = y$ nicht erfüllt, denn sonst müsste jedes Element des Curvenpaares allen vier Connexen angehören. *Die Zahl der den vier Connexen* (m, n), (m', n'), (m'', n''), (m''', n''') *gemeinsamen Elemente* findet man daher bei beliebiger Lage dieser Connexe gegen einander gleich $m''' \mu + n''' \nu$ oder, wenn wir für μ, ν ihre Werthe aus (3) und (2) einsetzen:

$$(4) \qquad \begin{aligned} & m m' n'' n''' + m' m'' n''' n + m'' m''' n n' \\ & + m m'' n' n''' + m' m''' n'' n + m m''' n'' n', \end{aligned}$$

ein (wie es sein muss) in allen Zahlen m, n symmetrisches Resultat.

Für den Fall $m = m' = m'' = m''' = 1 = n = n' = n'' = n'''$ folgt hieraus z. B. insbesondere, dass vier Connexe erster Ordnung und erster Klasse sechs Elemente gemein haben. Die Punkte dieser Elemente müssen allen vier Curven dritter Ordnung gemeinsam sein, welche in den vier aus je dreien der gegebenen Connexe zu bildenden Curvenpaaren vorkommen. Seien also die Gleichungen der vier Connexe:

(5) $$a_x u_\alpha = 0, \quad b_x u_\beta = 0, \quad c_x u_\gamma = 0, \quad d_x u_\delta = 0,$$

so erhält man durch Elimination der u aus je dreien dieser Gleichungen die vier Curven dritter Ordnung:

$$(\beta\gamma\delta) b_x c_x d_x = 0, \; (\gamma\delta\alpha) c_x d_x a_x = 0, \; (\delta\alpha\beta) d_x a_x b_x = 0, \; (\alpha\beta\gamma) a_x b_x c_x = 0;$$

Die Punkte der sechs den Connexen (5) gemeinsamen Elemente sind die gemeinsamen Schnittpunkte dieser vier Curven; und da durch die 6 Punkte nur dreifach unendlich viele Curven dritter Ordnung gehen, kann man in ähnlicher Weise jede solche Curve darstellen, welche die 6 Punkte enthält. Die 6 zugehörigen Geraden sind ebenso die gemeinsamen Tangenten der vier Curven dritter Klasse:

$$(bcd) u_\beta u_\gamma u_\delta = 0, \; (cda) u_\gamma u_\delta u_\alpha = 0, \; (dab) u_\delta u_\alpha u_\beta = 0, \; (abc) u_\alpha u_\beta u_\gamma = 0.$$

Es ist auch leicht, die Correspondenz aufzustellen, welche hier auf der Curve $(\alpha\beta\gamma) a_x b_x c_x = 0$ die 6 Punkte der den Connexen (5) gemeinsamen Elemente bestimmt. Die Punkte und Geraden des den drei ersten Connexen gemeinsamen Curvenpaares sind hier auf einander durch die Gleichungen bezogen*)

(6) $$\varrho u_i = (\alpha\beta)_i a_y b_y$$

unter der Voraussetzung, dass $(\alpha\beta\gamma) a_y b_y c_y = 0$. Die drei Kegelschnitte, welche durch $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ dargestellt werden, haben bekanntlich drei Punkte mit einander gemein, welche auf der Curve $(\alpha\beta\gamma) a_y b_y c_y = 0$ liegen; durch diese drei Punkte gehen also auch alle Kegelschnitte des Netzes $(\alpha\beta v) \alpha_y \beta_y = 0$. Einem Punkte x der C_3 ist nun vermöge des vierten Connexes der Punkt $d_x u_\delta = 0$ zugeordnet; den drei von letzterem an die Curve $(abc) u_\alpha u_\beta u_\gamma = 0$ zu legenden Tangenten entsprechen also vermöge (6) drei Punkte der C_3, welche auf dieser durch den Kegelschnitt $(\alpha\beta\delta) a_y b_y d_x = 0$ ausgeschnitten werden. Wir haben also eine Correspondenz mit drei festen Punkten; und die 6 Coincidenzpunkte derselben werden durch die Curve $(\alpha\beta\delta) a_x b_x \delta_x = 0$ bestimmt, welche ausserdem je einfach durch

*) Man verificirt leicht, dass diese Beziehung zwischen beiden Curven dieselbe ist, welche zwischen einer C_3 und K_3 besteht, wenn beide gleichzeitig durch denselben Grassmann'schen Mechanismus erzeugt werden (vgl. p. 538).

jeden der drei festen Punkte geht. Es stimmt dies mit der obigen Angabe über die vier Curven dritter Ordnung überein.

Das nähere Studium der Eigenschaften eines Connexes $a_x^m u_\alpha^n = 0$ führt nun zur Untersuchung der Functionalinvarianten, d. i. der Invarianten, Covarianten, zugehörigen Formen und Zwischenformen, welche zu der Grundform $a_x^m u_\alpha^n$ gehören; die dabei auftretenden Zwischenformen kann man dann immer nach den obigen Erörterungen (p. 932) durch sogenannte Normalformen ersetzen, d. h. durch solche Formen φ, welche der Differentialgleichung $\Sigma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial u_i} = 0$ genügen. Alle diese Functionalinvarianten wird man wieder symbolisch darstellen können; und dabei hat man symbolische Factoren der folgenden Typen zu unterscheiden (wenn $a_x^m u_\alpha^n \equiv b_x^m u_\beta^n \equiv c_x^m u_\gamma^n$ gesetzt wird):

$$a_x, \quad (a b u), \quad (a b c), \quad a_\alpha, \quad u_\alpha, \quad (\alpha \beta x), \quad (\alpha \beta \gamma).$$

Die Mannigfaltigkeit der möglichen Bildungen wird sonach eine sehr grosse; es sind indess bisher wenig allgemeine Untersuchungen angestellt. Erwähnt sei hier nur ein Princip, welches dem in der Curventheorie benutzten *Uebertragungsprincipe* (p. 276) genau analog ist, indem es erlaubt, gewisse Sätze über binäre Formen mit zwei Reihen von Veränderlichen unmittelbar für ternäre Connex-Bildungen zu verwerthen.

Die durch den Connex festgelegte Beziehung zwischen Punkten und Geraden der Ebene kann nämlich noch in anderer Weise aufgefasst werden. Betrachten wir einen beliebigen Punkt, welcher der Durchschnitt zweier Geraden v, w sein und daher mit (v, w) bezeichnet werden mag; ebenso sei eine Gerade (y, z) die Verbindungslinie der Punkte y und z. Beide zusammen bilden dann ein beliebig gewähltes Element, welches im Allgemeinen dem Connexe nicht angehört. *Vermöge des Connexes* (m, n) *werden indess die Strahlen des Büschels* (v, w) *den Punkten der Geraden* (y, z) *zugeordnet;* und zwar ist die beiderseitige Zuordnung eine m-n-deutige, indem jedem Punkte n Strahlen (Γ_n), jedem Strahle m Punkte (G_m) entsprechen. Bezeichnet man nämlich einen Punkt der Reihe mit $\varkappa_1 y + \varkappa_2 z$, einen Strahl des Büschels mit $\lambda_1 v + \lambda_2 w$, so findet für die durch den Connex $a_x^m u_\alpha^n = 0$ einander zugeordneten Punkte und Strahlen die Gleichung statt:

$$(\varkappa_1 a_y + \varkappa_2 a_z)^m (\lambda_1 v_\alpha + \lambda_2 w_\alpha)^n = 0,$$

welche von der Ordnung m für $\varkappa_1 : \varkappa_2$, von der Ordnung n für $\lambda_1 : \lambda_2$ ist. Setzen wir nun symbolisch:

$$(7) \qquad a_y = A_1, \quad a_z = A_2, \quad v_\alpha = \mathsf{A}_1, \quad w_\alpha = \mathsf{A}_2,$$

so haben wir die doppelt binäre Form:

(8) $$\varphi = A_x^m \mathsf{A}_\lambda^n ,$$

wo dann $\varphi = 0$ die besagte Beziehung vermittelt. Betrachten wir ein dem gegebenen Connexe angehöriges Element x, u, dessen Punkt x der Reihe (y, z), dessen Strahl u dem Büschel (v, w) angehört, und stellen die Forderung, dass die zu x gehörige Γ_n (welche u enthält) eine binäre Invarianteneigenschaft besitze, und dass ebenso G_m dieselbe Eigenschaft oder eine andere habe: dann resultirt daraus eine invariante Bedingung für den Strahl (y, z) und den Punkt (v, w), und *das aus beiden gebildete Element* (y, z), (v, w) *gehört einem invarianten Connexe an.* Die beregte Bedingung wird zunächst durch das Verschwinden einer Invariante der binären Form φ dargestellt, welche auch dann noch die Invarianteneigenschaft haben muss, wenn die eine Reihe von Veränderlichen $(\varkappa)$ einer, die andere (λ) einer beliebigen andern linearen Transformation unterworfen wird; denn die zu jedem *beliebigen* Punkte $x = \varkappa_1 y + \varkappa_2 z$ vermöge (8) gehörige Gruppe Γ_n soll jene Invarianteneigenschaft besitzen, sowie auch die zu jedem *beliebigen* Strahle $u = \lambda_1 v + \lambda_2 w$ gehörige Gruppe G_m. Die hier in Betracht kommenden Invarianten der Form φ sind daher von der Form:

(9) $$I = \Sigma c \Pi (AB) \ldots \Pi (\mathsf{A}\mathsf{B}) \ldots$$

wo die c Zahlencoëfficienten, die A, B, ... gleichwerthige Symbole der einen, die A, B, ... solche der andern Art bedeuten, diese beiden Klassen von Symbolen aber niemals vereinigt auftreten; Factoren $(A\mathsf{A})$ dürfen deshalb in I nicht vorkommen. Es ist aber wegen (7):

$$(AB) = a_y b_z - b_y a_z = (abu) ,$$

wenn jetzt $u_i = (yz)_i$ gesetzt wird, und ebenso für $x_i = (vw)_i$:

$$(\mathsf{A}\mathsf{B}) = v_\alpha w_\beta - w_\alpha v_\beta = (\alpha\beta x) .$$

Als Gleichung des gesuchten covarianten Connexes findet man daher aus (9):

$$I \equiv \Sigma c \Pi (abu) \ldots \Pi)\alpha\beta x) \ldots = 0^{*}) .$$

Diese Klasse covarianter Connexe ist also ebenso auf das Studium der Invarianten jener doppelt binären Form zurückgeführt, wie die Liniengleichung einer in Punktcoordinaten gegebenen Curve auf das Studium der Discriminante einer binären Form mit einer Reihe von Veränderlichen.

Wie von covarianten Connexen, kann man auch von covarianten Coincidenzen und Curvenpaaren sprechen. So erhält man eine einem

---

*) Ein Beispiel gibt der im folgenden Abschnitte betrachtete conjugirte Connex.

gegebenen Connexe $f = a_x^m u_\alpha^n = 0$ covariante Coincidenz, wenn man jede Gerade der Ebene nicht mit allen Punkten der zugehörigen C_m, sondern nur mit deren Wendepunkten bez. Berührungspunkten von Doppeltangenten zu Elementen verbindet; die erstere Coincidenz wird dann z. B. aus dem Connexe $f = 0$ durch den Connex

$$(abc)^2 a_x^{m-2} b_x^{m-2} c_x^{m-2} u_\alpha^n u_\beta^n u_\gamma^n = 0$$

ausgeschnitten. Ebenso kann man jeden Punkt der Ebene mit den Rückkehr- bez. Wendetangenten der zugehörigen K_n zu Elementen einer covarianten Coincidenz zusammenstellen. Ein covariantes Curvenpaar wird gebildet durch die im Systeme der C_m auftretenden Doppel- und Rückkehrpunkte und die zugehörigen Geraden, sowie durch die im Systeme der K_n auftretenden Doppel- und Wendetangenten und die zugehörigen Punkte.

Weiterhin müsste man dann auch Systeme von Connexen, sowie die simultanen Functionalinvarianten solcher Systeme untersuchen, wobei sich auch für diese Systeme eine Art Charakteristikentheorie ergeben würde.*) Besonders nämlich wird man auf diejenigen Connexe zu achten haben, welche mit anderen singulären Elementen behaftet sind als ein beliebiger Connex des Systems, wenn man unter einem *singulären Elemente* ein solches versteht, für welches $f = a_x^m u_\alpha^n$ von höherem als dem ersten Grade verschwindet. Es ist indess zu beachten, dass hier nicht nur einzelne singuläre Elemente auftreten können, sondern auch einfach und zweifach unendlich viele Schaaren von solchen mehrfach zählenden Elementen, d. h. auch *singuläre Curvenpaare* und *singuläre Coincidenzen* (analog wie bei den Flächen im Raume nicht nur einzelne Knotenpunkte sondern auch Doppel- und vielfache Curven vorkommen können). — Derartige Fragen sind indess bisher nicht in Angriff genommen.

III. Der conjugirte Connex. — Eindeutige Transformationen eines Connexes.

In der geschilderten Weise kann man einen besonders merkwürdigen zu f covarianten Connex bilden, der als *conjugirter Connex* bezeichnet werden mag; er ist in folgender Weise geometrisch zu definiren.

Gehen wir von einem beliebigen Elemente y, v der Ebene aus, so entsprechen, wie oben ausgeführt wurde, vermöge $f = 0$ jedem

*) Solche Untersuchungen würden denen analog sein, welche Hirst über Systeme von dualistischen Verwandtschaften (Correlationen), also über Systeme von bilinearen Formen mit zwei Reihen Punktcoordinaten, im Sinne der Charakteristikentheorie angestellt hat; vgl. Proceedings of the London Mathematical Society, vol. 5, p. 40, 1874, und Annali di matem. Ser. 2, t. 6, p. 260.

Punkte x von v n Strahlen durch y und jedem Strahle u durch y m Punkte von v (p. 942). Die n Strahlen sind die Tangenten von y an die zu x gehörige K_n, die m Punkte sind die Schnittpunkte von v mit der zu u gehörigen C_m. Wenn nun die zu x gehörige K_n durch y geht, so fallen von den n Strahlen zwei in die Tangente der K_n im Punkte y zusammen; und ein solcher Doppelstrahl wird, da die K_n im Allgemeinen weder Doppel- noch Wendetangenten besitzt, nicht anders entstehen können. Derselbe bildet mit x ein Element des gegebenen Connexes $f=0$ und mag insbesondere durch u bezeichnet sein. Ebenso fallen, wenn die zu u gehörige C_m die Gerade v berührt, von den m auf v liegenden Schnittpunkten zwei zusammen. Dieser doppelt zählende Punkt bildet mit u ein Element von $f=0$ und soll insbesondere mit x bezeichnet werden. Ein jedes Element (y, v), welches zu einem Elemente (x, u) von f in dieser Beziehung steht, ist Element eines covarianten Connexes, den wir dann *den zu f conjugirten* nennen. *Ein Element y, v des letzteren ist also dadurch definirt, dass in Bezug auf den gegebenen Connex sowohl dem Punkte y eine doppelt zählende Gerade u, als der Geraden v ein doppelt zählender Punkt x entspricht.* Dasselbe können wir auch in folgender Weise aussprechen: Ist (x, u) ein Element von $f=0$, d. h. liegt x auf der zu u gehörigen C_m und berührt u die zu x gehörige K_n, und ist y der Berührungspunkt von u mit dieser K_n, v die Tangente jener C_m in x, so ist (y, v) ein Element des conjugirten Connexes. Und man erhält den ganzen conjugirten Connex, indem man das Element (x, u) den ganzen gegebenen Connex durchwandern lässt. *Man erhält demnach auch die Gleichung $F(y, v)=0$ des conjugirten Connexes, wenn man aus den Gleichungen:*

$$(1) \qquad \varrho v_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \sigma y_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}, \quad f=0$$

die Grössen ϱ, σ, x_i, u_i eliminirt.

Wie man diese Elimination im Anschlusse an die obigen symbolischen Methoden auf ein binäres Problem zurückführen kann, werden wir später noch erläutern. Es sei hier zunächst darauf hingewiesen, dass die ganze Beziehung zwischen den Elementen des gegebenen zu denen des conjugirten Connexes durchaus analog derjenigen ist, welche zwischen einer Curve als Punktgebilde und derselben Curve als Liniengebilde stattfindet, und dass demgemäss auch der Satz gilt:

Der conjugirte Connex des conjugirten ist wieder der ursprüngliche.

Den Beweis für dieses Reciprocitätsverhältniss führt man in folgender Weise. Schreiben wir in F wieder $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial u_i}$ für v_i, y_i, so muss der Entstehung von F zufolge die so gebildete Function der x, u den Factor f haben; es muss also die Identität bestehen:

$$F\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial x}\right) = M \cdot f, \tag{2}$$

wo M eine ganze homogene Function der x, u bedeutet. Ist nun der Kürze wegen:

$$q_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad p_i = \frac{\partial f}{\partial u_i},$$

so dass die p, q sich von den y, v nur um unbestimmte Factoren unterscheiden, so ist der conjugirte Connex von F durch die Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} \varrho' z_i &= \frac{\partial F}{\partial q_i} = \frac{\partial Mf}{\partial q_i}, \\ \sigma' w_i &= \frac{\partial F}{\partial p_i} = \frac{\partial Mf}{\partial p_i}, \end{aligned} \qquad f = 0; \tag{3}$$

und man hat bei der Bildung der Differentialquotienten von Mf sich nur Alles durch die p, q statt durch die x, u ausgedrückt zu denken. Da $f = 0$, so kann man für die ersten Gleichungen (3) auch schreiben:

$$\varrho' z_i = M \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad \sigma' w_i = M \frac{\partial f}{\partial p_i}.$$

Nun folgt aus den Gleichungen:

$$mf = \Sigma q_i x_i, \quad nf = \Sigma p_i u_i,$$

dass:

$$m df = \Sigma q_i dx_i + \Sigma x_i dq_i, \quad n df = \Sigma p_i du_i + \Sigma u_i dp_i.$$

Da aber andererseits nach der Definition der p, q:

$$df = \Sigma q_i dx_i + \Sigma p_i du_i,$$

so folgt:

$$(m + n - 1)\, df = \Sigma x_i dq_i + \Sigma u_i dp_i,$$

mithin:

$$x_i = (m + n - 1) \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad u_i = (m + n - 1) \frac{\partial f}{\partial p_i}.$$

In (3) werden also die z, w den x, u proportional; d. h. man kommt auf den gegebenen Connex zurück, w. z. b. w.

Wir wollen jetzt die Ordnung m' und die Klasse n' des conjugirten Connexes bestimmen. Zu dem Ende müssen wir die Frage beantworten, wie viele Punkte irgend eine Gerade ($\gamma_y = 0$) der Ebene bei beliebig gegebenem v mit der zu v im conjugirten Connexe gehörigen Curve $C_{m'}$ gemein hat; die Klasse n' bestimmt sich dann durch die dualistisch entsprechende Ueberlegung. Die gestellte Frage lässt sich algebraisch in folgender Weise fassen: Es soll die Zahl der Werthsysteme y_i bestimmt werden, welche gleichzeitig den Gleichungen:

$$f(x, u) = 0, \quad \varrho v_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \sigma y_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}, \quad \gamma_y = 0 \tag{4}$$

genügen, wo die v_i beliebig gegeben sind. Hier können wir die Gleichung $f=0$ offenbar ersetzen durch $v_x=0$. Verstehen wir ferner unter y, z zwei Punkte auf dem Strahle v, so dass:

$$x_i = \varkappa y_i + \lambda z_i, \tag{5}$$

so haben wir statt der drei Gleichungen $\varrho v_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ die zwei von ϱ unabhängigen Bedingungen:

$$\Sigma y_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma z_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0. \tag{6}$$

Schliesslich geben uns die Gleichungen $\sigma y_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}$ zusammen mit $\gamma_y=0$ die eine Gleichung:

$$\gamma_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + \gamma_2 \frac{\partial f}{\partial u_2} + \gamma_3 \frac{\partial f}{\partial u_3} = 0 \tag{7}$$

In (6) und (7) haben wir drei Gleichungen vor uns, welche nach der Substitution (5) in $\varkappa$, λ bez. vom Grade $m-1$, $m-1$, m sind, in den u_i dagegen bez. vom Grade n, n, $n-1$. Die Elimination der u_i aus diesen Gleichungen gibt ein Resultat, dessen Grad in $\varkappa$, λ die Ordnung des conjugirten Connexes ist, denn sie bestimmt wegen (5) auf v diejenigen Punkte x, welche den Gleichungen (6), (7) und also auch (4) genügen. *Die Ordnung des conjugirten Connexes wird daher gleich*

$$\begin{aligned} m' &= n(n-1)(m-1) + n(n-1)(m-1) + n^2 m \\ &= n\,\{nm + 2(n-1)(m-1)\} \end{aligned} \tag{8}$$

und analog die Klasse desselben gleich

$$n' = m\,\{nm + 2(n-1)(m-1)\} \tag{9}$$

So haben wir z. B.:

für	$m=1$,	$n=1$	:	$m'=1$,	$n'=1$
„	$m=2$,	$n=1$	:	$m'=2$,	$n'=4$
„	$m=1$,	$n=2$	:	$m'=4$,	$n'=2$
„	$m=2$,	$n=2$	:	$m'=12$,	$n'=12$.

Ordnung und Klasse des conjugirten Connexes sind also, so lange der gegebene allgemeiner Natur ist, höher als für den ursprünglichen, ausgenommen, wenn $m=n=1$. Bildet man indess für den conjugirten Connex wieder den conjugirten, so muss sich die ursprüngliche Ordnung und Klasse wieder ergeben. Daher kann der conjugirte Connex nicht ohne gewisse Eigenschaften sein, welche hierzu mitwirken; und indem man diese aufsucht, gelangt man zum Begriffe der *nothwendigen (oder gewöhnlichen) Singularitäten eines Connexes.* Darunter verstehen wir diejenigen Singularitäten, welche sich bei jedem Connexe oder

doch bei seinem conjugirten finden. Bezeichnet man als *allgemein* einen Connex auch dann noch, wenn er zwar nicht ganz willkürliche Coëfficienten besitzt, die Willkürlichkeit der letzteren jedoch nur auf das Auftreten dieser Art von Singularitäten beschränkt ist, so wird bei dem conjugirten Connexe dasselbe eintreten. Die nur mit solchen Singularitäten behafteten Connexe bilden daher ein in sich geschlossenes System, welchem auch ihre conjugirten angehören. Dieser Begriff ist zunächst an den algebraischen Curven der Ebene gebildet; wo jeder Curve in Punktcoordinaten sie selbst, aufgefasst als Tangentengebilde, in ähnlicher Weise gegenübersteht, wie oben der conjugirte Connex dem ursprünglichen. Die nothwendigen Singularitäten sind sind hier diejenigen, welche in den Plücker'schen Formeln vorkommen: Doppel- und Rückkehrpunkte einerseits, Doppel- und Wendetangenten andererseits. Geht man von einer Curve aus, welche bei übrigens willkürlichen Coëfficienten Doppel- und Rückkehrpunkte von willkürlicher Lage besitzt, so wird zwar die *Zahl* der Doppel- und Wendetangenten dadurch modificirt werden können, dieselben werden sich aber nicht etwa zu höheren Singularitäten zusammenziehen. Die Curve als Ordnungscurve betrachtet kann demnach nothwendige Singularitäten aller Arten enthalten, ohne dass dieselbe Curve, als Klassencurve betrachtet, andere als ebenfalls nothwendige Singularitäten enthält.

In gleicher Weise kann man den Begriff der nothwendigen Singularitäten bei allen algebraischen Gebilden charakterisiren; bei Mannigfaltigkeiten von mehr als einer Dimension treten aber neben einzelnen discreten singulären Punkten etc. auch ganze Mannigfaltigkeiten singulärer Punkte etc. auf. So sind bei den algebraischen Flächen im Raume (Mannigfaltigkeiten von zwei Dimensionen) neben einzelnen Doppel- bez. dreifachen Punkten auch Doppelcurven als nothwendige Singularitäten zu berücksichtigen; so hat man bei den Connexen (dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten) doppelte, dreifache und vierfache Gebilde zu unterscheiden, welche die nothwendigen Singularitäten ausmachen. Und zwar erheben sich die Doppelgebilde bis zur zweifachen Mannigfaltigkeit, also bis zur Coincidenz, die dreifachen bis zum Curvenpaare, während vierfache Elemente als nothwendige Singularitäten nur discret auftreten. *Ein singuläres Element* ist dabei als ein solches zu definiren, dem nicht ein einziges, sondern *mehrere* Elemente des conjugirten Connexes entsprechen (wie dem Doppelpunkte einer Curve *zwei* Tangenten derselben). Es können deren zwei oder mehr sein; dieselben können verschieden oder theilweise gleich oder sämmtlich gleich sein; und dem entsprechend treten die singulären Elemente in verschiedener Mannigfaltigkeit auf. Das genauere Studium dieser Verhältnisse bei den Connexen wird sich sehr vereinfachen,

wenn man sich zuvor über die analogen Verhältnisse bei Mannigfaltigkeiten von zwei Dimensionen, also z. B. bei algebraischen Flächen, orientirt hat; wir wollen daher hier nicht weiter auf den Gegenstand eingehen.

Hervorgehoben sei nur noch, dass *es Connexe geben kann, welche sich selbst conjugirt sind.* Es gibt nämlich in $f=0$ im Allgemeinen eine Coincidenz $f=0$, $\varphi=0$, welche gleichzeitig dem gegebenen und dem conjugirten Connexe angehört. Man braucht in der That wegen (1) nur zu setzen

$$f(y, v)=0 \quad \text{oder} \quad f\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial x}\right)=0.$$

Dieses ist die Gleichung $\varphi=0$, welche zusammen mit $f=0$ die fragliche Coincidenz bestimmt. Aber es kann geschehen, dass φ für besondere Connexe $f=0$ selbst den Factor f hat; alsdann ist *jedes* zu einem Elemente (x, u) von $f=0$ conjugirte Element (y, v) auch ein Element von $f=0$, und dieser Connex ist sich selbst conjugirt.*) —

Wir gehen dazu über, die Bildung der Gleichung des conjugirten Connexes mit Hülfe der symbolischen Hülfsmittel zu erläutern und an einigen Beispielen durchzuführen. Nach den früheren Erörterungen (p. 943 und p. 945) haben wir zu dem Zwecke zunächst die Bedingung dafür aufzustellen, dass eine doppelt binäre Gleichung:

$$\varphi \equiv A_\varkappa{}^{m} \mathsf{A}_\lambda{}^{n}=0 \tag{10}$$

eine Doppelwurzel $\varkappa_1 : \varkappa_2$ und gleichzeitig eine Doppelwurzel $\lambda_1 : \lambda_2$ habe; d. h. wir haben die Grössen $\varkappa$ und λ aus den folgenden vier Gleichungen zu eliminiren:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\varkappa_1}=0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\varkappa_2}=0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_1}=0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_2}=0, \tag{11}$$

welche wegen der doppelten Homogeneität von φ nur die Stelle von dreien vertreten. Die Gleichung des conjugirten Connexes zu $f \equiv a_x{}^m u_\alpha{}^n=0$ entsteht dann in bekannter Weise aus der gefundenen binären Form, indem man jeden Factor (AB) derselben durch (abu), jeden Factor (AB) durch $(\alpha\beta x)$ ersetzt. Die Invariante der binären Form φ, deren

*) Ein Beispiel hierfür gibt der lineo-lineare Connex:

$$u_1x_1+u_2x_2-u_3x_3=0,$$

welcher einem Punkte x einen Punkt y durch die Gleichungen zuordnet:

$$\varrho y_1=x_1, \qquad \varrho y_2=x_2, \qquad \varrho y_3=-x_3,$$

und welcher also einen besonderen Fall der perspectivischen Collineation darstellt. Mit derselben ist die inverse Transformation in diesem Falle identisch und da letztere im Allgemeinen durch den ebenfalls lineo-linearen conjugirten Connex dargestellt wird (wie wir später sehen werden), ist hier der conjugirte Connex zum ursprünglichen proportional.

Verschwinden die beregte Bedingung darstellt, soll im Folgenden mit R bezeichnet werden; ihr Grad g in den Coëfficienten von φ ist aus dem Vorstehenden leicht zu bestimmen. In R nämlich sind dann mg Symbolreihen $A, B, \ldots$ und ng Symbolreihen A, B vorhanden, welche sich bez. zu $\frac{1}{2}mg$ und $\frac{1}{2}ng$ symbolischen Factoren der Typen (AB) und (AB) zusammensetzen. Daher wird die Gleichung des conjugirten Connexes vom Grade $\frac{1}{2}mg$ in den u und vom Grade $\frac{1}{2}ng$ in den x; d. h. wir haben wegen (8) und (9):

$$g = 2\,\{mn + 2\,(m-1)\,(n-1)\}\,.$$

Dies ist der Grad derjenigen Invariante der doppelt binären Form (10), *deren Verschwinden aussagt, dass einer Doppelwurzel der einen Reihe von Veränderlichen eine Doppelwurzel der anderen Reihe entsprechen kann.*

Eine besondere Erörterung verlangen diese Verhältnisse dann, wenn die eine der Zahlen m, n gleich 1 ist. Alsdann nämlich kann man bei der einen Reihe nicht mehr von einer eigentlichen Doppelwurzel sprechen; vielmehr tritt bei der Bildung von R der besondere Umstand ein, dass die Coëfficienten der binären Form φ in Bezug auf die linear vorkommende Reihe beide gleich Null gesetzt werden. Ist also etwa:

$$f = \mathsf{X}_1 u_1 + \mathsf{X}_2 u_2 + \mathsf{X}_3 u_3\,,$$

wo die X nur noch von den x allein abhängen, so wird:

$$\varphi = A_\varkappa^{\,m} \mathsf{A}_\lambda = P_1 \lambda_1 + P_2 \lambda_2\,.$$

An Stelle von (11) treten also die Gleichungen:

$$P_1 = 0\,, \quad P_2 = 0$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial \varkappa_1}\lambda_1 + \frac{\partial P_2}{\partial \varkappa_1}\lambda_2 = 0\,, \quad \frac{\partial P_1}{\partial \varkappa_2}\lambda_1 + \frac{\partial P_2}{\partial \varkappa_2}\lambda_2 = 0\,.$$

Die Elimination von λ_1, λ_2 aus den beiden letzten Gleichungen führt auf des Verschwinden der Functionaldeterminante von P_1 und P_2, welches eine bekannte Folge der beiden ersten Gleichungen ist. *In dem Falle also, dass eine der Zahlen m, n gleich Eins ist, reducirt sich R auf die Resultante von P_1 und P_2.*

Um also z. B. den *conjugirten Connex des Connexes* (1, 1) $a_x u_\alpha = 0$ aufzustellen, hat man die Resultante der beiden linearen Formen $A_\varkappa \mathsf{A}_1$ und $A_\varkappa \mathsf{A}_2$ zu bilden, welche gleich

$$(AB)\,\mathsf{A}_1\mathsf{B}_2 = \tfrac{1}{2}\,(AB)\,(\mathsf{AB})$$

ist. Die Gleichung des conjugirten Connexes wird daher:

$$(abu)\,(\alpha\beta x) = 0\,. \tag{12}$$

Betrachten wir ferner den Connex (2, 1):

$$f = a_x^{\,2} u_\alpha = b_x^{\,2} u_\beta\,.$$

Hier haben wir die Resultante der Formen $A_x^2 \mathsf{A}_1$, $A_x^2 \mathsf{A}_2$ zu bilden, welche bekanntlich gleich $ST - U^2$ wird, wenn U die simultane Invariante, S und T die besonderen Invarianten beider Formen bedeuten. Um letztere zu bilden benutzen wir bez. die Symbole $AB\mathsf{AB}$ und $CD\Gamma\Delta$; dann wird:

$$S = (AB)^2 \mathsf{A}_1 \mathsf{B}_1, \quad T = (CD)^2 \Gamma_2 \Delta_2,$$
$$U = (AB)^2 \mathsf{A}_1 \mathsf{B}_2 = (CD)^2 \Gamma_1 \Delta_2.$$

Mithin haben wir:

$$ST - U^2 = (AB)^2 (CD)^2 \mathsf{A}_1 \Delta_2 (\mathsf{B}\Gamma)$$
$$= \tfrac{1}{2} (AB)^2 (CD)^2 (B\Gamma)(\mathsf{A}\Delta),$$

und *die Gleichung des conjugirten Connexes von $a_x^2 u_\alpha = 0$ wird;*

$$(13) \qquad (abu)^2 (cdu)^2 (\beta\gamma x)(\alpha\delta x) = 0.$$

Wir wollen endlich noch zu einem Connexe (2, 2) den conjugirten direct bestimmen. Man hat hier zunächst die Form R für eine binäre Form zu bestimmen, in der zwei Reihen von Veränderlichen vorkommen, und zwar jede zur zweiten Dimension. Ein solche Form sei:

$$(14) \qquad \begin{aligned} \varphi = A_x^2 \mathsf{A}_\lambda^2 = &(a_{11,11} x_1^2 + 2a_{12,11} x_1 x_2 + a_{22,11} x_2^2) \lambda_1^2 \\ &+ 2(a_{11,12} x_1^2 + 2a_{12,12} x_1 x_2 + a_{22,12} x_2^2) \lambda_1 \lambda_2 \\ &+ \ (a_{11,22} x_1^2 + 2a_{12,22} x_1 x_2 + a_{22,22} x_2^2) \lambda_2^2. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (11):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_2} = 0$$

kann man allgemein durch die folgenden ersetzen:

$$(15) \qquad \begin{aligned} \varrho \cdot x_1 \lambda_1 &= \frac{1}{mn} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial \lambda_2}, \quad & \varrho \cdot x_2 \lambda_1 &= -\frac{1}{mn} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial \lambda_2}, \\ \varrho \cdot x_1 \lambda_2 &= -\frac{1}{mn} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial \lambda_1}, \quad & \varrho \cdot x_2 \lambda_2 &= \frac{1}{mn} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial \lambda_1}, \end{aligned}$$

wo ϱ ein unbestimmter Factor ist. Im vorliegenden Falle ist dieses System von Gleichungen gegeben durch:

$$\begin{aligned} &(a_{12,12} - \varrho) x_1 \lambda_1 + a_{22,12} x_2 \lambda_1 + a_{12,22} x_1 \lambda_2 + a_{22,22} x_2 \lambda_2 = 0 \\ &a_{11,12} x_1 \lambda_1 + (a_{21,12} + \varrho) x_2 \lambda_1 + a_{11,22} x_1 \lambda_2 + a_{21,22} x_2 \lambda_2 = 0 \\ &a_{12,11} x_2 \lambda_1 + a_{22,11} x_2 \lambda_1 + (a_{12,21} + \varrho) x_1 \lambda_2 + a_{22,21} x_2 \lambda_2 = 0 \\ &a_{11,11} x_1 \lambda_1 + a_{21,11} x_2 \lambda_1 + a_{11,21} x_1 \lambda_2 + (a_{21,21} - \varrho) x_2 \lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir durch Ω die Determinante dieses in Bezug auf die Grössen $x_1 \lambda_1$, $x_2 \lambda_1$, $x_1 \lambda_2$, $x_2 \lambda_2$ linearen Systems, durch $\Omega_{ik,lm}$ die Unterdeterminanten von Ω, so hat man zunächst:

$$(16)\quad \Omega = \begin{vmatrix} a_{12,12}-\varrho & a_{22,12} & a_{12,22} & a_{22,22} \\ a_{11,12} & a_{21,12}+\varrho & a_{11,22} & a_{21,22} \\ a_{12,11} & a_{22,11} & a_{12,21}+\varrho & a_{22,21} \\ a_{11,11} & a_{21,11} & a_{11,21} & a_{21,21}-\varrho \end{vmatrix} = 0;$$

sodann verhalten sich die Quadrate und Producte der obigen vier Grössen, wie die $\Omega_{ik,lm}$, d. h. es ist, wenn μ einen unbestimmten Factor bezeichnet, unter Anderem:

$$\mu \cdot \varkappa_1 \lambda_1 \cdot \varkappa_2 \lambda_2 = \Omega_{12,12} = \Omega_{21,21}$$
$$\mu \cdot \varkappa_1 \lambda_2 \cdot \varkappa_2 \lambda_1 = \Omega_{12,21} = \Omega_{21,12}\,.$$

Mithin muss der Ausdruck

$$\Omega_{12,21} + \Omega_{21,12} - \Omega_{12,12} - \Omega_{21,21}$$

verschwinden; dieses aber ist nichts anderes als der Differentialquotient von Ω nach ϱ. Man hat daher zu gleicher Zeit:

$$\Omega = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho} = 0,$$

d. h. die Discriminante der in ϱ biquadratischen Gleichung (16) muss verschwinden. *Die gesuchte Bildung R ist folglich gleich dieser Discriminante selbst:*

$$(17)\qquad R = i^3 - 6j^2,$$

wenn i und j die beiden Invarianten der Form Ω bedeuten.

Zur wirklichen Berechnung von R in symbolischer Form bemerken wir Folgendes. In Ω ist der Coëfficient von ϱ^4 gleich Eins, und das Glied mit ϱ^3 fehlt; es ist also:

$$\Omega = \varrho^4 + 6\,U\varrho^2 + 4\,V\varrho + W,$$

und daher:

$$(18)\qquad i = 2\,(W + 3\,U^2), \quad j = 6\,(UW - U^3 - V^2)$$

Die Ausdrücke U, V, W sind Invarianten von φ, welche einen besonderen Charakter haben, denselben, welcher, wie schon oben erwähnt, dem Ausdrucke R zukommt (p. 943). Sie sind nämlich Invarianten, nicht nur, wenn man die Veränderlichen $\varkappa$, λ *derselben* linearen Transformation unterwirft, sondern auch, wenn man auf beide Reihen *verschiedene* lineare Transformationen anwendet. Und zwar sind sie die einzigen dieser Art; denn weil die Zahl der Coëfficienten von φ gleich 9 ist, gibt es 6 von einander unabhängige Invarianten dieser Form in Bezug auf eine den Reihen $\varkappa$, λ gemeinsame lineare Transformation und daher *nur drei Bildungen, welche die Invarianten-Eigenschaft auch in Bezug auf verschiedene Transformationen beider Reihen besitzen.*

Dass in der That diese doppelte Invarianteneigenschaft den Coëfficienten U, V, W der Gleichung $\Omega = 0$ zukommt, beweist man am

einfachsten dadurch, dass man die Unveränderlichkeit von Ω für den Fall nachweist, wo nur eine der Reihen $\varkappa$, λ linear transformirt wird, die andere ungeändert bleibt (vorausgesetzt, dass man statt ϱ gleichzeitig eine Grösse ϱ' passend einführt). Wir benutzen die Transformation:

$$(19)\qquad \varkappa_1 = \alpha\varkappa_1' + \beta\varkappa_2', \quad \varkappa_2 = \gamma\varkappa_1' + \delta\varkappa_2',$$

und setzen nun die neuen Gleichungen an:

$$(20)\qquad \begin{aligned} \varrho'\cdot\varkappa_1'\lambda_1 &= \tfrac{1}{4}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varkappa_2'\partial\lambda_2}, & \varrho'\cdot\varkappa_2'\lambda_1 &= -\tfrac{1}{4}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varkappa_1'\partial\lambda_2},\\ \varrho'\cdot\varkappa_1'\lambda_2 &= -\tfrac{1}{4}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varkappa_2'\partial\lambda_1}, & \varrho'\cdot\varkappa_2'\lambda_2 &= \tfrac{1}{4}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varkappa_1'\partial\lambda_1}. \end{aligned}$$

Es ist zu zeigen, dass diese Gleichungen auf die Gleichungen (15) zurückkommen. Nun ist aber:

$$\frac{\partial}{\partial\varkappa_1'} = \alpha\frac{\partial}{\partial\varkappa_1} + \gamma\frac{\partial}{\partial\varkappa_2}, \quad \frac{\partial}{\partial\varkappa_2'} = \beta\frac{\partial}{\partial\varkappa_1} + \delta\frac{\partial}{\partial\varkappa_2};$$

daher geben die Gleichungen (20):

$$\begin{aligned} \varrho'\cdot\varkappa_1'\lambda_1 &= \frac{\beta}{4}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varkappa_1\partial\lambda_2} + \frac{\delta}{4}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varkappa_2\partial\lambda_2},\\ \varrho'\cdot\varkappa_2'\lambda_1 &= -\frac{\alpha}{4}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varkappa_1\partial\lambda_2} - \frac{\gamma}{4}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varkappa_2\partial\lambda_2},\\ \varrho'\cdot\varkappa_1'\lambda_2 &= -\frac{\beta}{4}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varkappa_1\partial\lambda_1} - \frac{\delta}{4}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varkappa_2\partial\lambda_1},\\ \varrho'\cdot\varkappa_2'\lambda_2 &= \frac{\alpha}{4}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varkappa_1\partial\lambda_1} + \frac{\gamma}{4}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varkappa_2\partial\lambda_1}, \end{aligned}$$

Multiplicirt man jetzt die erste und zweite, bez. dritte und vierte Gleichung einmal mit α, β, einmal mit γ, δ und addirt jedesmal, so kommt wegen (19):

$$\begin{aligned} \varrho'\cdot\varkappa_1\lambda_1 &= \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{4}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varkappa_2\partial\lambda_2}, & \varrho'\cdot\varkappa_2\lambda_1 &= -\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{4}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varkappa_1\partial\lambda_2},\\ \varrho'\cdot\varkappa_1\lambda_2 &= -\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{4}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varkappa_2\partial\lambda_1}, & \varrho'\cdot\varkappa_2\lambda_2 &= \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{4}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varkappa_1\partial\lambda_1}; \end{aligned}$$

und dies sind wieder die Gleichungen (15), wenn man noch setzt:

$$\varrho' = (\alpha\delta - \beta\gamma)\,\varrho.$$

Da nun ϱ eine Wurzel der Gleichung $\Omega = 0$ war, so genügt ϱ' der Gleichung:

$$\varrho'^4 + 6\,Ur^2\varrho'^2 + 4\,Vr^3\varrho' + Wr^4 = 0,$$

wo $r = \alpha\delta - \beta\gamma$ die Substitutionsdeterminante bedeutet.

Eine ganz analoge Betrachtung gilt, wenn man die $\varkappa$ unverändert lässt und nur λ_1, λ_2 linear transformirt. Die Coëfficienten U, V, W von Ω ändern sich daher bez. um die Factoren $r^2r'^2$, $r^3r'^3$, $r^4r'^4$, wenn r die Determinante einer linearen Transformation der $\varkappa_i$, r' die

Determinante einer solchen Transformation der λ_i bedeutet; d. h. U, V, W *sind in der That Invarianten für jede von beiden Transformationen.* Drei solche von einander unabhängige Invarianten der Form $A_x{}^2 \mathsf{A}_\lambda{}^2$ sind aber z. B.

$$(AB)^2\,(\mathsf{AB})^2,\quad (AB)\,(BC)\,(CA)\,(\mathsf{AB})\,(\mathsf{B\Gamma})\,(\mathsf{\Gamma A}),$$
$$(AB)^2\,(CD)^2\,(\mathsf{A\Gamma})^2\,(\mathsf{B\Delta})^2;$$

und da es auch nur drei unabhängige Invarianten der Art gibt, und sich die hier genannten bei linearer Transformation in der That bez. um Factoren $r^2 r'^2$, $r^3 r'^3$, $r^4 r'^4$ ändern, so muss U mit der ersten, V mit der zweiten bis auf einen Zahlenfactor übereinstimmen, während sich W aus der dritten und dem Quadrate der ersten muss zusammensetzen lassen.

In der That kann man den Coëfficienten U von ϱ^2 in Ω auch leicht direct berechnen. Man findet:

$$\begin{aligned}6U &= -2(a_{12,12}{}^2 - a_{22,12}a_{11,12}) - (a_{11,11}a_{22,22} + a_{22,11}a_{11,22} - 2a_{12,11}a_{12,22})\\ &= (AB)^2\,\{\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2\mathsf{B}_1\mathsf{B}_2 - \mathsf{A}_1{}^2\mathsf{B}_2{}^2\},\end{aligned}$$

oder wenn man gleichzeitig A mit B, A mit B vertauscht und die halbe Summe des alten und neuen Ausdruckes bildet:

$$U = -\tfrac{1}{12}\,(AB)^2\,(\mathsf{AB})^2. \tag{21}$$

Zur Berechnung von V bemerken wir, dass die zweite der obigen Invarianten in nicht symbolischer Form gegeben ist durch

$$V' = 6\begin{vmatrix} a_{11,11} & a_{11,12} & a_{11,22}\\ a_{12,11} & a_{12,12} & a_{12,22}\\ a_{22,11} & a_{22,12} & a_{22,22}\end{vmatrix} = (AB)(BC)(CA)(\mathsf{AB})(\mathsf{B\Gamma})(\mathsf{\Gamma A}),$$

und dass $V = V'\,.\,c$, wenn c einen Zahlenfactor bedeutet. Nun wird aber $V' = 6$, wenn man $a_{11,11} = a_{12}, a_{12} = a_{22,22} = 1$ nimmt und alle anderen Coëfficienten von φ verschwinden lässt. Andererseits wird in Folge letzterer Substitution:

$$\Omega = (1 - \varrho^2)^2 - (1 + \varrho)^2 = \varrho^4 - 3\,\varrho^2 - 2\,\varrho,$$

also $4\,V = -2$; somit folgt $c = -\frac{1}{12}$ und:

$$V = -\tfrac{1}{12}\,(AB)\,(BC)\,(CA)\,(\mathsf{AB})\,(\mathsf{B\Gamma})\,(\mathsf{\Gamma A}). \tag{22}$$

Den dritten Coëfficienten W erhält man aus Ω für $\varrho = 0$. Die so entstehende Determinante entwickeln wir, um für sie den symbolischen Ausdruck zu finden, nach zweigliedrigen Unterdeterminanten in der Form:

$$W = p_{12}q_{31} + p_{31}q_{12} + p_{24}q_{31} + p_{31}q_{24} + p_{23}q_{11} + p_{11}q_{23},$$

wo immer $p_{ik} = -p_{ki}$, $q_{ik} = -q_{ki}$ und z. B.:

$$p_{12} = a_{12,12}^2 - a_{11,12}\,a_{22,12} \qquad = -\tfrac{1}{2}(AB)^2\,\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2$$
$$p_{13} = a_{12,22}\,a_{11,12} - a_{11,22}\,a_{12,12} = -(AB)\,A_1\,B_1\,\mathrm{A}_2^2\,\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$q_{31} = a_{12,12}^2 - a_{11,12}\,a_{22,12} \qquad = -\tfrac{1}{2}(CD)^2\,\Gamma_1\Gamma_2\Delta_1\Delta_2\,,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Es wird dann zunächst:

$$\begin{aligned} W = \tfrac{1}{4}(AB)^2(CD)^2\,&\{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\Gamma_1\Gamma_2\Delta_1\Delta_2 + \mathrm{A}_2^2\mathrm{B}_2^2\Gamma_1^2\Delta_1^2\} \\ - (AB)(CD)\Gamma_1^2\Delta_1\Delta_2\,&\{A_2B_2C_1D_1\,\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2^2 - A_1B_1C_2D_2\,\mathrm{A}_2^2\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2 \\ &- A_2B_1C_1D_2\,\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2^2 - A_1B_2C_2D_1\,\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2^2\}\,. \end{aligned}$$

Hier lassen sich das dritte und fünfte Glied zusammenziehen zu

$$(AB)(CD)\,\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2^2\Gamma_1^2\Delta_1\Delta_2\,A_2C_1\,(BD)\,,$$

und ebenso das vierte und sechste, nachdem man in ersterem A mit B und A mit B vertauscht hat, zu

$$-(AB)(CD)\,\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2^2\Gamma_1^2\Delta_1\Delta_2\,A_1C_2\,(BD)\,;$$

die beiden so entstehenden Glieder endlich geben zusammengenommen den Ausdruck:

$$W' = -(AB)(AC)(BD)(CD)\,\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2^2\Delta_1\Delta_2\Gamma_1^2\,.$$

Nun ist identisch $(AC)(BD) = (AB)(CD) + (BC)(AD)$; und sonach:

$$W' = -(AB)^2(CD)^2\,\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2^2\Gamma_1^2\Delta_1\Delta_2 - W''\,,$$

wo:

$$\begin{aligned} W'' &= (AB)(CD)(BC)(AD)\,\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2^2\Gamma_1^2\Delta_1\Delta_2 \\ &= (AD)(BC)(CD)(AB)\,\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\Gamma_1^2\Delta_2^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(AB)(CD)\{(AD)(BC) - (BD)(AC)\}\,\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\Gamma_1^2\Delta_2^2 \\ &= -\tfrac{1}{2}(AB)^2(CD)^2\,\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\Gamma_1^2\Delta_2^2\,. \end{aligned}$$

Setzen wir also den Ausdruck W' in W ein, so wird schliesslich:

$$\begin{aligned} W = \tfrac{1}{4}(AB)^2(CD)^2\,\{&\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\Gamma_1\Gamma_2\Delta_1\Delta_2 + \mathrm{A}_2^2\mathrm{B}_2^2\Gamma_1^2\Delta_1^2 \\ &+ 2\,\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\Gamma_1^2\Delta_2^2 - 4\,\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2^2\Gamma_1^2\Delta_1\Delta_2\}\,. \end{aligned}$$

Hierin vertauschen wir gleichzeitig A, A mit B, B, sodann C, Γ mit D, Δ und dann beide zugleich. Man erhält so vier Ausdrücke für W und W selbst gleich ihrer Summe, dividirt durch 4:

$$\begin{aligned} W = \tfrac{1}{8}(AB)^2(CD)^2\,\{&(\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\Gamma_2\Delta_2 + \mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\Gamma_1\Delta_1)^2 \\ &+ \mathrm{A}\,\mathrm{A}_2\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2(\Gamma_1^2\Delta_2^2 + \Gamma_2^2\Delta_1^2) + \Gamma_1\Gamma_2\Delta_1\Delta_2(\mathrm{A}_1^2\mathrm{B}_2^2 + \mathrm{A}_2^2\mathrm{B}_1^2) \\ &- \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\Gamma_1\Gamma_2(\mathrm{B}_1^2\Delta_2^2 + \mathrm{B}_2^2\Delta_1^2) - \mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\Delta_1\Delta_2(\mathrm{A}_1^2\Gamma_2^2 + \mathrm{A}_2^2\Gamma_1^2) \\ &- \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\Delta_1\Delta_2(\mathrm{B}_1^2\Gamma_2^2 + \mathrm{B}_2^2\Gamma_1^2) - \mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\Gamma_1\Gamma_2(\mathrm{A}_1^2\Delta_2^2 + \mathrm{A}_2^2\Delta_1^2)\}\,. \end{aligned}$$

Es ist aber identisch:

$$\mathsf{A}_1 \mathsf{A}_2 \mathsf{B}_1 \mathsf{B}_2 (\Gamma_1{}^2 \Delta_2{}^2 + \Gamma_2{}^2 \Delta_1{}^2) + \Gamma_1 \Gamma_2 \Delta_1 \Delta_2 (\mathsf{A}_1{}^2 \mathsf{B}_2{}^2 + \mathsf{A}_2{}^2 \mathsf{B}_1{}^2)$$
$$= \tfrac{1}{2} \{ -(\mathsf{AB})^2 (\Gamma\Delta)^2 + (\mathsf{A}_1 \mathsf{B}_2 \Gamma_1 \Delta_2 + \mathsf{A}_2 \mathsf{B}_1 \Gamma_2 \Delta_1)^2$$
$$+ (\mathsf{A}_1 \mathsf{B}_2 \Gamma_2 \Delta_1 + \mathsf{A}_2 \mathsf{B}_1 \Gamma_1 \Delta_2)^2 \} .$$

Trägt man dies und die ähnlichen Umformungen der entsprechenden Ausdrücke in den Ausdruck von W ein, so erhält man:

$$W = \tfrac{1}{16} (AB)^2 (CD)^2 \{ (\mathsf{A}\Gamma)^2 (\mathsf{B}\Delta)^2 + (\mathsf{A}\Delta)^2 (\mathsf{B}\Gamma)^2 - (\mathsf{AB})^2 (\Gamma\Delta)^2 \} .$$

Von den drei Gliedern, welche hier auftreten, sind die beiden ersten einander gleich, das letzte ist gleich $-9\,U^2$; und man hat so endlich

$$(23) \qquad W = \tfrac{1}{8} (AB)^2 (CD)^2 (\mathsf{A}\Gamma)^2 (\mathsf{B}\Delta)^2 - 9\,U^2 .$$

Die in den Gleichungen (21), (22), (23) gegebenen Werthe hat man in i und j nach (18) einzusetzen, um nach (17) die gesuchte Invariante R zu erhalten. *Die Gleichung des zu dem Connexe $a_x{}^2 u_\alpha{}^2 = 0$ conjugirten Connexes ist daher gegeben durch:*

$$8 (W + 3\,U^2)^3 - 216 (UW - U^3 - V^2)^2 = 0 ,$$

wenn:

$$U = -\tfrac{1}{12} (abu)^2 (\alpha\beta x)^2$$
$$V = -\tfrac{1}{12} (abu)(bcu)(cau)(\alpha\beta x)(\beta\gamma x)(\gamma\alpha x)$$
$$W = \tfrac{1}{8} (abu)^2 (cdu)^2 (\alpha\gamma x)^2 (\beta\delta x)^2 - 9\,U^2 . -$$

Der conjugirte Connex war vermöge der Gleichungen (1) Element für Element *eindeutig* auf den gegebenen Connex $f = 0$ bezogen; diese Gleichungen geben also einen speciellen Fall einer *allgemeinen eindeutigen Transformation des Connexes* $f = 0$, welche man in den Gleichungen:

$$(24) \qquad \varrho y_i = \varphi_i \left(\overset{p}{x}, \overset{q}{u}\right), \quad \sigma v_i = \psi \left(\overset{r}{x}, \overset{s}{u}\right) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

ansetzen kann, wenn $\varphi_i = 0$ drei beliebige Connexe (p, q), $\psi_i = 0$ drei beliebige Connexe (r, s) vorstellen. Die Gleichung $F(y, v) = 0$ des neuen Connexes ergibt sich dann durch Elimination von ϱ, σ, x_i, u_i aus den Gleichungen (24) und aus $f(x, u) = 0$. Für den Fall, dass die Transformationsconnexe $\varphi = 0$, $\psi = 0$ zu $f = 0$ nicht in besonderer Lage sind, bestimmt man leicht Ordnung m' und Klasse n' von $F = 0$. Die Ordnung m' nämlich ist offenbar gleich der Zahl der Punkte y, welche bei beliebig gewählten Werthen der v_i gleichzeitig den Gleichungen (24) und $f = 0$, $\gamma_y = 0$ genügen, wo die γ_i beliebige Grössen sind; d. h. — wegen der Eindeutigkeit der Transformation (24) — gleich der Zahl der Elemente (x, u), welche den vier Connexen:

$$f(x, u) = 0, \quad \Sigma \gamma_i \varphi_i = 0, \quad v_2 \psi_1 - v_1 \psi_2 = 0, \quad v_3 \psi_2 - v_2 \psi_3 = 0$$

gemeinsam sind; und somit haben wir nach Gleichung (4), p. 940:

(25) $$m' = r^2 nq + s^2 mp + 2rs(mq + np)$$
und ebenso:
(26) $$n' = p^2 ns + q^2 mr + 2pq(ms + nr).$$

Hieran sind noch Modificationen anzubringen, wenn die Transformationsconnexe φ, ψ zu f in besonderer Beziehung stehen. *Es mögen z. B. die Connexe $\varphi_i = 0$ ein Curvenpaar (d, e), die Connexe $\psi_i = 0$ ein Curvenpaar (δ, ε) mit $f = 0$ gemein haben.* Von dem Curvenpaare, welches den Gleichungen

$$f = 0, \quad v_2\psi_1 - v_1\psi_2 = 0, \quad v_3\psi_2 - v_2\psi_3 = 0$$

gemeinsam ist, und dessen Ordnung und Klasse durch die Gleichungen (3) und (2) p. 940 bestimmt wird, ist dann noch das Curvenpaar (δ, ε) abzuziehen. Es bleibt dann ein Paar von der Ordnung $2rsn + ms^2 - \delta$ und der Klasse $2rsm + nr^2 - \varepsilon$. Nach den Entwicklungen auf p. 940 wird also jetzt *die Ordnung des Connexes $F(y, v) = 0$:*

(27) $$m' = (2nrs + ms^2 - \delta)p + (2mrs + nr^2 - \varepsilon)q$$

und die Klasse desselben:

(28) $$n' = (2npq + mq^2 - d)r + (2mpq + np^2 - e)s.$$

Aus diesen Formeln findet man insbesondere wieder Ordnung und Klasse des conjugirten Connexes. Die in den Gleichungen (1) an Stelle von φ_i auftretenden Connexe $\frac{\partial f}{\partial u_i} = 0$ bestimmen nämlich im Allgemeinen ein Curvenpaar der Ordnung $3m(n-1)^2$ und der Klasse $3(n-1)m^2$, welches nach dem Euler'schen Theoreme auch dem Connexe $f = 0$ angehört. Für die Gleichungen (1) wird daher:

$$d = 3m(n-1)^2, \quad e = 3(n-1)m^2,$$

und ebenso:

$$\delta = 3n^2(m-1), \quad \varepsilon = 3(m-1)^2 n$$

ferner:

$$p = m, \quad q = n - 1, \quad r = m - 1, \quad s = n.$$

Setzt man aber diese Werthe in (27) und (28) ein, so findet man in der That wieder die bekannten Zahlen für Ordnung und Klasse des conjugirten Connexes.

Bei weiteren Untersuchungen über die eindeutigen Transformationen der Connexe wird man besonders auf die Singularitäten derselben zu achten haben (wie bei den Transformationen einer Curve) und auf die Beziehungen zwischen den Singularitäten des gegebenen zu denen des transformirten Connexes. Auch wird man verschiedene Arten von Transformationen unterscheiden müssen, je nachdem dieselben einen ganzen Connex eindeutig in einen anderen überführen, oder nur für die Elemente einer Coincidenz, oder endlich nur für die

eines Curvenpaares eindeutig sind, in analoger Weise, wie man im Raume eindeutige Transformationen einer Fläche und einer einzelnen Curve zu betrachten hat. Die sich hieran knüpfenden Untersuchungen gestalten sich in ganz ähnlicher Weise wie die entsprechenden Theorien in einer beliebigen Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen. Insbesondere wird man sowohl für Connexe, wie für Coincidenzen und Curvenpaare eine Zahl, *das Geschlecht dieser Gebilde*, aufstellen können, welche bei allen eindeutigen Transformationen derselben ungeändert bleibt.*) Es ist jedoch zu bemerken, dass *bei den Coincidenzen*, wie bei den algebraischen Flächen, *zwei solche constante Zahlen*, *bei den Connexen*, wie bei Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen, *drei solche Zahlen auftreten***); beim Curvenpaare dagegen gibt es, wie bei einer einzelnen Curve (oder überhaupt bei einer algebraischen Mannigfaltigkeit von einer Dimension) nur *eine* solche constante Zahl. Die wirkliche Aufstellung dieser verschiedenen Zahlen (Bestimmung ihrer Abhängigkeit von etwaigen Singularitäten des Connexes, der Coincidenz oder des Curvenpaares) und die Durchführung des Beweises für ihre Erhaltung bei eindeutigen Transformationen, wird in analoger Weise zu geschehen haben wie bei jenen allgemeinen algebraischen Mannigfaltigkeiten. Darauf wollen wir indess hier nicht mehr eingehen. Es sei nur noch erwähnt, wie *für die Connexe und Coincidenzen die dreifachen bez. zweifachen Integrale zu bilden sind, mit deren Untersuchung man die Bestimmung jener Zahlen in Zusammenhang bringen kann.* Die betreffenden Resultate für beliebige Mannigfaltigkeiten (vgl. Nöther a. a. O.) modificiren sich hier nämlich in eigenthümlicher Weise, weil wir es nicht mit einer Gruppe von vier, sondern mit zwei Gruppen von je zwei Veränderlichen zu thun haben.

Es sei (x, u) ein Element des Connexes $f = 0$. Da letzterer ein dreifach unendliches Gebilde darstellt, so sind in ihm drei von einander linear-unabhängige Fortschreitungsrichtungen möglich, die wir, von dem Elemente (x, u) zu einem benachbarten Elemente $(x + dx, u + du)$ übergehend, den Veränderlichen ertheilen können. Indem wir drei solche Differentiale durch die Buchstaben d, d', d'' unterscheiden, ergeben sich die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Sigma f_{x_i}' \, dx_i + \Sigma f_{u_i}' \, du_i &= 0 \\ \Sigma f_{x_i}' \, d'x_i + \Sigma f_{u_i}' \, d'u_i &= 0 \\ \Sigma f_{x_i}' \, d''x_i + \Sigma f_{u_i}' \, d''u_i &= 0, \end{aligned}$$

wo $f_{x_i}' = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $f_{u_i}' = \frac{\partial f}{\partial u_i}$. Nehmen wir die Gleichungen hinzu:

*) Vgl. Clebsch: Comptes rendus, Bd. 67, December 1868 und Nöther: Math. Annalen, Bd. 2, p. 293 ff.

**) Vgl. Nöther: Math. Annalen, Bd. 8, p. 495 ff.

$$\Sigma x_i f'_{x_i} = 0\,, \quad \Sigma u_i f'_{u_i} = 0\,,$$

so haben wir fünf Gleichungen, aus denen die Verhältnisse der f'_{x_i}, f'_{u_i} bestimmt werden können; und zwar werden sie den aus dem unvollständigen Systeme

$$\begin{Vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 & du_1 & du_2 & du_3 \\ d'x_1 & d'x_2 & d'x_3 & d'u_1 & d'u_2 & d'u_3 \\ d''x_1 & d''x_2 & d''x_3 & d''u_1 & d''u_2 & d''u_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_1 & u_2 & u_3 \end{Vmatrix}$$

gebildeten Determinanten proportional. Ist also Θ eine ganze homogene Function vom Grade $m-3$ in den x_i und vom Grade $n-3$ in den u_i, so stellt der Ausdruck

$$(29) \qquad dI = \frac{\Theta \cdot \begin{vmatrix} dx_1 & d'x_1 & d''x_1 & x_1 & 0 & \alpha_1 \\ dx_2 & d'x_2 & d''x_2 & x_2 & 0 & \alpha_2 \\ dx_3 & d'x_3 & d''x_3 & x_3 & 0 & \alpha_3 \\ du_1 & d'u_1 & d''u_1 & 0 & u_1 & \beta_1 \\ du_2 & d'u_2 & d''u_2 & 0 & u_2 & \beta_2 \\ du_3 & d'u_3 & d''u_3 & 0 & u_3 & \beta_3 \end{vmatrix}}{\Sigma \alpha_i f'_{x_i} + \Sigma \beta_i f'_{u_i}}$$

ein Element eines dreifachen Integrals dar, welches von den Grössen α_i, β_i vollständig unabhängig ist. Bestimmt man die Constanten in Θ so, dass dieses Integral für kein Element des Connexes $f=0$ unendlich wird, so gibt die Zahl der willkürlich bleibenden Constanten von Θ das *Geschlecht* p *des Connexes* an. Besitzt also der gegebene Connex keine Doppel-Coincidenz etc., so hat Θ keiner Bedingung zu genügen; dann wird:

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2}\,,$$

und dies ist die eine der für einen Connex charakteristischen Zahlen.*)

Eine einfachere Form kann man dem Differentiale dI in doppelter Weise geben. Man kann nämlich zwei der drei Fortschreitungen d, d', d'' so wählen, dass einmal die u_i, einmal die x_i constant bleiben. Alsdann wird etwa:

$$d'u_1 = d'u_2 = d'u_3 = 0$$
$$d''x_1 = d''x_2 = d''x_3 = 0\,;$$

*) Die andern beiden Geschlechtszahlen würden durch die Zahlen gegeben werden, welche für eine aus $f=0$ durch einen Connex $\Theta=0$ ausgeschnittene Coincidenz in analoger Weise charakteristisch sind.

und wenn man zugleich einmal die β_i, einmal die α_i verschwinden lässt, ergeben sich die beiden einfachen Formen:

$$dI = \frac{\Theta \,.\, (x\alpha d'x) \,.\, (udud''u)}{\Sigma \alpha_i f_{x_i}'} = -\frac{\Theta \,.\, (xdxd'x)(u\beta d''u)}{\Sigma \beta_i f_{u_i}'}.$$

Es sei noch bemerkt, dass man zu demselben Ausdrucke für dI auch dann noch kommt, wenn man davon ausgeht, f als eine homogene Function von sechs cogredienten Veränderlichen x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3 zu betrachten. Nach den allgemeinen Regeln für solche Functionen*) ist dann ein Differential zu betrachten, welches aus (29) entsteht, indem man die Determinante des Zählers ersetzt durch die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & x_1 & dx_1 & d'x_1 & d''x_1 & d'''x_1 \\ \alpha_2 & x_2 & dx_2 & d'x_2 & d''x_2 & d'''x_2 \\ \alpha_3 & x_3 & dx_3 & d'x_3 & d''x_3 & d'''x_3 \\ \beta_1 & u_1 & du_1 & d'u_1 & d''u_1 & d'''u_1 \\ \beta_2 & u_2 & du_2 & d'u_2 & d''u_2 & d'''u_2 \\ \beta_3 & u_3 & du_3 & d'u_3 & d''u_3 & d'''u_3 \end{vmatrix},$$

wo durch d, d', d'', d''' verschiedene Fortschreitungsrichtungen angezeigt sind. Beachten wir aber, dass ausser den Gleichungen:

$$\Sigma f_{x_i}' d^{(k)} x_i + \Sigma f_{u_i}' d^{(k)} u_i = 0 \qquad (k = 1, 2, 3)$$

hier noch die Gleichungen bestehen:

$$\Sigma x_i f_{x_i}' = 0, \quad \Sigma u_i f_{u_i}' = 0,$$

so zeigt sich, dass die Determinante verschwinden muss, welche man durch Elimination der f_{x_i}', f_{u_i}' aus diesen Gleichungen erhält. Man kann deshalb setzen:

$$d'''x_i = \varkappa dx_i + \lambda d'x_i + \mu d''x_i + x_i d\varrho$$
$$d'''u_i = \varkappa du_i + \lambda d'u_i + \mu d''u_i + u_i d\sigma,$$

wo $d\varrho$, $d\sigma$ irgend welche unendlich kleine Grössen bezeichnen. Trägt man dies in die sechsgliedrige Determinante ein, so erhält man wieder nach einer leichten Umformung die in (29) auftretende Determinante bis auf einen nur von $d\sigma$ und $d\varrho$ abhängenden Factor; letzterer aber steht zu dI und f in keiner Beziehung mehr, ist also auch auf weitere Betrachtungen gänzlich ohne Einfluss. So zeigt sich, dass es genügt, das Element eines dreifachen statt desjenigen eines vierfachen Integrals zu untersuchen.

In demselben Sinne wie von dem Geschlechte eines Connexes,

*) Vgl. Nöther: Math. Annalen, Bd. 2, a. a. O.

kann man von *dem Geschlechte einer Coincidenz* sprechen. Denken wir uns diese als den Durchschnitt zweier Connexe (m, n) bez. (m', n'):

$$f = 0 \quad \text{und} \quad \varphi = 0$$

so hat man ein Doppelintegral*) zu betrachten, dessen lineare Differentiale den beiden hier noch möglichen Fortschreitungsrichtungen entsprechen. Es seien letztere durch d, d' dargestellt; man hat dann:

$$\Sigma f_{x_i}' dx_i + \Sigma f_{u_i}' du_i = 0, \quad \Sigma f_{x_i}' d'x_i + \Sigma f_{u_i}' d'u_i = 0$$
$$\Sigma x_i f_{x_i}' = 0, \quad \Sigma u_i f_{u_i}' = 0;$$

und:

$$\Sigma \varphi_{x_i}' dx_i + \Sigma \varphi_{u_i}' du_i = 0, \quad \Sigma \varphi_{x_i}' dx_i + \Sigma \varphi_{u_i}' du_i = 0,$$
$$\Sigma x_i \varphi_{x_i}' = 0, \quad \Sigma u_i \varphi_{u_i}' = 0.$$

Jedes dieser Systeme von Gleichungen kann man als ein lineares System für die Differentialquotienten der darin auftretenden Functionen ansehen. Es folgt dann nach bekannten Sätzen, dass die aus den Reihen:

$$f_{x_1}', \quad f_{x_2}', \quad f_{x_3}', \quad f_{u_1}', \quad f_{u_2}', \quad f_{u_3}',$$
$$\varphi_{x_1}', \quad \varphi_{x_2}', \quad \varphi_{x_3}', \quad \varphi_{u_1}', \quad \varphi_{u_2}'; \quad \varphi_{u_3}',$$

zu bildenden zweigliedrigen Determinanten den viergliedrigen Determinanten der Matrix:

$$\left\| \begin{matrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 & du_1 & du_2 & du_3 \\ d'x_1 & d'x_2 & d'x_3 & d'u_1 & d'u_2 & d'u_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_1 & u_2 & u_3 \end{matrix} \right\|$$

einzeln proportional sind. Bezeichnen wir also mit Θ eine ganze Function, welche die x_i homogen zur Ordnung $m + m' - 3$, die u_i homogen zur Ordnung $n + n' - 3$ enthält, so wird:

$$dI = \frac{\Theta \cdot \left[\begin{vmatrix} dx_i & d'x_i & x_i & 0 & a_i & \alpha_i \\ du_i & d'u_i & 0 & u_i & b_i & \beta_i \end{vmatrix} \right]_{i=1,2,3}}{\begin{vmatrix} \Sigma a_i f_{x_i}' + \Sigma b_i f_{u_i}' & \Sigma \alpha_i f_{x_i}' + \Sigma \beta_i f_{u_i}' \\ \Sigma a_i \varphi_{x_i}' + \Sigma b_i \varphi_{u_i}' & \Sigma \alpha_i \varphi_{x_i}' + \Sigma \beta_i \varphi_{u_i}' \end{vmatrix}}$$

ein Differential, welches von den Grössen a_i, α_i, b_i, β_i völlig unabhängig ist. Der in eckige Klammern eingeschlossene Factor des Zählers ist dabei zur Abkürzung für eine sechsgliedrige Determinante gesetzt, deren wirkliche Bildungsweise man leicht übersehen wird.

*) Vgl. die entsprechende Bildung des einfachen Integrals für den vollständigen Durchschnitt zweier Flächen bei Clebsch: Anwendungen der Abel'schen Functionen auf Geometrie S. 11 ff., Crelle's Journal, Bd. 63. — Es kann übrigens auch Coincidenzen geben, welche nicht als vollständige Schnitte *zweier* Connexe darstellbar sind.

Wird nun Θ so bestimmt, dass das aus dI entstehende Doppelintegral für jedes innerhalb der Coincidenz zu wählende umgrenzte Gebiet endlich bleibt, so ist die Zahl der in Θ übrig bleibenden und durch Benutzung von $f=0$, $\varphi=0$ unzerstörbaren, willkürlichen Coëfficienten gleich *dem Geschlechte π der Coincidenz.**) Im Allgemeinen hat man daher:

$$\pi = \frac{(m+m'-1)(m+m'-2)}{2} \cdot \frac{(n+n'-1)(n+n'-2)}{2}$$
$$- \frac{(m'-1)(m'-2)}{2} \cdot \frac{(n'-1)(n'-2)}{2} - \frac{(m-1)(m-2)}{2} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Um den Ausdruck dI noch zu vereinfachen, kann man hier nicht mehr Fortschreitungsrichtungen wählen, für welche alle dx_i, bez. alle du_i verschwinden; man kann aber entweder die a, α oder die b, β gleich Null setzen und erhält dann für dI die beiden Darstellungen:

$$dI = \frac{\Theta \cdot (x\,dx\,d'x) \cdot (ub\beta)}{\Sigma b_i f_{u_i}' \cdot \Sigma \beta_i \varphi_{u_i}' - \Sigma b_i \varphi_{u_i}' \cdot \Sigma \beta_i f_{u_i}'}$$
$$= \frac{\Theta \cdot (u\,du\,d'u) \cdot (xa\alpha)}{\Sigma a_i f_{x_i}' \cdot \Sigma \alpha_i \varphi_{x_i}' - \Sigma a_i \varphi_{x_i}' \cdot \Sigma \alpha_i f_{x_i}'}.$$

Das Geschlecht eines Curvenpaares endlich ist gleich der Zahl, welche nach bekannten Theorien irgend einer der beiden (eindeutig auf einander bezogenen) Curven des Paares als Geschlecht zukommt und mit den zu einer solchen Curve gehörigen Abel'schen Integralen in bekannter Beziehung steht (p. 790 ff.).

Schliesslich sei noch hervorgehoben, dass man auch für die hier aufgestellten Differentiale dreifacher und zweifacher Integrale leicht Gleichungen finden kann, die der Differentialgleichung des Abel'schen Theorems genau analog sind.**) Es lässt sich eine solche Gleichung jedoch nicht in derselben Weise wie das Abel'sche Theorem sofort zu geometrischen Anwendungen benutzen, weil die Eigenschaften mehrfacher algebraischer Integrale mit complexen Grenzen noch nicht näher untersucht sind.

IV. Die Hauptcoincidenz.

Unter den Connexen gibt es einen, welcher eine eigenthümliche Wichtigkeit hat; es ist derjenige lineo-lineare Connex, welcher durch das Verschwinden der identischen Covariante u_x, d. i. durch die Gleichung:

(1) $$u_x = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

*) Die zweite Geschlechtszahl der Coincidenz wird gleich dem Geschlechte des Curvenpaares, welches in der Coincidenz $f=0$, $\varphi=0$ durch einen Connex $\Theta=0$ bestimmt wird, welcher den im Texte angedeuteten Forderungen zu genügen hat.

**) Vgl. Nöther: Math. Annalen, Bd. 2, p. 305, Anmerkung.

gegeben wird; wir nennen ihn kurz den *identischen Connex.* In demselben gehört zu jedem Punkte die Gesammtheit der durch ihn gehenden Geraden, zu jeder Geraden die Gesammtheit der auf ihr liegenden Punkte; d. h. Element des identischen Connexes ist überhaupt jede Combination von Punkt und Gerade in vereinigter Lage. Die zu einem Punkte gehörige Curve K_1 ist also der Punkt selbst, als Mittelpunkt eines Strahlbüschels betrachtet, die zu einer Geraden gehörige Curve C_1 ist sie selbst, betrachtet als Träger einer Punktreihe.

Durch die Gesammtheit der Elemente, welche einem beliebig gegebenen Connexe $f = 0$ und dem identischen Connexe $u_x = 0$ gemeinsam sind, ist eine für das Studium des Connexes $f = 0$ besonders wichtige covariante Coincidenz gegeben; wir nennen sie die *Hauptcoincidenz des Connexes.* In ihr entsprechen jedem Punkte n durch ihn gehende Strahlen *(„Coincidenzstrahlen“)*, die von ihm an die zugehörige K_n gelegten Tangenten; jeder Geraden entsprechen m auf ihr liegende Punkte *(„Coincidenzpunkte“)*, ihre Schnittpunkte mit der zugehörigen C_m.

So gehört zu jedem Connexe eine Hauptcoincidenz; umgekehrt dagegen gibt es unendlich viele Connexe (m, n), denen eine gegebene Hauptcoincidenz (m, n) angehört. Ist nämlich $f = 0$ einer von diesen, so enthalten offenbar alle Connexe:

$$f + M u_x = 0, \tag{2}$$

wo $M = 0$ einen beliebigen Connex $(m - 1, n - 1)$ darstellt, dieselbe Hauptcoincidenz wie f. Alle folgenden Untersuchungen über die Hauptcoincidenz eines Connexes f gelten daher ebenso für alle aus f und u_x wie in (2) zusammengesetzten Zwischenformen.

Die Hauptcoincidenz wird nun dadurch von ganz besonderem Interesse, dass sie zu den *algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung**) in engster Beziehung steht, wie wir sogleich sehen werden. Wenn man durch jeden Punkt der Ebene die n Richtungen der Geraden zieht, welche ihm in der Hauptcoincidenz entsprechen, und diese als Bogenelemente eines Curvensystems betrachtet, so setzt sich aus ihnen ein System von Curven zusammen, von denen n durch jeden Punkt hindurchgehen; und zwar sind die Tangenten derselben in dem Punkte die dem letzteren in der Hauptcoincidenz zugehörigen n Strahlen. Zur Aufsuchung der so entstehenden Curven hat man

*) Es wird nicht zu einem Missverständnisse führen können, wenn hier das Wort Ordnung in anderer Bedeutung gebraucht wird als bisher im Texte. Wir verstehen, wie auch sonst üblich, unter Differentialgleichung erster Ordnung eine solche, in der nur die ersten Differentiale dx_i bez. du_i vorkommen, diese aber zu beliebig hoher Dimension.

eine Differentialgleichung zu integriren, die in folgender Weise gefunden wird. Wir setzen wieder $f = a_x^m u_\alpha^n$. Es sei u eine durch den Punkt x gehende Gerade, welche ihm in der Hauptcoincidenz entspricht, so dass $f(x, u) = 0$ und $u_x = 0$. Ein zu x benachbarter Punkt $x + dx$ befriedigt dann die Gleichungen

$$(3) \qquad \begin{aligned} u_{dx} &\equiv u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + x_3 dx_3 = 0, \\ u_x &\equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0, \end{aligned}$$

woraus man die Verhältnisse der u_i gleich denen der aus den x_i und dx_i gebildeten Determinanten findet. Führt man also letztere in f oder in $f + Mu_x$ ein, so erhält man die Differentialgleichung:

$$(4) \; f(x_1, x_2, x_3; x_2 dx_3 - x_3 dx_2, x_3 dx_1 - x_1 dx_3, x_1 dx_2 - x_2 dx_1) \equiv a_x^m (\alpha x dx)^n = 0.$$

Dualistisch entsprechend kann man ausgehen von einem Strahle u und seinen m Coincidenzpunkten. Zieht man durch einen derselben einen zu u benachbarten Strahl $u + du$, so wird auf letzterem sich ein ihm zugeordneter Punkt $x + dx$ befinden; von diesem kann man dann ebenso weiter gehen und erhält so ein System von Curven, von denen m eine beliebige Gerade berühren. Zur Bestimmung derselben treten an Stelle der Gleichungen (3) die Gleichungen:

$$(5) \qquad u_x = 0, \qquad (du)_x \equiv x_1 du_1 + x_2 du_2 + x_3 du_3 = 0,$$

woraus man an Stelle von (4) die Differentialgleichung findet:

$$(6) \qquad f\Big((u du), u\Big) \equiv (a u du)^m u_\alpha^n = 0.$$

Dies Curvensystem hat also die Eigenschaft, dass die Tangente einer Curve desselben in einem ihrer Punkte durch einen der Coincidenzstrahlen dieses Punktes gegeben wird. Durch ganz dieselbe Eigenschaft war aber auch das durch die Differentialgleichung (4) gegebene Curvensystem charakterisirt; *beide Systeme sind daher identisch: Die Gleichung* (5) *ist die Differentialgleichung in Liniencoordinaten für dasselbe Curvensystem, dessen Gleichung in Punktcoordinaten durch Integration der Differentialgleichung* (4) *gewonnen wird.* Die hierdurch dargestellten Curven nennen wir die *Hauptcoincidenz-* oder *Integral-Curven des Connexes $f = 0$.*

Die hier auftretenden algebraischen Differentialgleichungen (4) und (5) sind die allgemeinsten ihrer Art, wenn dem Connexe $f = 0$ allgemeine Coëfficienten beigelegt werden; denn *jede Differentialgleichung erster Ordnung mit algebraischen Coëfficienten kann auf diese Weise erhalten werden.* Den Zusammenhang zwischen einer gegebenen Differentialgleichung zwischen zwei Veränderlichen und der Hauptcoincidenz eines Connexes kann man nämlich offenbar in folgender Weise darlegen.

Es sei eine algebraische Gleichung zwischen x, y *und* $p = \frac{dy}{dx}$ *gegeben:* $\varphi(x, y, p) = 0$. *Man bringe die Gleichung* $\varphi = 0$ *in die Form:*

$$f(x, \; y; \; -p, \; xp - y) = 0, \tag{7}$$

was noch auf unendlich viele Weisen geschehen kann. Dann ist immer

$$f\left(\frac{x_1}{x_3}, \; \frac{x_2}{x_3}; \; \frac{u_1}{u_2}, \; \frac{u_3}{u_2}\right) = 0 \tag{8}$$

die Gleichung eines Connexes, dessen Integralcurven durch die Gleichung $\varphi = 0$ *gegeben werden.* In der That setzt man wieder $u_i = (x\,dx)_i$ und dann $x_3 = 1$, $dx_3 = 0$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, so geht die Gleichung (8) wieder in (7) über. Statt (8) könnte man übrigens auch jede Gleichung:

$$f + \frac{u_x}{x_3 u_2} M = 0$$

als zugehörige Connexgleichung wählen, dem entsprechend, dass die Gleichung (7) auf verschiedene Weisen gebildet werden kann.

Wie wir hier in (4) und (5) zwei verschiedene Differentialgleichungen für dieselben Curven vor uns haben, kann man jede algebraische Differentialgleichung durch eine andere ihr äquivalente ersetzen und so die Integration oft vereinfachen.*) Man hat zu dem Zwecke die gegebene Differentialgleichung zunächst auf die Form (7) zu bringen, den zugehörigen Connex (8) aufzustellen und in ihm $x_i = (u\,du)_i$ statt $u_i = (x\,dx)_i$ zu setzen.

Beispiele für die Bestimmung von Integralcurven werden wir weiterhin behandeln; hier betrachten wir nur einen besonders einfachen Fall, nämlich den Connex, welcher durch das Verschwinden der Functionaldeterminante zweier Formen $\varphi = a_x^m$, $\psi = \alpha_x^n$ und der Form u_x dargestellt wird:

$$(a\alpha u)\, a_x^{m-1} \alpha_x^{n-1} = 0. \tag{9}$$

Derselbe gibt die Differentialgleichung:

$$mn\,(a_x \alpha_{dx} - \alpha_x a_{dx})\, a_x^{m-1} \alpha_x^{n-1} - m\varphi\, d\psi - n\psi\, d\varphi = 0.$$

Seine Hauptcoincidenzcurven sind also:

$$m \log \psi - n \log \varphi = \log \lambda,$$

wenn λ einen Parameter bedeutet, oder:

$$\psi^m - \lambda \varphi^n = 0. \tag{10}$$

*) Entsprechende Betrachtungen für den Raum (d. i. die Ueberführung einer für Punktcoordinaten gegebenen Differentialgleichung in eine solche für Ebenencoordinaten) findet man bei Plücker: System der Geometrie des Raumes, Düsseldorf 1846, p. 27.

Und hierdurch ist gleichzeitig die Integration der Differentialgleichung:

$$(a\alpha u)\,(a\,u\,d\,u)^{m-1}\,(\alpha\,u\,d\,u)^{n-1} = 0$$

gegeben; wenigstens wird letztere durch Lösung des rein algebraischen Problems geleistet, die Gleichung der Curven (10) in Liniencoordinaten aufzustellen. Man ersieht aus (10), dass in der That durch jeden Punkt der Ebene eine Curve des Systems geht, während jede Gerade von $m + n - 2$ Curven berührt wird. Zunächst nämlich würde die Liniencoordinatengleichung der Curve (10) vom Grade $2\,(mn - 1)$ in λ werden; da aber in dem Systeme die Curve ψ m-fach enthalten ist, und so jede beliebige Gerade in jedem ihrer n Schnittpunkte $(m - 1)$-fach berührt (vgl. p. 424), so muss die Liniencoordinatengleichung für *jede* Linie die $n\,(m - 1)$-fache Wurzel $\lambda = 0$ und analog die $m\,(n - 1)$-fache Wurzel $\lambda = \infty$ zulassen. Nach Absonderung der entsprechenden Factoren bleibt sie in der That vom Grade

$$2\,(mn - 1) - (m - 1)\,n - (n - 1)\,m = m + n - 2\,.$$

Dass in (10) algebraische Integralcurven auftreten, ist durch die specielle Natur des gewählten Beispiels bedingt; im Allgemeinen wird man transscendente Curven erhalten, von denen aber auch immer n durch einen beliebigen Punkt gehen, m eine beliebige Gerade berühren. Für diese Curvensysteme kommt also den Zahlen n, m eine Bedeutung zu, ähnlich derjenigen, welche wir früher in der Theorie der Charakteristiken den Zahlen μ, μ' (bez. μ, ν) beilegten; und in der That lassen sich auch verschiedene auf diese Zahlen bezügliche Sätze über Systeme algebraischer Curven unmittelbar auf die allgemeineren *Systeme transscendenter Curven* übertragen, *welche durch eine Differentialgleichung:*

$$f\left(x,\,y,\,\frac{d\,y}{d\,x}\right) = 0 \quad \text{oder besser:} \quad a_x^{\,m}\,(\alpha\,x\,d\,x)^n = 0$$

definirt sind.

Ziehen wir z. B. durch einen festen Punkt alle möglichen Geraden, so wird jede derselben in m Punkten von den Curven des Systems berührt; und die Gleichung $X_y = 0$ des Ortes dieser Berührungspunkte ergibt sich durch Elimination von u aus den Gleichungen:

$$u_x = 0\,, \qquad u_y = 0\,, \qquad a_x^{\,m}\,u_\alpha^{\,n} = 0\,,$$

ist also gegeben durch:

$$X_y \equiv a_x^{\,m}\,(\alpha x y)^n = 0; \tag{11}$$

ebenso führt die dualistisch entsprechende Ueberlegung zu der Gleichung:

$$U_v \equiv (a u v)^m\,u_\alpha^{\,n} = 0\,; \tag{12}$$

und wir haben die Sätze:

Der Ort der Punkte x, welche durch ihre Verbindungslinien mit einem festen Punkte y zu Elementen der Hauptcoincidenz ergänzt werden, ist eine Curve der Ordnung $m+n$: $X_y = 0$; und diese Curve hat einen n-fachen Punkt in y.

Die Enveloppe der Strahlen u, welche durch ihre Schnittpunkte mit einem festen Strahle v zu Elementen der Hauptcoincidenz ergänzt werden, ist eine Curve der Klasse $m+n$: $U_v = 0$; und diese Curve hat v zur m-fachen Tangente.

Die Ordnung der Curve $X_y = 0$ ist also in der That ebenso von den Zahlen n, m abhängig, wie die Ordnung der entsprechend definirten Curve bei algebraischen Systemen nach einem Satze auf p. 414 von den Charakteristiken μ, μ' eines solchen Systems; und auch das Verhalten beider Curven in dem festen Punkte y ist dasselbe.*) —

Unter den Punkten der Ebene sind nun besonders diejenigen ausgezeichnet, für welche zwei der n von ihnen ausgehenden Richtungen zusammenfallen; und da diese Forderung einer Bedingung äquivalent ist, wird es noch einfach unendlich viele Punkte der Art geben, d. h. dieselben werden eine Curve bilden. Ebenso erhält man eine andere Curve als Enveloppe der Geraden, für welche zwei zugehörige Coincidenzpunkte einander benachbart liegen. Wenn zwei der n von einem Punkte x aus an die zugehörige K_n gelegten Tangenten zusammenfallen sollen, so muss der Punkt x offenbar auf der K_n liegen; stellt man also die Gleichung $f(x, u) = 0$ der letzteren in Punktcoordinaten X in der Form $F(x, X) = 0$ dar, so ist $F(x, x) = 0$ die Gleichung des gesuchten Ortes. *Man erhält daher den Ort der Punkte x, welche auf ihrer zugehörigen K_n liegen, und für welche somit zwei der zugehörigen Fortschreitungsrichtungen der Hauptcoincidenz zusammenfallen, indem man die Curve K_n in Punktcoordinaten x darstellt. Dualistisch entsprechend erhält man den Ort der Linien u, welche ihre zugehörige C_m berühren, indem man die letztere in Liniencoordinaten u darstellt.*

Die erstere Curve existirt natürlich nur, wenn $n > 1$, die letztere nur, wenn $m > 1$; die Fälle $m = 1$ oder $n = 1$ verlangen daher noch eine besondere Besprechung; wir kommen auf letztere später zurück.

Für den Connex $a_x u_\alpha^2 = 0$ erhält man z. B.:

$$F(x, X) = a_x b_x (\alpha \beta X)^2,$$

und der Ort der betreffenden Punkte ist folglich gegeben durch die Curve *vierter* Ordnung:

$$F(x, x) = a_x b_x (\alpha \beta x)^2 = 0.$$

*) Ebenso gilt für die Systeme transscendenter Curven auch der Satz, dass eine Curve der Ordnung n' und der Klasse k' von $k'n + n'm$ Curven des Systems berührt wird; vgl. Fouret: Sur les systèmes généraux de courbes planes, Bulletin de la société mathématique de France, t. 2, p. 72 und 96. — Man erkennt, wie auch die weiteren Untersuchungen von Fouret über simultane Curvensysteme der Art in engster Beziehung zur Connextheorie stehen.

Für den Connex $a_x^2 u_\alpha^2 = 0$ findet man:

$$F(x, X) = a_x^2 b_x^2 (\alpha\beta X)^2$$

und somit die Curve *sechster* Ordnung:

$$F(x, x) = a_x^2 b_x^2 (\alpha\beta x)^2 = 0 .$$

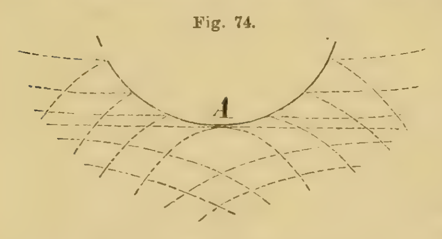
Die hier gemeinten Curven stehen in besonderer und sehr wichtiger Beziehung zu den Integralcurven des Connexes $f = 0$. Betrachten wir die Punkte auf beiden Seiten der Curve $F(x, x) = 0$. Für einen Punkt der letzteren selbst fallen zwei der zugehörigen Zweige der Integralcurven zusammen; nach den bekannten Gesetzen der Continuität müssen diese Zweige daher für Punkte auf der einen Seite der Curve $F(x, x) = 0$ reell, für Punkte auf der anderen Seite dieser Curve imaginär sein. Es haben also in jedem Punkte von $F = 0$ zwei reelle Zweige der Integralcurven dieselbe Tangente, *ohne sich über diesen Punkt fortzusetzen*, d. h. es entsteht eine Spitze der Integralcurve (vgl. Fig. 74). Fügt man die dualistisch entsprechende Ueberlegung und die Umkehrung beider hinzu, so kann man daher die beiden Sätze aussprechen:

*Der Ort der Punkte, welche auf den ihnen im Connexe zugehörigen Curven K_n liegen, ($F = 0$) ist zugleich der Ort der Spitzen der Integralcurven des Connexes.**)

Die Enveloppe der Linien, welche die ihnen im Connexe zugehörigen C_m berühren, ($F' = 0$) ist zugleich der Ort der Wendetangenten der Integralcurven des Connexes.

Die zu den Punkten von $F = 0$ gehörigen Rückkehrtangenten der Integralcurven werden dabei im Allgemeinen eine andere Curve $\Phi = 0$ umhüllen, und ebenso werden die Wendepunkte jener Curven eine neue Curve $\Phi' = 0$ beschreiben. Nur in einzelnen Punkten von F wird es eintreten, dass die einem solchen entsprechende Rückkehrtangente in ihm zugleich Tangente von F ist, wie z. B. im Punkte A in Fig. 74.**) Nur wenn zwischen den Coëfficienten der Gleichung

Fig. 74.



*) Geht man von einer Differentialgleichung in rechtwinkligen Coordinaten: $f(\xi, \eta, p) = 0$ aus, so erhält man offenbar die Curve $F = 0$ durch Bildung der Discriminante von f in Bezug auf die Veränderliche $p = \frac{d\eta}{d\xi}$.

**) Von der in A berührenden Integralcurve sondert sich hier gleichzeitig eine Gerade ab. Dies Beispiel ist zunächst der Theorie der Flächen dritter Ordnung entnommen, deren Haupttangentencurven sich in der Nähe der parabolischen Curve so verhalten. Vgl. Klein: Math. Annalen, Bd. 6. — Auf den Zusammenhang der Curve $F = 0$ mit der singulären Lösung der Differentialgleichung kommen wir im letzten Abschnitte zurück.

$f = 0$ besondere Bedingungen erfüllt sind, wird es vorkommen können, dass die Tangente eines *jeden* Punktes von F auch Tangente der zugehörigen K_n ist. Alsdann wird F in jedem Punkte von einer Integralcurve berührt: die Curve $F = 0$ gibt dann ein singuläres Integral der Differentialgleichung $f = 0$, wie wir später noch näher ausführen werden; ein solches wird dagegen im Allgemeinen nicht auftreten.

Aus dem oben angegebenen Bildungsgesetze von F und F' lassen sich leicht Ordnung, bez. Klasse dieser Curven bestimmen; denn eine Curve n^{ter} Klasse ist im Allgemeinen von der Ordnung $n(n-1)$, und ihre Punktgleichung vom Grade $2(n-1)$ in den Coëfficienten der Liniengleichung. *Man findet daher für die Ordnung von F die Zahl $(n-1)(2m+n)$ und für die Klasse von F' die Zahl $(m-1)(2n+m)$.*

Die hier auftretenden Curven $F = 0$ sind aber keineswegs die allgemeinsten Curven der Ordnung $(n-1)(2m+n)$, sie sind vielmehr durch verschiedene Singularitäten ausgezeichnet. Zur Bestimmung der letzteren betrachten wir die Beziehung zwischen den Curven $F = 0$ und $\Phi = 0$ genauer, wo also

$F = 0$ den Ort der Rückkehrpunkte der Integralcurven,
$\Phi = 0$ den Ort der Rückkehrtangenten derselben

darstellt. Beide Curven sind ihrer Definition nach *eindeutig* auf einander bezogen: einem Punkte x von F entspricht als Tangente von Φ eben die Tangente der zu x gehörigen K_n im Punkte x. Nun hat eine solche K_n im Allgemeinen $\frac{1}{2} n(n-2)(n^2-9)$ Doppelpunkte; es wird daher in einer endlichen Zahl von Punkten der Ebene vorkommen können, dass der Punkt x mit einem Doppelpunkte der zugehörigen K_n zusammenfällt; und dann entsprechen ihm zwei verschiedene Tangenten derselben, und somit zwei verschiedene Tangenten von Φ. Dies kann nach den Gesetzen der eindeutigen Transformation nur eintreten, *wenn der betreffende Punkt ein Doppelpunkt von F ist.* Die Zahl solcher Doppelpunkte bestimmen wir hiernach mit Hülfe des Correspondenzprincips von Salmon und Zeuthen (p. 387) folgendermassen.

Jedem Punkte x entsprechen $\alpha = \frac{1}{2} n(n-2)(n^2-9)$ Punkte y, die Doppelpunkte der zu x gehörigen K_n. Um die Zahl α' der umgekehrt zu y gehörigen Punkte x zu finden, haben wir nach der Zahl der Curven K_n zu fragen, welche in einem gegebenen Punkte y einen Doppelpunkt haben. Jeder durch y gehende Strahl u wird von unendlich vielen K_n berührt; unter ihnen sind m^2 Curven, welche u in y berühren; es gibt daher ausserdem noch:

$$2(n-1)m^2 - 2m^2 = 2nm^2 - 4m^2$$

Curven K_n, welche u berühren und zugleich durch y gehen. An jede der letzteren kann man von y aus noch $n-3$ Tangenten v legen,

deren Berührungspunkte nicht auf u liegen; und so entsprechen jedem Strahle u $2\,m^2\,(n-3)\,(n-2)$ Strahlen v, und ebenso umgekehrt. Fallen zwei entsprechende Strahlen zusammen, so geht die betreffende K_n noch ein zweites Mal durch y, d. h. hat in y einen Doppelpunkt. Da nun je zwei Coincidenzen der Art durch dieselbe K_n veranlasst werden, so ist einfach:

$$\alpha' = 2\,m^2\,(n-2)\,(n-3)\,.$$

Um die Zahl $\alpha + \alpha' + \beta$ der Coincidenzen von Punkten x und y in der Ebene zu finden, müssen wir jetzt noch die Ordnung β der Curve angeben, welche von y durchlaufen wird, wenn x eine Gerade beschreibt. Setzt man aber $x = \xi + \lambda\eta$, so stellt die Gleichung:

$$(a_\xi + \lambda\,a_\eta)^m\,u_\alpha{}^n = 0$$

ein System von Curven K_n dar, von denen $2\,m\,(n-1)$ durch einen beliebigen Punkt gehen und m eine beliebige Gerade berühren. Durch dualistische Uebertragung unserer früheren Untersuchungen über Curvensysteme (p. 416) finden wir daher für die Ordnung des Ortes der Doppelpunkte y den Werth:

$$\beta = 2\,(n-2)\,(n-3)\,nm\,.$$

Die Zahl der Doppelpunkte von F ist somit schliesslich:

$$(13)\qquad \alpha + \alpha' + \beta = \tfrac{1}{2}\,(n-2)\,(n-3)\{(2\,m+n)^2 + 3\,n\}\,.$$

Analog findet man die Zahl der Spitzen von F gleich der Zahl der Punkte x, welche mit einer Spitze y der zugehörigen K_n zusammenfallen. Hier ist:

$$\alpha = 3\,n\,(n-2)\,,\qquad \alpha' = 3\,m^2\,(n-2)\,,$$

wobei letztere Zahl sich durch Betrachtung einer Correspondenz:

$$\big(m^2\,(n-2)\,,\qquad 2\,m^2\,(n-2)\big)$$

zwischen den Strahlen eines beliebigen Büschels ergibt. Endlich findet man nach p. 416:

$$\beta = 3\,mn\,(n-2)\,,$$

und somit *die Zahl der Spitzen von $F = 0$ gleich:*

$$(14)\qquad 3\,(n-2)\,(m^2 + mn + n)\,.$$

Um die Klasse von Φ zu bestimmen, gehen wir von den Formeln aus, welche die eindeutige Beziehung der Tangenten von Φ auf die Punkte von F vermitteln. Sei symbolisch $A_x{}^\mu\,\mathsf{A}_X{}^\nu = 0$ die Gleichung der zu x gehörigen K_n in Punktcoordinaten X, wo $\mu = 2\,m\,(n-1)$, $\nu = n\,(n-1)$, so sind jene Transformationsgleichungen offenbar:

$$(15)\qquad \varrho\,u_i = A_x{}^\mu\,\mathsf{A}_x{}^{\nu-1}\,\mathsf{A}_i \equiv \varphi_i\,(x)\,.$$

Die drei Curven $\varphi_i = 0$ gehen zunächst durch sämmtliche Doppelpunkte und Spitzen von $F = 0$ hindurch, denn wenn x ein Doppelpunkt der Curve $A_x^\mu \mathsf{A}_x^\nu = 0$ ist, so verschwinden eben die drei Grössen $\varphi_i(x)$; und wir haben gesehen, dass dann F in x einen Doppelpunkt hat. In unseren allgemeinen Formeln für die eindeutige Transformation (p. 666) müssen wir demnach setzen:

$$(16) \quad \begin{aligned} s &= \mu + \nu - 1 = (n-1)(2m+n) - 1, \\ \tau &= \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)\{(2m+n)^2 + 3n\} + 3(n-2)(m^2 + mn + n). \end{aligned}$$

Wir haben jetzt noch die Zahl σ der einfachen Punkte von F zu suchen, durch welche die drei Curven $\varphi_i = 0$ gleichzeitig hindurchgehen. Unter den zweifach unendlich vielen Curven K_n wird es einfach unendlich viele geben, die eine Doppeltangente besitzen, und die zugehörigen Punkte x werden eine Curve $P = 0$ bilden, welche sich durch Elimination der u_i aus den Gleichungen:

$$(17) \qquad a_x^m u_\alpha^{n-1} \alpha_i = 0$$

ergibt, welche also von der Ordnung $3m(n-1)^2$ ist. Auf P wird es ferner eine endliche Zahl von Punkten x geben, durch welche die Doppeltangente der zugehörigen K_n hindurchgeht. Diese Punkte liegen dann gleichzeitig auf $F = 0$, denn für sie fallen zwei der entsprechenden n Strahlen der Hauptcoincidenz in die Doppeltangente zusammen; und für sie bestehen gleichzeitig die drei Gleichungen:

$$A_x^\mu \mathsf{A}_x^{\nu-1} \mathsf{A}_i = 0,$$

denn die Doppeltangente ist als doppelt zählender Zweig der Curve ν^{ter} Ordnung $A_x^\mu \mathsf{A}_x^\nu = 0$ aufzufassen. *Durch die so charakterisirten Punkte gehen demnach alle drei Curven* $\varphi_i = 0$ *hindurch.* Die Zahl der Punkte bestimmt sich in folgender Weise. Die Gleichung der von den Doppeltangenten umhüllten Curve ergibt sich durch Elimination der x_i aus den Gleichungen (17); sie ist also von der Klasse $3m^2(n-1)$. Auf der Curve $P = 0$ haben wir somit zwischen den Punkten x und den Schnittpunkten y der zugehörigen Doppeltangente eine Correspondenz:

$$\left(3m(n-1)^2, \qquad 3m^2(n-1)\right)_0.$$

Die Zahl der gesuchten Punkte von $P = 0$ und somit auch die Zahl der *einfachen Punkte von* $F = 0$, *welche den* φ_i *gemeinsam sind*, ist daher gleich:

$$(18) \qquad 3m(n-1)(m+n-1).$$

Endlich ist noch zu bemerken, dass die Curven $\varphi_i = 0$ die Rückkehrtangenten von $F = 0$ in den betreffenden Rückkehrpunkten berühren. Da nämlich nach dem Obigen die Curve $F = A_x^\mu \mathsf{A}_x^\nu = 0$

in einem Doppelpunkte der zu x gehörigen K_n ebenfalls einen Doppelpunkt hat, so sind die Grössen $A_x^\mu \mathsf{A}_x^{\nu-1} \mathsf{A}_i$ und $A_x^{\mu-1} A_i \mathsf{A}_x^\nu$ einander proportional; und folglich kann man die Gleichungen (15) auch ersetzen durch:

$$(19) \qquad \varrho' u_i = A_x^{\mu-1} \mathsf{A}_x^\nu A_i \,.$$

Sind nun für einen Rückkehrpunkt x von F die dx_i bestimmt durch die Gleichung $v_{dx}^2 = 0$, d. i. durch:

$$A_x^{\mu-2} \mathsf{A}_x^{\nu-2} \{ \mu(\mu-1) A_{dx}^2 \mathsf{A}_x^2 + 2\mu\nu A_x \mathsf{A}_x A_{dx} \mathsf{A}_{dx} + \nu(\nu-1) A_x^2 \mathsf{A}_{dx}^2 \} = 0,$$

wo also die Grössen v_i die Coordinaten der Rückkehrtangente bedeuten, so ist nach (15) die x entsprechende Tangente von Φ bestimmt durch:

$$\varrho u_i = A_x^{\mu-1} \mathsf{A}_x^{\nu-2} \{ \mu A_{dx} \mathsf{A}_x + (\nu - 1) A_x \mathsf{A}_{dx} \} \mathsf{A}_i$$

und nach (19) durch:

$$\varrho' u_i = A_x^{\mu-2} \mathsf{A}_x^{\nu-1} \{ (\mu - 1) A_{dx} \mathsf{A}_x + \nu A_x \mathsf{A}_{dx} \} A_i \,.$$

Also haben wir:

$$(\varrho' \mu + \varrho \nu) u_{dx} = v_{dx}^2 \qquad \text{und:} \qquad \varrho'' u_i = v_{dx} \cdot v_i = 0 \,.$$

Letztere Gleichungen sagen in der That aus, dass die Curven $\varphi_i(x) = 0$ auch den Punkt $x + dx$ enthalten, d. h. die Linie $v_x = 0$ in x berühren. In unseren allgemeinen Formeln für die eindeutige Transformation (p. 666) haben wir daher die Zahl σ gleich der Summe der Zahl (18) und der Zahl der Rückkehrpunkte zu wählen:

$$(20) \quad \sigma = 3m(n-1)(m+n-1) + 3(n-2)(m^2 + mn + n) \,.$$

Die Klasse von Φ *wird daher schliesslich in Rücksicht auf* (16) *gleich:*

$$(21) \qquad (\mu + \nu) s - \sigma - 2\tau = m^2 + 2mn - m + n \,.\text{*)}$$

Da somit Klasse und Geschlecht der Curve $\Phi = 0$ bekannt sind, kann man die Zahl ihrer Doppeltangenten leicht berechnen, denn Wendetangenten werden im Allgemeinen nicht vorkommen; diese Rechnung soll hier indess nicht mehr ausgeführt werden.

---

*) Diese Zahl lässt sich auch in folgender Weise finden. Auf jeder Linie u durch y liegen m zugehörige Punkte x der Hauptcoincidenz: die Schnittpunkte von u mit der Curve $X_y = a_x^m (\alpha x y)^n = 0$; von jedem dieser m Punkte gehen noch $n - 1$ weitere Strahlen v der Hauptcoincidenz aus; man erhält also eine durch y gehende Tangente von Φ, wenn eine Linie u mit einer der entsprechenden $m(n-1)$ Linien v zusammenfällt. Nun umhüllen die Linien v eine Curve, die sich durch Elimination der x aus den Gleichungen:

$$a_x^m (\alpha x y)^n = 0 \,, \qquad v_x = 0 \,, \qquad a_x^m v_u^n = 0$$

ergibt und also von der Klasse $(m+n)^2$ ist. Von ihr sondert sich aber m-fach zählend der Punkt y ab, und sie hat ausserdem einen n-fachen Punkt in y. Man kann also an sie von y aus noch $(m+n)^2 - m - n(n-1) = m^2 + 2mn - m + n$ Tangenten ziehen; und diese Zahl ist also die *Klasse von* Φ.

Durch dualistische Uebertragung der gewonnenen Resultate erhält man die Eigenschaften der Curven:

$F' = 0$, des Ortes der Wendetangenten der Integralcurven, und

$\Phi' = 0$, des Ortes ihrer Wendepunkte.

Erstere Curve ist von der Klasse $(n - 1)(2n + m)$, die Zahl ihrer Doppeltangenten ist gleich:

$$\tfrac{1}{2}(m - 2)(m - 3)\{(2n + m)^2 + 3m\},$$

und die Zahl ihrer Wendetangenten gleich:

$$3(m - 2)(n^2 + nm + m).$$

Die Ordnung von Φ' endlich ist gegeben durch die Zahl:

$$n^2 + 2nm - n + m.$$

Daraus kann man die übrigen Plücker'schen Zahlen beider Curven berechnen, da ihr Geschlecht dasselbe ist, und da $\Phi' = 0$ im Allgemeinen keine Rückkehrpunkte besitzen wird.

Wir haben die Curven F und Φ hier zunächst in ihrer Beziehung zu der Differentialgleichung der Hauptcoincidenz betrachtet. Unabhängig von diesem Gesichtspunkte sind indess F und Φ offenbar als Covarianten bez. Contravarianten des Connexes $f = 0$ oder auch der Hauptcoincidenz des letzteren aufzufassen. Da aber die Differentialgleichung der Integralcurven unzertrennlich mit der Hauptcoincidenz des Connexes verknüpft ist, so wird man ebenso gut von Functionalinvarianten der Differentialgleichung als von solchen der Hauptcoincidenz sprechen können; und dafür bieten uns dann die Formen F, Φ, F', Φ' die einfachsten Beispiele. Es eröffnet sich so ein neuer Gesichtspunkt für das Studium algebraischer Differentialgleichungen: man wird sich nicht nur darauf beschränken müssen, die Integration derselben zu versuchen, sondern man wird einen wesentlichen Theil seiner Aufmerksamkeit auch auf das Studium ihrer Functionalinvarianten zu verwenden haben, d. i. auf die Untersuchung, wie viel in der Theorie der Differentialgleichungen von linearen Transformationen abhängig ist, wie viel unabhängig von solchen Transformationen bestehen bleibt.

Hat man indess einmal diesen Gesichtspunkt gewonnen, so wird man auch weiter gehen und allgemeine eindeutige Transformationen, wie sie oben kurz betrachtet wurden (p. 956), an Stelle der linearen treten lassen. Es ist aber hervorzuheben, dass nicht jede eindeutige Transformation der Form:

$$(22) \qquad \varrho y_i = \varphi_i(\overset{p}{x}, \overset{q}{u}), \qquad \sigma v_i = \psi_i(\overset{r}{x}, \overset{s}{u}),$$

welche den Connex $f(x, u) = 0$ in einen Connex $F(y, v) = 0$ ver-

wandelt, auch die Hauptcoincidenz des Connexes f in die Hauptcoincidenz des Connexes F überführt; denn für die Coincidenz, welche aus der Hauptcoincidenz von f entsteht, ist die Bedingung $v_y = 0$ nicht nothwendig von selbst erfüllt. Die Hauptcoincidenz von F geht vielmehr aus derjenigen Coincidenz hervor, welche aus $f = 0$ durch den Connex $\Sigma \varphi_i \psi_i = 0$ ausgeschnitten wird. Die Elemente der Hauptcoincidenz, welche in $f = 0$ von den Punkten und Tangenten einer Curve $\chi(x) = 0$ gebildet werden, gehen also im Allgemeinen in die Elemente eines Curven*paares* von $F = 0$ über. Ist jedoch insbesondere die Substitution (22) so beschaffen, dass vermöge $f = 0$ die Bedingung $u_x = 0$ in die Bedingung $v_y = 0$ transformirt wird, so geht die Hauptcoincidenz von f in die Hauptcoincidenz von F über. Das aus einer Curve $\chi = 0$ entstehende Curvenpaar hat also jetzt die Eigenschaft, dass jede Tangente der einen Curve des Paares durch den entsprechenden Punkt der anderen Curve hindurchgeht. Sollen aber die beiden letzteren Curven zusammenfallen, d. h. sollen die Punkte und Tangenten einer Curve $\chi(x) = 0$ übergehen in die Punkte und Tangenten *einer* Curve $X(y) = 0$*), so *müssen in Folge unserer Transformation die beiden Bedingungen* $u_x = 0$ *und* $u_{dx} = 0$ *vermöge* $f = 0$ *bez. übergeführt werden in* $v_y = 0$ *und* $v_{dy} = 0$. Nur in diesem Falle entsteht daher aus einer Integralcurve des Connexes f eine Integralcurve des Connexes F; *nur dieser Fall der Transformation ist daher für die mit der Hauptcoincidenz von f zusammenhängende Differentialgleichung von Bedeutung.* Nur in Bezug auf diesen engeren Kreis algebraisch-eindeutiger Transformationen, welcher sich auf die Differentialgleichung als solche bezieht, kann man sonach insbesondere *von dem Geschlechte einer Differentialgleichung sprechen*, indem man unsere früheren Betrachtungen über Coincidenzen auf die Hauptcoincidenz von f anwendet (p. 961). Das Geschlecht ist dann eine Zahl, welche bei den genannten Transformationen immer erhalten bleibt. — Selbstverständlich kann man auch die oben gebildeten Differentiale für die Hauptcoincidenz aufstellen, indem man den Connex $\varphi = 0$ durch den identischen Connex $u_x = 0$ ersetzt. Man erhält einfach, wenn noch $(a\alpha)_i = c_i$ und $(b\beta)_i = \gamma_i$ gesetzt wird:

$$dI = \frac{\Theta \,.\, (x\, dx\, d'x)\, u_\gamma}{(\gamma f_u{}' x)} = \frac{\Theta \,.\, (u\, du\, d'u)\, c_x}{(c f_x{}' u)} \,.$$

Wir wollen nun die Bedingungen aufstellen, denen die in (22) vorkommenden Functionen φ_i, ψ_i genügen müssen, wenn sie die

*) Letztere kann dabei insbesondere aus einem Punkte und den durch ihn gehenden Strahlen bestehen; dann ist sie allerdings nicht mehr in Punktcoordinaten darstellbar. In dem Falle erscheint also der Punkt als ein Integral der Differentialgleichung.

Hauptcoincidenzcurven von f in diejenigen von F überführen sollen. Zunächst geben die Bedingungen $v_y = 0$, $v_{dy} = 0$ unmittelbar die Gleichungen:

$$\Sigma \varphi_i \psi_i = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma \psi_i d\varphi_i = 0 .$$

Beide müssen bestehen in Folge der Gleichungen $f = 0$, $u_x = 0$. Die erstere führt daher auf die zu erfüllende Identität:

$$\Sigma \varphi_i \psi_i = Kf + Mu_x . \tag{23}$$

Die andere Gleichung aber gibt entwickelt:

$$\Sigma\Sigma \psi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} dx_k + \Sigma\Sigma \psi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_k} du_k = 0 . \tag{24}$$

Da nun gleichzeitig die Gleichungen bestehen:

$$\Sigma x_i du_i = 0 , \qquad \Sigma x_i u_i = 0 , \qquad \Sigma x_i f_{x_i}' = mf = 0 ,$$

so kann man setzen:

$$du_i = \varkappa u_i + \lambda f_{x_i}' . \tag{25}$$

Ferner erhält man aus $f = 0$ durch Differentiation:

$$\Sigma f_{x_i}' dx_i + \Sigma f_{u_i}' du_i = 0 , \tag{26}$$

und hieraus folgt, da $\Sigma u_i f_{u_i}' = 0$, wegen (25) eine Bestimmung von λ allein, während $\varkappa$ unbestimmt bleibt.

Aber in Folge der Gleichung:

$$0 = \Sigma u_i f_{u_i}' = (f_u' x dx)$$

kann man auch setzen:

$$dx_i = \varkappa' x_i + \lambda' f_{u_i}' . \tag{27}$$

Führt man diese Werthe ebenfalls in (26) ein, so bleibt:

$$(\lambda + \lambda') \, . \, \Sigma f_{x_i}' f_{u_i}' = 0 . \tag{28}$$

Das Verschwinden des zweiten Factors wollen wir zunächst ausschliessen. Tritt dieses also nicht ein, so hat man $\lambda + \lambda' = 0$, und die Gleichung (24) geht vermöge (25) und (27) über in:

$$(\varkappa' p + \varkappa q) \, \Sigma \varphi_i \psi_i + \lambda' \, \Sigma\Sigma \psi_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial u_k} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_k} \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) = 0 .$$

Es muss somit, wenn man (23) zu Hülfe nimmt, noch eine Identität der Form bestehen:

$$\sum_i \sum_k \psi_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial u_k} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_k} \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) = K' f + M' u_x . \tag{29}$$

Die Gleichungen (23) und (29) enthalten alle Bedingungen, denen die Functionen φ_i, ψ_i genügen müssen; man kann in Folge derselben unmittelbar zwei dieser Functionen durch die übrigen ausdrücken.

Die Form der letzten Gleichung ist in Bezug auf die φ_i und ψ_i unsymmetrisch. Dass aber diese Functionen in Wahrheit symmetrischen Bedingungen unterworfen sein müssen, folgt aus dem dualen Charakter, der oben für Differentialgleichungen überhaupt nachgewiesen wurde, und in der That erhält man aus (23) und (29) zusammen auch leicht diejenige Form der einen Bedingung, welche zu (29) symmetrisch ist. Unterwirft man nämlich die Gleichung (23) dem Process:

$$\sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial u_k}\frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial u_k}\right),$$

so erhält man links zwei Theile, deren einer die linke Seite von (29) ist, während der andere durch Vertauschung der φ und ψ aus ihm hervorgeht; auf der anderen Seite aber erhält man die Form $K''f + M''u_x$, also auch den zu (29) symmetrischen Ausdruck ähnlich dargestellt; q. e. d.

Die Bedingungen dafür, dass durch die Transformation (22) *die Differentialgleichung der Integralcurven von $f = 0$ in die Differentialgleichung der Integralcurven von $F = 0$ übergeführt wird*), sind also in symmetrischer Form:*

$$(30)\qquad \begin{aligned} \sum_i\sum_k \psi_i\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial u_k} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_k}\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) &= K'f + M'u_x\,,\\ \sum_i\sum_k \varphi_i\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial u_k} - \frac{\partial \psi_i}{\partial u_k}\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) &= K''f + M''u_x\,. \end{aligned}$$

Es bleibt nur noch der Ausnahmefall zu untersuchen, in welchem schon eine Gleichung:

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial u_i} = Kf + Mu_x$$

besteht, und daher der linke Theil derselben durch sein Verschwinden das Bestehen der Gleichung (28) herbeiführt. *Wir wollen zeigen, dass in diesem Falle keine eigentliche Differentialgleichung vorliegt.*

Sind zunächst $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ beliebige Grössen, so sieht man, dass das Product:

$$\begin{vmatrix} x_1 & f'_{u_1} & \xi_1 \\ x_2 & f'_{u_2} & \xi_2 \\ x_3 & f'_{u_3} & \xi_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & f'_{x_1} & \eta_1 \\ u_2 & f'_{x_2} & \eta_2 \\ u_3 & f'_{x_3} & \eta_3 \end{vmatrix}$$

für alle Elemente der Coincidenz verschwindet, denn in der durch die Multiplication entstehenden Determinante verschwinden in unserm Falle vier Elemente, welche ein Rechteck bilden. Es muss also einer

*) Man kann auch verlangen, dass der Transformation (22) diese Eigenschaft in Bezug auf *jeden* Connex $f = 0$ zukommt. Dies gibt die sogenannten *Berührungstransformationen;* vgl. darüber den Schluss dieses Bandes.

der Factoren des obigen Products Null sein; d. h. man hat, da die ξ, η beliebig sind, entweder:

(31) $x_2 f_{u_3}' - x_3 f_{u_2}' = 0, \quad x_3 f_{u_1}' - x_1 f_{u_3}' = 0, \quad x_1 f_{u_2}' - x_2 f_{u_1}' = 0,$

oder:

(32) $u_2 f_{x_3}' - u_3 f_{x_2}' = 0, \quad u_3 f_{x_1}' - u_1 f_{x_3}' = 0, \quad u_1 f_{x_2}' - u_2 f_{x_1}' = 0,$

immer unter der Voraussetzung $f = 0$, $u_x = 0$.

Betrachten wir nun die Gleichung:

$$X_y \equiv f\Big(x, (xy)\Big) \equiv a_x^m (\alpha x y)^n = 0,$$

welche in den Veränderlichen y das Product der n Geraden darstellt, die in der Hauptcoincidenz von x ausgehen, und aus der die Differentialgleichung entsteht, wenn man die y_i durch die dx_i ersetzt. Durch die Substitution $u_i = (xy)_i$, welche die Bedingung $u_x = 0$ identisch erfüllt, verwandeln sich die Gleichungen (31) in:

$$(33) \qquad \frac{\partial X_y}{\partial y_1} = 0, \qquad \frac{\partial X_y}{\partial y_2} = 0, \qquad \frac{\partial X_y}{\partial y_3} = 0.$$

Diese Gleichungen sollen für alle Werthsysteme x, y bestehen, für welche $X_y = 0$ ist. Ist also X_y irreducibel, so sind sie unmöglich, denn die linken Theile von (33) sind von niedrigerer Ordnung als X_y, mithin nie durch X_y theilbar. Ist aber X_y reducibel etwa gleich $\psi . \chi \ldots$, wo $\psi, \chi, \ldots$ irreducibel, so verwandeln sich die Gleichungen (33) in:

$$\psi \ldots \frac{\partial \chi}{\partial y_i} + \chi \ldots \frac{\partial \psi}{\partial y_i} + \ldots = 0.$$

Für Werthe, die der Gleichung $\psi = 0$ genügen, gibt dies:

$$\chi \ldots \frac{\partial \psi}{\partial y_i} = 0;$$

es muss also entweder einer der Factoren $\chi, \ldots$ gleich ψ sein, oder es müssen alle Ausdrücke $\frac{\partial \psi}{\partial y_i}$ verschwinden. Man erkennt so, dass X_y die Form haben muss:

$$X_y = M^2 . \mathsf{X},$$

wo X die y nicht mehr enthält. Ist also

$$M = \Psi\Big(\overset{\varrho}{x}, \overset{\sigma}{(xy)}\Big),$$

so wird:

$$f = \mathsf{X}_{m-2\varrho} . \Psi^2 (\overset{\varrho}{x}, \overset{\sigma}{u}) + N u_x$$

die allgemeinste Form des zugehörigen Connexes.

In einem solchen Connexe $(m, 2\sigma)$ entspricht jedem Punkte x eine Curve, welche in ihm einen σ-fachen Punkt hat, jeder Geraden

u eine Curve, welche von ihr in ϱ Punkten berührt wird, während die übrigen $m - 2\varrho$ Schnittpunkte auf einer festen Curve $X = 0$ liegen. *Die Hauptcoincidenz des Connexes besteht in diesem Falle aus der singulären Curve* $X = 0$, *gedacht als Ort von Büschelcentren, und aus der doppelt zählenden Hauptcoincidenz des Connexes* $\Psi = 0$.

Nur dualistisch entgegengesetzt verhält sich der Fall, in welchem die Gleichungen (32) an Stelle von (31) treten. —

Die Formeln für die eindeutige Transformation in nicht homogener Form werden, wenn ξ, η die neuen Veränderlichen bedeuten, dadurch erhalten, dass man in den früheren Formeln $y_1 = \xi y_3$, $y_2 = \eta y^3$ setzt. Man hat dann

$$\xi = \frac{\varphi_1}{\varphi}, \quad \eta = \frac{\varphi_2}{\varphi},$$

wo φ, φ_1, φ_2 doppelt homogene Functionen der Reihen x, y, 1, $-p$, 1, $xp - y$ sind (p. 965). Die Gleichungen für die v_i erhält man am einfachsten, indem man $\frac{d\eta}{d\xi}$ bildet, für den darin vorkommenden Ausdruck $\frac{d^2 y}{dx^2}$ aber seinen aus $\frac{df}{dx} = 0$ fliessenden Werth setzt. Die Gleichung $f = 0$ geht dadurch in eine Gleichung zwischen ξ, η, $\frac{d\eta}{d\xi}$ über. Wir haben also die allgemeinste Transformation vor uns, bei welcher die neuen Veränderlichen und deren erste Differentialquotienten Functionen der alten und ihrer ersten Differentialquotienten sind.

V. Beispiele für die Bestimmung von Hauptcoincidenzcurven.

Im Folgenden sollen noch einige Beispiele für die Integration der Differentialgleichung der Hauptcoincidenzcurven gegeben werden. Dieselben sind dadurch von besonderem Interesse, dass sie zum Theil mit früheren andern Untersuchungen im Zusammenhange stehen.

1) Schon oben wurde bemerkt (p. 937), dass der lineo-lineare Connex, d. i. der Connex (1, 1), uns unmittelbar die Verwandtschaft der Collineation liefert. Da nun die letztere im Allgemeinen in der kanonischen Form:

$$\varrho y_i = \varkappa_i x_i$$

angenommen werden darf (p. 262), so kann der allgemeine Connex $a_x u_\alpha = 0$ auch auf die kanonische Form transformirt werden:

$$\varkappa_1 u_1 x_1 + \varkappa_2 u_2 x_2 + \varkappa_3 u_3 x_3 = 0\,.$$

Hieraus aber erhalten wir die Differentialgleichung:

$$\varkappa_1 x_1(x_2 dx_3 - x_3 dx_2) + \varkappa_2 x_2(x_3 dx_1 - x_1 dx_3) + \varkappa_3 x_3(x_1 dx_2 - x_2 dx_1) = 0,$$

oder nach einfacher Umformung:

$$(\varkappa_2 - \varkappa_3)\frac{dx_1}{x_1} + (\varkappa_3 - \varkappa_1)\frac{dx_2}{x_2} + (\varkappa_1 - \varkappa_2)\frac{dx_3}{x_3} = 0.$$

Die Gleichung der Hauptcoincidenzcurven des lineo-linearen Connexes ist also im Allgemeinen von der Form:

$$x_1^{\varkappa_2 - \varkappa_3} x_2^{\varkappa_3 - \varkappa_1} x_3^{\varkappa_1 - \varkappa_2} = \text{Const.}$$

Sie sind somit insbesondere algebraisch, wenn die Grössen $\varkappa_i$ sich zu einander wie ganze Zahlen verhalten. — Auf diese Curven werden wir beim Studium des Connexes (1, 1) noch zurückkommen.

2) Es seien durch die Gleichungen:

$$a_x^2 = 0, \quad b_x^2 = 0, \quad c_x^2 = 0, \quad d_x^2 = 0$$

vier von einander unabhängige Kegelschnitte gegeben. In dem dreifach unendlichen Curvensysteme:

$$\varkappa_1 a_x^2 + \varkappa_2 b_x^2 + \varkappa_3 c_x^2 + \varkappa_4 d_x^2 = 0 \tag{1}$$

gibt es dann noch zweifach unendlich viele Curven, die in ein Linienpaar zerfallen; und zwar gibt es zu jedem Punkte der Ebene ein Linienpaar, dessen Doppelpunkt in dem Punkte selbst liegt, wovon man sich leicht überzeugt (was übrigens auch aus der folgenden algebraischen Entwicklung hervorgeht). Alle diese Linienpaare werden ein System von Curven umhüllen*), von denen zwei durch einen beliebigen Punkt gehen; für sie wollen wir zunächst die Differentialgleichung aufstellen und dieselbe sodann integriren.

Jede Linie u der Ebene wird durch eine andere Linie v zu einem Linienpaare unseres Systems (1) ergänzt. Die Gleichung der Linie v findet man durch Elimination der Grössen $\varkappa_i$ und v_i aus den Gleichungen:

$$\varkappa_1 a_{ik} + \varkappa_2 b_{ik} + \varkappa_3 c_{ik} + \varkappa_4 d_{ik} = u_i v_k + v_i u_k$$
$$0 = v_x,$$

wenn $a_x^2 = \Sigma\Sigma a_{ik} x_i x_k$, etc., in der Form:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_{11} & c_{11} & d_{11} & 2u_1 & 0 & 0 \\ a_{22} & b_{22} & c_{22} & d_{22} & 0 & 2u_2 & 0 \\ a_{33} & b_{33} & c_{33} & d_{33} & 0 & 0 & 2u_3 \\ a_{23} & b_{23} & c_{23} & d_{23} & 0 & u_3 & u_2 \\ a_{31} & b_{31} & c_{31} & d_{31} & u_3 & 0 & u_1 \\ a_{12} & b_{12} & c_{12} & d_{12} & u_2 & u_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

*) Dies Curvensystem ist für die sogenannte Steiner'sche Fläche von Wichtigkeit; vgl. im Folgenden Clebsch: Ueber die Steiner'sche Fläche, Crelle's Journal, Bd. 67.

Diese Gleichung stellt einen Connex (1, 2) dar; für constante u ist sie die Gleichung der zu u gehörenden Geraden v, für constante x also gibt sie einen Kegelschnitt als Enveloppe der Linien u, deren zugehörige Linien v durch x gehen. Insbesondere bilden die beiden von x aus an diesen Kegelschnitt gehenden Tangenten, d. i. die beiden zu x gehörenden Linien der Hauptcoincidenz, dasjenige Linienpaar unseres Systems, dessen Scheitel in x selbst liegt. Die aus unserem Connexe (2) durch die Substitution $u_i = (x\,dx)_i$ hervorgehende Differentialgleichung ist sonach die Differentialgleichung der von uns gesuchten Curven.

Dieselbe erscheint bei dieser directen Aufstellung in einer Form, welche das Integral nicht unmittelbar erkennen lässt; in passenderer Gestalt dagegen erhält man dieselbe Gleichung durch folgende Ueberlegung. Nach früheren Erörterungen (p. 385) gibt es bekanntlich eine einfach unendliche Schaar von Kegelschnitten*)

$$u_\alpha^2 + \lambda u_\beta^2 = 0\,, \tag{3}$$

welche sämmtlich mit allen Kegelschnitten des Systems (1) in vereinigter Lage sind, so dass unabhängig von λ die Gleichungen bestehen:

$$a_\alpha^2 + \lambda a_\beta^2 = 0, \quad b_\alpha^2 + \lambda b_\beta^2 = 0, \quad c_\alpha^2 + \lambda c_\beta^2 = 0, \quad d_\alpha^2 + \lambda d_\beta^2 = 0 \tag{4}$$

Soll nun ein Linienpaar mit allen Kegelschnitten (3) vereinigt liegen, d. i. der gegebenen dreifach-unendlichen Schaar (1) angehören, so heisst dies, dass die Linien u und v desselben einander in Bezug auf alle Curven (3) polar conjugirt sind, d. h. dass die Gleichungen bestehen:

$$u_\alpha v_\alpha = 0 \quad \text{und} \quad u_\beta v_\beta = 0\,.$$

Eliminirt man jetzt aus ihnen und aus der Gleichung $v_x = 0$ die v_i, so erhält man den Connex (2) in der einfacheren Gestalt einer Functionaldeterminante:

$$(\alpha \beta x)\, u_\alpha u_\beta = 0\,.$$

Die Hauptcoincidenzcurven dieses Connexes aber sind uns aus einem früheren Beispiele schon bekannt (p. 965); *es sind eben die Kegelschnitte der Schaar* (3). *Letztere bilden daher das gesuchte Curvensystem.*

3) Wir gehen zu einem Beispiele über, welches dadurch an Interesse gewinnt, dass es sich auf einen Connex $f = 0$ bezieht, für welchen vermöge $f = 0$ und $u_x = 0$ die oben besprochene Bedingung $\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} = 0$ erfüllt wird. Gegeben sei ein Kegelschnitt $a_x^2 \equiv b_x^2 \equiv c_x^2 = 0$

*) Ueber weitere algebraische und geometrische Beziehungen zwischen den Systemen (1) und (3) vgl. die auf p. 519 genannten Aufsätze von Smith und Rosanes.

und eine ihn in zwei getrennten Punkten treffende Gerade $v_x = 0$.*) Zufolge früherer Betrachtungen (p. 74) stellt dann der Kegelschnitt:

$$(5) \qquad (\alpha + 1)^2 (auv)^2 \,.\, b_x^2 - 4\,\alpha \,.\, (auv)\, a_x \,.\, (buv)\, b_x = 0$$

den Ort der Punkte x dar, deren Verbindungslinie mit dem Schnittpunkte von u und v den Kegelschnitt $a_x^2 = 0$ so trifft, dass die Punkte x und (uv) mit den Schnittpunkten des Kegelschnittes das Doppelverhältniss α bestimmen. Fügen wir also die Bedingung $u_x = 0$ hinzu, so werden durch (5) auf der Linie u zwei Punkte bestimmt, welche mit x und dem Punkte (uv) das Doppelverhältniss α bilden. Letzteres gilt ebenso, wenn wir die Gleichung (5) unter der Voraussetzung $u_x = 0$ noch weiter umformen. Nun ist identisch:

$$(buv)\, a_x = (auv)\, b_x - (abv)\, u_x + (abu)\, v_x\,,$$

und ferner nach der Identität (IV), p. 283, wegen $u_x = 0$:

$$2\,(abu)\,(avu)\, b_x v_x = (abu)^2\, v_x^2\,.$$

Somit geht die Gleichung (5) über in:

$$(6) \qquad (\alpha - 1)^2 (auv)^2 \,.\, b_x^2 + 2\,\alpha\,(abu)^2\, v_x^2 = 0\,.$$

Man erkennt sofort, dass jede Curve C_2 und K_2 dieses Connexes (2, 2) dem Büschel $a_x^2 + \lambda v_x^2 = 0$ angehört, d. h. die Curve $a_x^2 = 0$ in ihren Schnittpunkten mit $v_x = 0$ berührt. Es gibt also in dem Connexe (6) nur eine *ein*fach unendliche Schaar von Curven C_2 und ebenso nur eine mit dieser identische *ein*fach unendliche Schaar von K_2 (vgl. p. 118). Je einfach unendlich vielen Punkten x muss daher dieselbe K_2, und je einfach unendlich vielen Geraden u dieselbe C_2 entsprechen. Da ferner jede Gerade der Ebene nur von einem Kegelschnitte des Büschels berührt wird, so bilden alle Punkte, denen dieselbe K_2: $2\,(abu)^2 - \lambda\,(auv)^2 = 0$ vermöge (6) entspricht, den Kegelschnitt: $(\alpha - 1)^2\, b_x^2 + \alpha\lambda v_x^2 = 0$, so dass uns hierdurch eine paarweise Zuordnung der Kegelschnitte unseres Büschels gegeben ist. Unter der Schaar von Connexen (6) ist aber noch besonders ausgezeichnet der für $\alpha = -1$ resultirende:

$$(7) \qquad f = 2\,(auv)^2\, b_x^2 - (abu)^2\, v_x^2 = 0\,.$$

Es besteht nämlich die Identität:

$$f + 2\,(abv)\,(avu)\, b_x \,.\, u_x = 2\,[(avu)\, a_x]^2\,;$$

und dieselbe sagt zufolge unserer allgemeinen Erörterungen aus (p. 977), dass vermöge $f = 0$, $u_x = 0$ die Bedingung $\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} = 0$ erfüllt ist, dass also in unserm Falle *jeder Punkt x auf der zugehörigen K_2 liegt,*

*) Vgl. im Folgenden den auf p. 811 und 826 genannten Aufsatz von Harnack.

und jede Gerade u die zugehörige C_2 berührt. Gleichzeitig folgt, dass *die Hauptcoincidenzcurven des Connexes* (7) doppelt zählend aus denen des Connexes $(avu)\, a_x = 0$ bestehen, d. h. (nach p. 965) eben wieder aus ***den Curven C_2, bez. K_2 des Connexes*** (7).

Die Gleichung (6) nun kann man auch durch ein Eliminationsverfahren aus einem gewissen Systeme von Gleichungen erhalten, und diese Herleitung derselben führt unmittelbar zur Aufstellung ihrer Integralcurven durch eine Schlussweise, die wir sogleich näher besprechen werden. Setzt man nämlich in (6) $x_i = (udu)_i$, so resultirt die Differentialgleichung:

$$(8) \qquad (\alpha - 1)^2 (auv)^2 (budu)^2 + 2\,\alpha\,(abu)^2 (vudu)^2 = 0\,;$$

und dies ist nichts anderes, als das Resultat der Elimination der Grösse D aus den beiden in D quadratischen Gleichungen:

$$(9) \quad \begin{aligned} &\tfrac{1}{2} D^2 . (abu)^2 (cuv)^2 + D\ \ . (abu)^2 (vudu) + \ \ \ (audu)^2 = 0 \\ &\tfrac{1}{2} D^2 . (abu)^2 (cuv)^2 + D\alpha . (abu)^2 (vudu) + \alpha^2 (audu)^2 = 0\,. \end{aligned}$$

Die erste der Gleichungen (9) aber entsteht wieder durch Elimination der x_i aus den drei Gleichungen:

$$D . a_x (avu) + (du)_x = 0\,, \qquad a_x{}^2 = 0\,, \qquad u_x = 0\,;$$

und wir können ihr daher leicht eine Bedeutung beilegen. Durch die erste der letzten Gleichungen ist nämlich die Grösse D als das zur Grundcurve $a_x{}^2 = 0$ gehörige Differential dritter Gattung definirt, dessen Unendlichkeitspunkte in den Schnittpunkten von $v_x = 0$ mit $a_x{}^2 = 0$ liegen; denn vermöge $u_x = 0$ und $u_{dx} + (du)_x = 0$ ist (vgl. p. 768):

$$D = -\frac{(du)_x}{a_x\,(avu)} = \frac{(c\,x\,dx)}{v_x \cdot a_x a_c} \quad \text{für } c_i = (vu)_i\,.$$

Die Gleichung gibt sonach den Werth des Differentials D in den Schnittpunkten der Grundcurve $a_x{}^2 = 0$ mit $u_x = 0$, wenn man von der Linie u zu einer benachbarten Linie $u + du$ fortschreitet. Folglich ist (8) die Bedingung dafür, dass D und $\frac{1}{\alpha} D$ gleichzeitig Wurzeln der ersten Gleichung (9) seien, d. h. dass zwischen den Wurzeln, D_1 und D_2, dieser Gleichung die Relation bestehe:

$$D_2 = \alpha D_1\,,$$

oder wenn w_1, w_2 die Werthe des Integrals $w = \int D$ in den Schnittpunkten von u mit $a_x{}^2 = 0$ bedeuten, dass die Gleichung bestehe:

$$(10) \qquad w_2 = \alpha w_1 + C\,,$$

wo C eine Integrationsconstante bedeutet.

Nun kann man bekanntlich die Punkte der Curve $a_x{}^2 = 0$ als rationale Functionen zweiten Grades eines Parameters $\varkappa = e^w$ dar-

stellen, wenn wieder $w = \int D$ das logarithmische Integral bedeutet; d. h. wir können für einen Punkt x der C_2 setzen:

$$\sigma x_i = \varphi_i(w),$$

wo dann die φ_i einfach periodische Functionen sind. Besteht jetzt zwischen den zu zwei Punkten x und y der C_2 gehörigen Integralen w_1, w_2 die Relation (10), so wird $\sigma y_i = \varphi_i(\alpha w + C)$, und die Coordinaten der Verbindungslinie beider Punkte sind:

$$(11) \quad \mu u_1 = \varphi_2(w) \cdot \varphi_3(\alpha w + C) - \varphi_3(w) \cdot \varphi_2(\alpha w + C), \quad \text{etc.}$$

Diese Verbindungslinien aber umhüllen zufolge unserer Ableitung der Gleichung (8) aus den Gleichungen (9) die Integralcurven des Connexes (6). *Die Gleichungen* (11) *geben daher die Parameterdarstellung der Integralcurven des Connexes* (6); eliminirt man aus ihnen die Grösse w, so erhält man die Gleichung der Intelgralcurven selbst. Man erkennt sofort, dass letztere *algebraisch* (und dann vom Geschlechte Null) sind, wenn α eine *rationale* Zahl bedeutet, dagegen transscendent, wenn α irrational ist. Für alle Werthe von α geben die Punktcurve $a_x^2 = 0$ und die Doppellinie $v_x^2 = 0$ ein particuläres Integral der Gleichung (8) in Punktcoordinaten, die Klassencurve $(abu)^2 = 0$ und das Punktepaar $(avu)^2 = 0$ ein particuläres Integral in Liniencoordinaten.

4) Es fällt sofort der Zusammenhang in die Augen, welcher zwischen den letzten Erörterungen und früheren Untersuchungen über die Geometrie auf einer Curve dritter Ordnung besteht (p. 619 ff.); denn jetzt, wie damals, benutzten wir die Relationen zwischen Punktepaaren auf einer Grundcurve, um die Umhüllungsgebilde der Verbindungslinien je zweier zusammengehörigen (durch eine transscendente Relation verbundenen) Punkte zu bestimmen. Die Coordinaten u_i der Tangente stellten wir damals als elliptische Functionen eines Parameters dar, und für die entsprechende Darstellung traten im letzten Beispiele in ganz analoger Weise einfach-periodische Functionen auf. Wie nun hier eine Relation zwischen den Parameterwerthen zweier Punkte des Kegelschnitts die Bestimmung der Integralcurven eines gewissen Connexes ermöglicht, so können wir auch bei den Curven dritter Ordnung eine entsprechende Relation zur Integration algebraischer Differentialgleichungen verwerthen. Es kann dies geschehen, indem man zunächst die Gleichung aufstellt, welche die Werthe des Differentials erster Gattung:

$$D = \frac{(cx\,dx)}{a_x^2 a_c}$$

in den Schnittpunkten einer Linie $u_x = 0$ mit der Grundcurve $a_x^3 = 0$ liefert, vorausgesetzt, dass die Punkte $x + dx$ auf einer benachbarten

Geraden $u + du$ liegen: eine Gleichung, die dann genau der ersten von obigen Gleichungen (9) entspricht.*)

Zur Aufstellung der erwähnten Gleichung haben wir die Grössen x_i und dx_i aus den folgenden Gleichungen zu eliminiren (vgl. p. 810):

$$a_x^2 a_c D = (c x d x), \quad a_x^3 = 0, \quad a_x^2 a_{dx} = 0, \quad u_x = 0, \quad (du)_x + u_{dx} = 0.$$

Vermöge der letzten Gleichungen können wir aus der ersten die dx_i entfernen, indem wir $c_i = (ru)_i$ setzten, wo die r_i ganz willkürlich sind, denn es ist dann wegen $u_x = 0$:

$$(cxdx) = - r_x (du)_x .$$

Ferner können wir die zweite und dritte Gleichung durch eine der ersten analog gebildete ersetzen, in der nur willkürliche Grössen s_i statt der r_i stehen, denn beide Gleichungen sind eben *nur* äquivalent, wenn $a_x^3 = 0$ und $a_x^2 a_{dx} = 0$. Schliesslich erwächst also die Aufgabe, aus den zwei Gleichungen:

$$(12) \qquad \begin{aligned} \varrho_x^2 \equiv \varrho_x'^2 &\equiv a_x^2 (aru) \,.\, D + r_x (du)_x = 0 \\ \sigma_x^2 \equiv \sigma_x'^2 &\equiv a_x^2 (asu) \,.\, D + s_x (du)_x = 0 \end{aligned}$$

und aus $u_x = 0$ die x_i zu eliminiren. Das Resultat ist bekanntlich gegeben durch die Gleichung (vgl. p. 281):

$$(13) \qquad (\varrho \varrho' u)^2 \,.\, (\sigma \sigma' u)^2 - (\varrho \sigma u)^2 \,.\, (\varrho' \sigma' u)^2 = 0 \,.$$

Statt indessen den links stehenden Ausdruck direct nach (12) zu berechnen, verfährt man hier besser in folgender Weise. Auf der Linie $u_x = 0$ werden durch die Schnittpunkte mit den Curven $\varrho_x^2 = 0$ und $\sigma_x^2 = 0$ zwei binäre quadratische Formen dargestellt; die Resultante beider muss verschwinden, wenn die Gleichung (13) besteht; diese Resultante ist aber identisch mit der Discriminante der Functionaldeterminante der beiden Formen (p. 218), und das Punktepaar der letzteren wird auf $u_x = 0$ durch die Jacobi'sche Curve $(\varrho \sigma u)\, \varrho_x \sigma_x = 0$ ausgeschnitten. Soll daher die genannte Discriminante verschwinden, so muss der Kegelschnitt $(\varrho \sigma u)\, \varrho_x \sigma_x = 0$ von der Linie $u_x = 0$ berührt werden; d. h. die Gleichung (13) ist identisch mit der Liniencoordinaten-Gleichung des letzteren Kegelschnitts, geschrieben in Coordinaten u_i. Nun ist nach (12) in unserm Falle, wenn $\Theta = (abu)^2 a_x b_x$:

$$\begin{aligned} (\varrho \sigma u)\, \varrho_x \sigma_x = \tfrac{1}{2} (rsu) \{ (du)_x^2 + a_x (audu)\, D + \Theta D^2 \} \\ - u_x \{ \tfrac{1}{4} (rsdu)\, (du)_x + \tfrac{1}{2} a_x (ars)\, (audu)\, D \}. \end{aligned}$$

*) Vgl. im Folgenden Harnack: Math. Annalen, Bd. 9, p. 31 ff. und p. 218 ff. In dem vorhin genannten Aufsatze (id. ib. p. 407) wird insbesondere gezeigt, wie die frühere Gleichung aus der jetzt zu betrachtenden entsteht, wenn die C_3 in eine C_2 und eine Gerade zerfällt.

Lassen wir den die willkürlichen Grössen r, s enthaltenden Factor (rsu) fort, so haben wir also wegen $u_x = 0$ die Liniengleichung des Kegelschnittes:

$$(du)_x^2 + a_x^2 (audu) D + \Theta D^2 = 0$$

zu bilden; und diese ist in Rücksicht auf Gleichung (5) und (6) p. 544 gegeben durch:

$$D^3 . F + 3 D . \Theta' + 2 f' = 0, \tag{14}$$

wo Θ', f' aus Θ, f entstehen, wenn man $x_i = (udu)_i$ setzt, wo also:

$$\Theta' = (abu)^2 (audu) (budu), \qquad f' = (audu)^3$$

und:

$$F = (abu)^2 (cdu)^2 (acu) (bdu).$$

Dass in der Gleichung (14) der Coëfficient von D^2 verschwinden muss, war nach dem Abel'schen Theoreme vorauszusehen, denn er ist proportional zu der Summe der drei Werthe von D in den Schnittpunkten von $a_x^3 = 0$ mit $u_x = 0$.*)

Von der Gleichung (14) werden wir nun durch folgende Ueberlegungen zu unserm Ausgangspunkte zurückgeführt. Nimmt man zwischen den Wurzeln D_1, D_2, D_3 derselben, ausser der Gleichung des Abel'schen Theorems: $D_1 + D_2 + D_3 = 0$, eine zweite lineare Relation an:

$$m_1 D_1 + m_2 D_2 + m_3 D_3 = 0,$$

in der die m_i irgend welche rationale oder irrationale Zahlen bedeuten, oder wegen jener ersten Gleichung:

$$D_1 - \varrho D_2 = 0, \quad \text{wenn} \quad \varrho = -\frac{m_2 - m_3}{m_1 - m_3}, \tag{15}$$

so muss neben (14) die Bedingung erfüllt sein:

$$\varrho^3 D^3 . F + 3 \varrho D . \Theta' + 2 f' = 0;$$

und die Elimination von D aus beiden Gleichungen gibt:

$$F . f'^2 + \frac{3\sigma - 2}{\sigma^3} \Theta'^3 = 0, \quad \text{wenn} \quad \sigma = \tfrac{2}{3} . \frac{\varrho^2 + \varrho + 1}{\varrho(\varrho + 1)}, \tag{16}$$

wo man statt ϱ auch die Werthe

$$-\frac{1}{1 + \varrho} = -\frac{m_3 - m_1}{m_2 - m_1} \quad \text{oder} \quad -\frac{1 + \varrho}{\varrho} = -\frac{m_1 - m_2}{m_3 - m_2}$$

setzen kann, ohne den Werth von σ zu ändern. Die Gleichung (16) ist die Differentialgleichung für die Hauptcoincidenzcurven eines Connexes (6, 6), deren Integration vermöge (15) auf eine Quadratur zurückgeführt ist, wie man nach Analogie der Behandlung des vorhergehenden Beispiels sofort erkennt.

---

*) Vgl. die zweite Anmerkung auf p. 811.

Die Gleichung des Connexes (6, 6) selbst können wir noch in etwas anderer Form schreiben. Auf der Linie $u_x = 0$ nämlich wird durch $f = 0$ eine binäre Form dritter Ordnung bestimmt, deren Hesse'sche Form durch den Kegelschnitt $\Theta = 0$, deren cubische Covariante durch die Curve:

$$Q \equiv (abu)^2 (cau)\, c_x{}^2 b_x = 0$$

auf $u_x = 0$ bestimmt wird (p. 543 f.). Nun besteht zwischen der binären Grundform f, deren Hesse'scher Form Δ, deren Invariante R und deren Covariante Q die Identität (p. 223):

$$-2\, Q^2 = Rf^2 + \Delta^3 .$$

Zwischen den ternären Formen f, Θ, F und Q besteht also auch vermöge $u_x = 0$ die Identität:

$$\Theta^3 + Ff^2 = -2\, Q^2 , \tag{17}$$

und folglich gibt (16) auch die Differentialgleichung der Hauptcoincidenzcurven für den andern Connex:

$$2\, \sigma^3 Q^2 + (\sigma^3 - 3\, \sigma + 2)\, \Theta^3 = 0 . \tag{18}$$

Schliesslich können wir somit den Satz aussprechen:

Sind die Coordinaten der Punkte einer Fundamentalcurve dritter Ordnung durch doppelt-periodische Functionen $\varphi_i(v)$ eines Parameters v dargestellt, so erhält man die Parameterdarstellung für die Tangenten der Hauptcoincidenzcurven des Connexes (18), *indem man aus den Coordinaten zweier Curvenpunkte mit den Argumenten v und $\varrho v + c$:*

$$x_i = \varphi_i(v) \quad \textit{und} \quad y_i = \varphi_i(\varrho v + c)$$

die Coordinaten $u_i = (xy)_i$ ihrer Verbindungslinie zusammensetzt; durch den Werth von ϱ (oder $-(1 + \varrho)$, $-\frac{1+\varrho}{\varrho}$ und deren reciproke Werthe) ist alsdann der zugehörige Connex charakterisirt, durch c die Integrationsconstante geliefert.

Für allgemeine Werthe des Moduls sind die Hauptcoincidenzcurven nur dann *algebraisch*, wenn ϱ eine *rationale* Zahl ist; und zwar werden sie, wie wir früher sahen (p. 622), von der Klasse $2(m^2 + mn + n^2)$, wenn $\varrho = \frac{n}{m}$, wo m und n ganze Zahlen sind. Insbesondere sind sie also *von der sechsten Klasse für $\varrho = 1$, d. i. für den Connex $Q = 0$**), *und die Hauptcoincidenzcurven des letzteren stehen zu den Systemen von* Steiner'*schen Punktepaaren auf der Grundcurve $f = 0$ in der früher erörterten Beziehung* (p. 621). Für $\varrho = 1$ hat man indess als uneigent-

*) In Betreff des Eliminationsproblems, welches die Gleichung dieses Curvensystems in Linien- und Punkt-Coordinaten liefert, vgl. Harnack a. a. O. p. 226 und 233.

liche Lösung noch die Bedingung $F=0$ zu berücksichtigen, denn die Discriminante der Gleichung (14) ist zunächst gleich:

$$F(\Theta^3 + Ff^2) = -2FQ^2.$$

Für den Connex $\Theta = 0$ insbesondere wird $\varrho^2 + \varrho + 1 = 0$ also ϱ gleich den complexen Werthen von $\sqrt[3]{1}$; die *Hauptcoincidenzcurven von Θ sind also im Allgemeinen (d. h. abgesehen von besonderen Werthen des Moduls) transscendent.* —

Auf jeder Tangente einer Integralcurve des Connexes $Q=0$ liegt bekanntlich ihr Berührungspunkt harmonisch zu ihren drei Schnittpunkten mit $f=0$, und der Berührungspunkt der Tangente einer Hauptcoincidenzcurve von $\Theta = 0$ ist äquianharmonisch zu den betreffenden Punkten von $f=0$ (vgl. p. 225). Ganz analog kann man nun auch die Integralcurven eines beliebigen Connexes der Schaar (18) durch eine Doppelverhältnissrelation charakterisiren. Soll nämlich im binären Gebiete ein Punkt mit den Coordinaten $\varkappa_1 = 1$, $\varkappa_2 = 0$ mit den Verschwindungspunkten einer cubischen Form $a_\varkappa^3 = a_0\varkappa_1^3 + 3a_1\varkappa_1^2\varkappa_2 + 3a_2\varkappa_1\varkappa_2^2 + a_3\varkappa_2^3$ das Doppelverhältniss α bilden, so hat man die Bedingung aufzustellen, dass die entsprechende biquadratische Form das Doppelverhältniss α besitze, d. h. man hat für letztere Form die Invarianten i und j zu bilden. Für diese nun findet man (p. 300):

$$i = \tfrac{3}{2}(a_1^2 - a_2 a_0), \qquad j = \tfrac{3}{8}(2a_1^3 + a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2).$$

In diese Formen gehen aber bis auf Zahlenfactoren die Covarianten Δ und Q von $a_\varkappa^3$ über, wenn man in ihnen $\varkappa_1 = 1$, $\varkappa_2 = 0$ setzt; da wir es mit Invariantenrelationen zu thun haben, müssen wir also allgemein setzen:

$$M^2 i = -\tfrac{3}{4}\Delta, \qquad M^3 j = \tfrac{3}{8} Q,$$

wo M eine unbestimmte Grösse bedeutet, und die gesuchte Bedingung wird*):

$$\frac{\Delta^3}{Q^2} = -8\,\frac{(1-\alpha+\alpha^2)^3}{(1+\alpha)^2(2-\alpha)^2(1-2\alpha)^2}.$$

Diese Gleichung endlich ist identisch mit der Gleichung (18), wenn man Δ durch Θ ersetzt, unter Q den zu $f=0$ gehörigen Connex versteht, $\alpha = -\varrho$ setzt und für ϱ wieder σ einführt. Also:

Die Tangenten der 6 Hauptcoincidenzcurven des Connexes (18), *welche durch einen beliebigen Punkt x gehen, in diesem Punkte schneiden die Curve $f=0$ je in drei Punkten, welche mit x zusammen das Doppelverhältniss $-\varrho$ bilden.*

---

*) Dieselbe Gleichung ergibt sich aus der Theorie der typischen Darstellung binärer Formen, vgl. Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen, p. 351.

Durch diesen Satz ist die ganze Klasse von Connexen geometrisch charakterisirt, deren Integralcurven mit dem elliptischen Integrale erster Gattung einer Curve dritter Ordnung in so einfachem Zusammenhange stehen.

VI. Der Connex erster Ordnung und erster Klasse.

Genauer untersucht ist bisher allein der Connex erster Ordnung und erster Klasse, und zwar einerseits in geometrischer Hinsicht (denn derselbe stellt ja eine Collineation dar, vgl. p. 937), andererseits auch vom Standpunkte der Invariantentheorie. Die letztere gibt uns hier neue Gesichtspunkte für die Theorie der Collineationen, die wir schon früher mehr geometrisch betrachteten (p. 250); wir wollen daher im Folgenden besonders die algebraischen Theorien hervorheben.*)

Die Gleichung des gegebenen Connexes sei:

$$(1) \qquad f = a_x u_\alpha = b_x u_\beta = \ldots \Sigma\Sigma a_{ik} u_i x_k = 0\,,$$

wo im Allgemeinen $a_{ik} \gtrless a_{ki}$; die zugehörige Collineation ist dann, wenn $f = \varrho u_y$, durch die Gleichungen gegeben:

$$(2) \qquad \varrho y_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3$$

oder in Liniencoordinaten, indem $f = \sigma v_x$, durch die transponirte Substitution:

$$(3) \qquad \sigma u_i = a_{1i} v_1 + a_{2i} v_2 + a_{3i} v_3\,.$$

Sollen diese Gleichungen eine eigentliche Collineation darstellen, so darf *ihre Determinante* Δ nicht verschwinden; die Determinante ist also jedenfalls eine Invariante des Connexes (1, 1). Indess lässt sich dieselbe noch durch niedrigere Invarianten ausdrücken; setzen wir nämlich:

$$i = a_\alpha\,, \quad i_1 = b_\alpha a_\beta\,, \quad i_2 = b_\alpha a_\gamma c_\beta\,,$$

und berücksichtigen, dass symbolisch:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & a_1\alpha_2 & a_1\alpha_3 \\ b_2\beta_1 & b_2\beta_2 & b_2\beta_3 \\ c_3\gamma_1 & c_3\gamma_2 & c_3\gamma_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 (\alpha\beta\gamma)\,,$$

so folgt, wenn man die Symbolpaare $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ in jeder Weise permutirt und den sechsten Theil der Summe bildet:

$$(4) \qquad \Delta = \tfrac{1}{6}(abc)(\alpha\beta\gamma) = \tfrac{1}{6}\begin{vmatrix} a_\alpha & a_\beta & a_\gamma \\ b_\alpha & b_\beta & b_\gamma \\ c_\alpha & c_\beta & c_\gamma \end{vmatrix} = \frac{i^3 + 2\,i_2 - 3\,i\,i_1}{6}\,.$$

*) Vgl. im Folgenden besonders Clebsch und Gordan: Math. Annalen, Bd. 1, p. 359 ff. Es wird hier auch insbesondere gezeigt, dass die im Texte weiterhin erwähnten Functionalinvarianten das „vollständige System" von f bilden.

Durch die drei hier auftretenden Invarianten i, i_1, i_2 niedrigsten Grades lassen sich aber auch alle anderen Invarianten von f ausdrücken, denn der Connex f hängt nur von zwei absoluten Constanten ab und kann also nur zwei absolute Invarianten, d. h. drei von einander unabhängige Invarianten, zulassen. In der That kann ja f im Allgemeinen auf die kanonische Form gebracht werden (vgl. p. 978):

$$f = \varkappa_1 X_1 U_1 + \varkappa_2 X_2 U_2 + \varkappa_3 X_3 U_3, \tag{5}$$

und in ihr sind nur zwei absolute Constante enthalten.

Wir wollen sogleich noch die drei Invarianten für die kanonische Form (5) bilden; aus ihr ersieht man dann gleichzeitig, dass sie im Allgemeinen von einander unabhängig sind. Es geschieht dies am einfachsten, wenn man zuvor die covarianten Zwischenformen

$$\begin{aligned} f_1 &= \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} = a_x u_\beta b_\alpha, \\ f_2 &= \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f_1}{\partial u_i} = \Sigma \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} = a_x u_\gamma b_\alpha c_\beta \end{aligned} \tag{6}$$

einführt; dann erhält man nämlich für jene Invarianten die nicht symbolischen Bildungsgesetze:

$$i = \Sigma \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial u_i}, \quad i_1 = \Sigma \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial u_i}, \quad i_2 = \Sigma \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i \partial u_i}. \tag{7}$$

In der kanonischen Form aber wird zunächst nach (5) und (6):

$$f_1 = \varkappa_1^2 X_1 U_1 + \varkappa_2^2 X_2 U_2 + \varkappa_3^2 X_3 U_3, \quad f_2 = \varkappa_1^3 X_1 U_1 + \varkappa_2^3 X_2 U_2 + \varkappa_3^2 X_3 U_3 \tag{8}$$

und also nach (7):

$$\begin{gathered} i = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3, \quad i_1 = \varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + \varkappa_3^2, \\ i_2 = \varkappa_1^3 + \varkappa_2^3 + \varkappa_3^3. \end{gathered} \tag{9}$$

Wir kennen sonach drei symmetrische Functionen der Grössen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ und können daher eine cubische Gleichung aufstellen, deren Wurzeln dieselben sind. Man findet nämlich:

$$\varkappa_1 \varkappa_2 + \varkappa_2 \varkappa_3 + \varkappa_3 \varkappa_1 = \frac{i^2 - i_1}{2}, \quad \varkappa_1 \varkappa_2 \varkappa_3 = \frac{i^3 - 3\,i i_1 + 2\,i_2}{6}. \tag{10}$$

Zur Bestimmung von $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ hat man folglich die Gleichung:

$$\varkappa^3 - \varkappa^2 \cdot i + \tfrac{1}{2}(i^2 - i_1)\,\varkappa - \tfrac{1}{6}(i^3 - 3\,i i_1 + 2\,i_2) = 0, \tag{11}$$

welche wir früher in der Form fanden (p. 261):

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \varkappa & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \varkappa & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \varkappa \end{vmatrix} = 0.$$

Nachdem man $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ bestimmt hat, kann man leicht die Transformation herstellen, welche den Connex f in die Form (5) überführt;

man hat eben nur die Producte der X_i, U_i aus den drei Gleichungen (5) und (8) zu berechnen. Bezeichnet man die Determinante dieser drei Gleichungen mit K, so ergibt sich:

$$(12) \quad \begin{aligned} K \,.\, U_1 X_1 &= (\varkappa_2 - \varkappa_3) \left\{ (\varkappa_2 + \varkappa_3) f - \varkappa_2 \varkappa_3 u_x - f_1 \right\} \\ K \,.\, U_2 X_2 &= (\varkappa_3 - \varkappa_1) \left\{ (\varkappa_3 + \varkappa_1) f - \varkappa_3 \varkappa_1 u_x - f_1 \right\} \\ K \,.\, U_3 X_3 &= (\varkappa_1 - \varkappa_2) \left\{ (\varkappa_1 + \varkappa_2) f - \varkappa_1 \varkappa_2 u_x - f_1 \right\}, \end{aligned}$$

wo also:

$$K = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \varkappa_1 & \varkappa_2 & \varkappa_3 \\ \varkappa_1^2 & \varkappa_2^2 & \varkappa_3^2 \end{vmatrix} = (\varkappa_2 - \varkappa_3)(\varkappa_3 - \varkappa_1)(\varkappa_1 - \varkappa_2).$$

Die Gleichungen (12) bestimmen die gesuchten Substitutionscoëfficienten mit Hülfe der Wurzeln von (11), soweit dies hier überhaupt möglich und nöthig ist; soweit nämlich, dass nur noch alle Coëfficienten desselben X_i mit einem beliebigen gemeinsamen Factor behaftet werden können, welcher dann bei den Coëfficienten von U_i reciprok auftritt.

Die gemeinsamen Elemente der drei hier auftretenden Connexe $f = 0$, $f_1 = 0$, $u_x = 0$ bilden unseren allgemeinen Erörterungen zufolge ein Curvenpaar dritter Ordnung und dritter Klasse (p. 941), dessen Ordnungs- und Klassencurve bez. durch die Gleichungen gegeben wird:

$$(13) \quad \begin{aligned} \varphi &\equiv (\alpha\beta x)\, a_x c_x b_\gamma \equiv \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \frac{\partial u_x}{\partial u_3} = 0 \\ \psi &\equiv (a b u)\, u_\alpha u_\gamma b_\gamma \equiv \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_x}{\partial x_3} = 0. \end{aligned}$$

Für die kanonische Form ergibt sich hieraus, wenn r die Determinante der Substitution (12) bezeichnet, welche hier wegen der Klammerfactoren $(\alpha\beta x)$ bez. $(a b u)$ hinzuzufügen ist:

$$\varphi = r \,.\, \begin{vmatrix} \varkappa_1 X_1 & \varkappa_2 X_2 & \varkappa_3 X_3 \\ \varkappa_1^2 X_1 & \varkappa_2^2 X_2 & \varkappa_3^2 X_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{vmatrix} = r \,.\, X_1 X_2 X_3 (\varkappa_2 - \varkappa_3)(\varkappa_3 - \varkappa_1)(\varkappa_1 - \varkappa_2).$$

und ebenso:

$$\psi = r \,.\, U_1 U_2 U_3 (\varkappa_2 - \varkappa_3)(\varkappa_3 - \varkappa_1)(\varkappa_1 - \varkappa_2).$$

Jede der cubischen Formen φ, ψ zerfällt also in drei lineare Factoren, welche bez. die Seiten und Ecken des Fundamentaldreiecks darstellen. Die Zerlegung dieser Formen in ihre Factoren (p. 597) ist also durch die Transformation (12) schon mit gegeben.

Die geometrische Bedeutung des Connexes $f_1 = 0$ ist aus der kanonischen Form sofort ersichtlich, *er stellt diejenige Collineation dar,*

welche man durch zweimalige Anwendung der Collineation $f = 0$ erhält; und man bestätigt dies auch leicht direct. Ebenso entsteht die Collineation des in (6) und (8) vorkommenden Connexes $f_2 = 0$ durch dreimalige Anwendung der Collineation $f = 0$, u. s. f. Allgemein ist die durch $(h+1)$-malige Anwendung von $f = 0$ erhaltene Collineation gegeben durch den Connex:

$$(14) \qquad f_h = \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f_{h-1}}{\partial u_i} = \Sigma \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial f_{h-1}}{\partial x_i} = 0.$$

Es ist aber zu bemerken, dass sich alle so entstehenden Formen f_h linear durch die Formen f, f_1 und u_x ausdrücken lassen. In der That beziehen sich ja alle Collineationen $f_h = 0$ auf dasselbe Fundamentaldreieck; da aber alle zu demselben Dreiecke gehörigen Collineationen nur eine zweifach unendliche Schaar bilden, so müssen sie sämmtlich in der Form

$$f + \varkappa f_1 + \lambda u_x = 0$$

darstellbar sein. Um dies auch durch die Rechnung zu bestätigen, nimmt man am besten eine andere Zwischenform zu Hülfe:

$$(15) \qquad g = (abu)(\alpha\beta x),$$

welche, wie uns schon bekannt ist, gleich Null gesetzt, den zu $f = 0$ conjugirten Connex darstellt (p. 950), und auf deren geometrische Bedeutung wir sogleich zurückkommen. *Auch diese Form g ist durch f, f_1 und u_x ausdrückbar,* denn wir haben direct:

$$(16) \quad g = (abu)(\alpha\beta x) = \begin{vmatrix} a_\alpha & a_\beta & a_x \\ b_\alpha & b_\beta & b_x \\ u_\alpha & u_\beta & u_x \end{vmatrix} = (i^2 - i_1) u_x - 2if + 2f_1.$$

Nun ist weiter:

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} = (abu)(\alpha\beta\gamma) c_x = \tfrac{1}{3} (\alpha\beta\gamma) \{(abu) c_x - (acu) b_x - (cbu) a_x\}$$
$$= \tfrac{1}{3} (\alpha\beta\gamma)(abc) u_x;$$

und bildet man dieselbe Form aus der rechten Seite von (16), so ergibt sich in Rücksicht auf (4) für f_2 die Identität:

$$\tfrac{1}{3} (i^3 + 2i_2 - 3ii_1) u_x = (i^2 - i_1) f - 2if_1 + 2f_2.$$

Ebenso findet man dann hieraus durch Wiederholung desselben Processes:

$$\tfrac{1}{3} (i^3 + 2i_2 - 3ii_1) f = (i^2 - i_1) f_1 - 2if_2 + 2f_3,$$
$$\tfrac{1}{3} (i^3 + 2i_2 - 3ii_1) f_1 = (i^2 - i_1) f_2 - 2if_3 + 2f_4,$$

u. s. f., woraus man jede Form f_h in Function aller vorhergehenden Formen berechnen kann.

Der Reihe von Connexen $f_h = 0$ stellt sich eine Reihe von Connexen $g_h = 0$ an die Seite, welche aus g ebenso zu bilden sind, wie f_h aus f, so dass:

$$g_{h+1} = \Sigma \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial g_h}{\partial u_i} = \Sigma \frac{\partial g}{\partial u_i} \frac{\partial g_h}{\partial x_i}.$$

Ihre geometrische Bedeutung ist ebenfalls leicht zu erkennen. *Der Connex $g = 0$ zunächst gibt die zu $f = 0$ inverse Transformation*, welche, bezogen auf das Fundamentaldreieck, in der Form $\sigma Y_1 = \varkappa_2 \varkappa_3 X_1$, etc. erscheint. In der That erhält man auch für die kanonische Form aus der Identität (16) vermöge (8), (9) und (10) für g den Werth:

$$\tfrac{1}{2} g = \varkappa_2 \varkappa_3 U_1 X_1 + \varkappa_3 \varkappa_1 U_2 X_2 + \varkappa_1 \varkappa_2 U_3 X_3 .$$

Und hieraus findet man weiter:

$$\tfrac{1}{2} g_h = (\varkappa_2 \varkappa_3)^{h+1} U_1 X_1 + (\varkappa_3 \varkappa_1)^{h+1} U_2 X_2 + (\varkappa_1 \varkappa_2)^{h+1} U_3 X_3 .$$

Die Connexe $g_h = 0$ stellen also bez. die inversen Transformationen zu den Transformationen $f_h = 0$ dar.

Aus einem Punkte x erhalten wir durch alle diese Collineationen eine Reihe von discreten Punkten, welche vorwärts und rückwärts beliebig fortgesetzt werden kann. Indem wir den Punkt x selbst durch die Zahl 0 bezeichnen, können wir die Punkte auf der einen Seite von x durch die Zahlen 1, 2, 3 . . ., die auf der andern durch — 1, — 2, — 3, . . . unterscheiden, so dass ihnen bez. die folgenden darunter stehenden Gleichungen entsprechen:

$$(17) \qquad \begin{matrix} \ldots(-2), & (-1), & 0, & 1, & 2, \ldots \\ \ldots g_1 = 0, & g = 0, & u_x = 0, & f = 0, & f_1 = 0, \ldots; \end{matrix}$$

und der Punkt λ hat dann in der kanonischen Form die Gleichung:

$$(18) \qquad \varkappa_1^\lambda U_1 X_1 + \varkappa_2^\lambda U_2 X_2 + \varkappa_3^\lambda U_3 X_3 = 0 .$$

Jede solche Gleichung wird aber zugleich die Gleichung eines collinearen Systems, welches unmittelbar von dem Punkte 0 auf den Punkt λ führt. So entspricht also der Punktreihe (17) die Reihe (18) von collinearen Systemen.

Von besonderem Interesse wird für uns der Umstand, dass *alle Punkte der Reihe auf einer (im Allgemeinen transscendenten) Curve liegen, welche sich durch Elimination von ϱ und λ aus den Gleichungen:*

$$(18^*) \qquad \varrho Y_1 = \varkappa_1^\lambda X_1, \quad \varrho Y_2 = \varkappa_2^\lambda X_2, \quad \varrho Y_3 = \varkappa_3^\lambda X_3$$

ergibt, nämlich:

$$(19) \quad \log \frac{Y_1}{X_1} . \log \frac{\varkappa_2}{\varkappa_3} + \log \frac{Y_2}{X_2} . \log \frac{\varkappa_3}{\varkappa_1} + \log \frac{Y_3}{X_3} . \log \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} = 0 ,$$

oder wenn wir unter C einen Parameter (Integrationsconstante) verstehen und

$$k_1 = \log \frac{\varkappa_2}{\varkappa_3}, \quad k_2 = \log \frac{\varkappa_3}{\varkappa_1}, \quad k_3 = \log \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}$$

setzen:

$$X_1^{k_1} X_2^{k_2} X_3^{k_3} = C,$$

wobei $k_1 + k_2 + k_3 = 0$. Diese Gleichung ist von derselben Form wie die der Hauptcoincidenzcurven von $f = 0$ (vgl. p. 979):

$$X_1^{\varkappa_2 - \varkappa_3} X_2^{\varkappa_3 - \varkappa_1} X_3^{\varkappa_1 - \varkappa_2} = C. \tag{20}$$

Dem Connexe $f = 0$ und gleichzeitig allen Connexen $f_h = 0$ oder $g_h = 0$, d. i. allen Connexen der durch (18) *dargestellten Schaar, ist so ein gewisser Connex:*

$$U_1 X_1 \log \varkappa_1 + U_2 X_2 \log \varkappa_2 + U_3 X_3 \log \varkappa_3 = 0$$

zugeordnet, dessen Hauptcoincidenzcurven die Curven (19) *liefern, auf welchen alle Punkte einer der obigen Reihen liegen.*

Die Curven (19) sind von ebenso allgemeiner Natur wie die Curven (20), und umgekehrt; die ersteren eignen sich aber, wie wir weiterhin sehen werden, besser zum Studium der Hauptcoincidenzcurven, da sich deren wesentliche Eigenschaften aus der Entstehungsweise der Gleichung (19) direct ergeben.

Die Curven (19) sind insbesondere algebraisch, wenn die Grössen $\log \frac{\varkappa_i}{\varkappa_k}$ sich wie positive oder negative ganze Zahlen verhalten. Ist dies nicht der Fall, so kann man sich doch die Frage stellen, unter welchen Umständen gewisse Punkte der Reihe auf einer *algebraischen* Curve liegen? Durch diese Forderung wird man dann zu einer bestimmten Invariantenrelation für den Connex $f = 0$ geführt, wie hier an einigen Beispielen erläutert werden möge.*)

Dass die Punkte 0, 1, 2 auf einer Geraden liegen sollen, kann man im Allgemeinen nicht verlangen, denn dann würden alle Punkte der aus 0 entstehenden Reihe auf derselben Geraden liegen. In der That würde ja dann auch die oben mit K bezeichnete Determinante verschwinden müssen, und folglich die Gleichung (11) zwei gleiche Wurzeln haben, was wir vorläufig ausgeschlossen haben.

Sollen dagegen die Punkte 0, 1, 3 auf einer Geraden liegen, so muss die Gleichung bestehen:

$$\begin{vmatrix} 1 & \varkappa_1 & \varkappa_1^3 \\ 1 & \varkappa_2 & \varkappa_2^3 \\ 1 & \varkappa_3 & \varkappa_3^3 \end{vmatrix} = 0.$$

*) In Betreff einer allgemeinen Erledigung der sich hier bietenden Probleme vgl. Clebsch und Gordan a. a. O.

Die linke Seite ist offenbar durch die Determinante K theilbar; der übrig bleibende Factor ist linear und symmetrisch in $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, also zu der Summe $\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3$ proportional. *Die Bedingung dafür, dass die Punkte* 0, 1, 3 *auf einer Geraden liegen, ist somit:*

$$(21) \qquad i = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 = 0\,.^{*)}$$

Selbstverständlich liegen dann auch der r^{te}, $(r+1)^{\text{te}}$ und $(r+3)^{\text{te}}$ Punkt auf einer Geraden, wo r eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet. In ähnlicher Weise findet man, wenn die Punkte 0, 1, 4 auf einer Geraden liegen sollen, die Invariantenrelation:

$$\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + \varkappa_3^2 + \varkappa_2\varkappa_3 + \varkappa_3\varkappa_1 + \varkappa_1\varkappa_2 = \tfrac{1}{2}(i^2 + i_1) = 0, \quad \text{u. s. f.}$$

Fordert man dagegen, dass die Punkte 0, 1, 2, 3, 4, 5 auf einem Kegelschnitte liegen, so müssen offenbar auch *alle* Punkte der aus Null entstehenden Reihe auf demselben Kegelschnitte liegen, d. h. die Curven (20) müssen in diesem Falle aus einem Systeme von Kegelschnitten bestehen; und die Bedingung dafür ist:

$$\begin{array}{llll} & k_1 = k_2 = 1\,, & k_3 = -2\,, & \text{also:}\quad \varkappa_1\varkappa_2 - \varkappa_3^2 = 0 \\ \text{oder:} & k_2 = k_3 = 1\,, & k_1 = -2\,, & \quad ,, \qquad \varkappa_2\varkappa_3 - \varkappa_1^2 = 0 \\ \quad ,, & k_3 = k_1 = 1\,, & k_2 = -2\,, & \quad ,, \qquad \varkappa_3\varkappa_1 - \varkappa_2^2 = 0\,. \end{array}$$

Die entsprechende Invariantenrelation verlangt somit das Verschwinden des Ausdrucks:

$$(\varkappa_2\varkappa_3 - \varkappa_1^2)(\varkappa_3\varkappa_1 - \varkappa_2^2)(\varkappa_1\varkappa_2 - \varkappa_3^2)$$
$$= (\varkappa_2\varkappa_3 + \varkappa_3\varkappa_1 + \varkappa_1\varkappa_2)^3 - (\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3)^3\,\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3\,,$$

woraus wegen (9) und (10) folgt: *Die Curven* (19) *bestehen aus einem Büschel von Kegelschnitten der Form* $x_i x_k - C x_l^2 = 0$, *sobald:***)

$$(22) \qquad 3(i^2 - i_1)^3 - i^3(i^3 - 3\,i i_1 + 2\,i_2) = 0\,.$$

Die *Hauptcoincidenzcurven* von $f = 0$ bleiben jedoch in diesem Falle im Allgemeinen transscendent. *Sollen dagegen die letzteren aus Kegelschnitten bestehen, so muss sein:*

---

*) Wenn man den Begriff von Polarconnexen einführt (d. i. Connexen der Form $a_x^{m-\varkappa} a_y^{\varkappa} u_\alpha^{n-\lambda} v_\alpha^{\lambda} = 0$), so kann man mit Hülfe dieser Invariantenrelation auch solchen algebraischen Bildungen eine Deutung geben, deren geometrischer Sinn durch die Polarentheorie der Curven oder durch das Uebertragungsprincip nicht unmittelbar gegeben wird (p. 316); doch ist dies praktisch meist von wenig Nutzen, und soll deshalb nicht weiter ausgeführt werden. Immerhin kann man sich so z. B. die Bedeutung der simultanen Invarianten zweier Kegelschnitte ableiten (p. 295).

**) Dieser Fall der Collineation ist für die sogenannte Nicht-Euclidische Geometrie von besonderem Interesse, vgl. den auf p. 151 genannten Aufsatz von Klein, Math. Annalen, Bd. 4.

$$(\varkappa_1 + \varkappa_2 - 2\varkappa_3)(\varkappa_2 + \varkappa_3 - 2\varkappa_1)(\varkappa_3 + \varkappa_1 - 2\varkappa_2) = 0$$

oder:

$$(23) \qquad 2i^3 - 9ii_1 + i_2 = 0.$$

Unter den in (19) enthaltenen Curven sei noch die *logarithmische Spirale* besonders hervorgehoben; ihr Auftreten ist nicht durch eine Invarianteneigenschaft des Connexes bedingt, sondern durch besondere Lage zweier Ecken des Fundamentaldreiecks in metrischer Beziehung; für die projectivische Geometrie kann sie also als Repräsentant der allgemeinen Integralcurven des Connexes (1, 1) betrachtet werden. Lässt man nämlich zwei Ecken des Fundamentaldreiecks in die beiden imaginären Kreispunkte fallen*) und führt sodann Polar-Coordinaten ein mittelst der Substitution:

$$X_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad X_2 = r(\cos\varphi - i\sin\varphi), \quad X_3 = 1,$$

so wird, wenn man endlich noch $k_1 = p + iq$, $k_2 = -p + iq$ voraussetzt, die Gleichung der Curven (19):

$$r^{2iq}e^{2\varphi p i} = C$$

oder, wenn γ und ϱ neue Constanten bezeichnen:

$$r = \gamma e^{\varrho\varphi},$$

in der That die Gleichung eines Systems von logarithmischen Spiralen mit dem Parameter γ. —

Zu fruchtbringenden Gesichtspunkten für die Untersuchung der Curvensysteme (19) und (20) werden wir nun geführt, wenn wir in der Connex-Schaar (18) dem Parameter λ nicht mehr ganzzahlige Werthe beilegen, sondern ihn als einen *continuirlich* veränderlichen Parameter auffassen. Auch dann stellt jeder Connex (18) eine Collineation dar, freilich nicht immer eine solche, die durch endlichmalige Wiederholung der Transformation $f = 0$ oder $g = 0$ erzeugt werden kann. Für das System der Connexe (18) oder Transformationen (18*) bleiben auch dann folgende beiden Sätze gültig:

Zwei beliebige Transformationen des Systems geben, hinter einander angewandt, unabhängig von ihrer Reihenfolge dieselbe neue Transformation. — Diese neue Transformation ist selbst eine Transformation des Systems.

Mit Rücksicht auf die erste Eigenschaft sollen die Transformationen des Systems *vertauschbar*, mit Rücksicht auf die zweite soll das System *geschlossen* genannt werden. Wir haben es demnach hier mit einem *geschlossenen Systeme von einfach unendlich vielen, vertauschbaren,*

*) Es bleiben dann bei der Transformation alle Winkel erhalten; man hat eine „*Aehnlichkeitstransformation*". In Rücksicht hierauf ergeben sich leicht mit Hülfe der weiterhin erwähnten Schlussweise die zahlreichen metrischen Eigenschaften der logarithmischen Spirale; vgl. Holzmüller: Schlömilch's Zeitschrift, Bd. 16.

linearen Transformationen zu thun.*) Und zwar sind dies die einzigen Transformationen der Art, die es gibt; in der That führt die directe Aufsuchung derselben zu einer Differentialgleichung (24), die wir sogleich aufstellen werden, und deren Integration nur die Transformationen (18*) gibt.

In dem Systeme ist nun besonders eine Transformation enthalten, welche entsteht, wenn man λ unendlich klein, also etwa gleich $d\lambda$, nimmt, und die wir als die *unendlich kleine* Transformation des Systems bezeichnen wollen. Sie ordnet jedem Punkte X einen benachbarten Punkt $Y = X + dX$ zu, der nach (18*) bestimmt ist durch die Gleichungen:

$$\sigma\, dX_i = X_i \,.\, \log \varkappa_i\,, \tag{24}$$

wo die Grösse $d\lambda$ in σ enthalten sein mag. Für diese Transformation fällt offenbar die zu X gehörige Richtung der Hauptcoincidenz mit der Tangente der durch X gehenden Curve (19) zusammen. Der für $\lambda = d\lambda$ aus (18) resultirende Connex ist also *derjenige, dessen Hauptcoincidenzcurven durch die Curven* (19) *gegeben werden;* in der That ist die Gleichung desselben ja wieder $\Sigma U_i X_i \log \varkappa_i = 0$.

Es ist evident, dass man jede Transformation des Systems durch unendlich-malige Wiederholung dieser unendlich-kleinen Transformation erzeugen kann. Alle einem Punkte X entsprechenden Punkte werden dabei eine bestimmte Curve beschreiben; diese hat ihrer Entstehung nach die Eigenschaft, dass jeder Punkt derselben durch eine Transformation (24) wieder in einen ihrer Punkte (und zwar einen benachbarten) übergeht. Auch wenn man die unendlich kleine Transformation unendlich oft wiederholt, bleibt daher der Punkt X immer auf derselben Curve; d. h. die letztere geht durch jede der Transformationen unseres Systems in sich über. Ihre Gleichung ergibt sich sonach wieder durch Elimination von λ aus (18*), d. h. sie ist durch (19) gegeben, wie man auch durch Integration der Differentialgleichung (24) bestätigt.

Jede Integralcurve eines Connexes (1, 1) *hat also die Eigenschaft durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich überzugehen, und zwar durch die Transformationen $\varrho Y_i = \varkappa_i^\lambda X_i$, wenn der Connex in der Form $\Sigma U_i X_i \log \varkappa_i = 0$ gegeben ist.***)

*) Vgl. im Folgenden Klein und Lie: Sur une certaine famille de courbes et de surfaces, Comptes rendus: 6. und 13. Juni 1870, und: Ueber diejenigen ebenen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen. Math. Annalen, Bd. 4.

**) Diese Curven bestehen nach einem bekannten Satze der Kinematik aus Kreisen, wenn die Transformation mit einer Bewegung der Ebene in sich äquivalent

Aus dieser Eigenschaft lässt sich mit Leichtigkeit eine grosse Zahl anderer ableiten. Die dabei zu benutzende einfache Schlussweise möge an einem Beispiele erläutert werden. Denken wir uns mehrere demselben Systeme (20) angehörige Curven gegeben und an eine derselben eine Tangente gezogen. Bei Anwendung der zugehörigen linearen Transformationen bleiben die Curven selbst ungeändert, während die Tangente nach und nach die Lage jeder anderen Tangente derselben Curve annimmt. Dabei gehen der Berührungspunkt mit der einen Curve und die Schnittpunkte mit den anderen bez. in den Berührungspunkt und die Schnittpunkte der neuen Tangente mit denselben Curven über; daher der Satz, dass *die Schnittpunkte mit dem Berührungspunkte eine Punktreihe bilden, welche, für beliebige Lagen der Tangente an derselben Curve, immer derselben Punktreihe projectivisch ist.* — Als Corollar folgt, da die drei Seiten des Fundamentaldreiecks auch immer als Curven des Systems zu betrachten sind, der Satz: *Das Doppelverhältniss des Berührungspunktes einer Tangente einer Curve* (20) *und ihrer drei Schnittpunkte mit den Seiten des Fundamentaldreiecks ist constant.* Die hierin ausgesprochene Eigenschaft könnte man auch umgekehrt zur Definition des Curvensystems benutzen.

Durch ein analoges Verfahren leitet man ferner die folgenden Sätze ab, deren Anführung genügen möge, um die Fruchtbarkeit der erwähnten, auch sonst oft anwendbaren Methode zu zeigen:*)

Man schneide eine Curve des Systems durch irgend eine gerade Linie und construire in beliebigen n ihrer Schnittpunkte die Tangenten; von den weiteren Schnittpunkten dieser n Tangenten liegen dann jedesmal n wieder auf einer Geraden.

Curven des Systems können sich nur in Eckpunkten des Fundamentaldreiecks schneiden.

Sie besitzen in keinem ihrer Punkte, ausser etwa in den drei Fundamentalpunkten, irgend eine solche Singularität, wie sie bei algebraischen Curven vorkommt.

---

ist. In der That liegen dann zwei Ecken des Fundamentaldreiecks in den Kreispunkten, die dritte beliebig in der Ebene; letztere bleibt also fest, und folglich ist die Bewegung durch eine Rotation um sie zu ersetzen. Diese geht insbesondere in eine Translation über, wenn das Centrum der Rotation unendlich weit liegt. Die zahlreichen Untersuchungen über kinematische Geometrie sind so den Untersuchungen über die im Texte betrachteten Transformationen untergeordnet und können daher sofort projectivisch verallgemeinert werden, indem man die specielle Collineation der Bewegung immer durch eine allgemeine Collineation ersetzt. Vgl. darüber: Burmester: Kinematisch geometrische Untersuchungen der Bewegung affin-veränderlicher und collinear-veränderlicher Systeme, Schlömilch's Zeitschrift, Bd. 19 und 20. Vgl. auch die Anmerkung auf p. 262. — Die Curven (19) werden von Burmester passend als *Selbsthüllcurven* bezeichnet.

*) Wegen weiterer Ausführungen vgl. Klein und Lie a. a. O.

Jede zu ihnen covariante Curve ist eine Curve desselben Systems (denn sie muss durch dieselben Transformationen in sich übergehen).

Wenn man auf eine beliebige Curve, die nur nicht selbst einem Systeme von Curven (20) mit demselben Fundamentaldreiecke angehört, die Transformationen unseres geschlossenen Systems anwendet, so besteht die Umhüllungscurve der dadurch erzeugten Curvenreihe aus lauter Curven des gegebenen Systems. —

Es sollen im Folgenden noch kurz die Ausnahmefälle angedeutet werden, welche dadurch eintreten, dass zwei oder drei Wurzeln der cubischen Gleichung (11) einander gleich werden.*)

1) Ist $\varkappa_2 = \varkappa_3$, so fallen zwei Seiten des Fundamentaldreiecks zusammen, während die dritte ($X_1 = 0$) davon getrennt bleibt. Es ist daher für die Collineation jedenfalls die kanonische Form möglich:

$$\begin{aligned} \varrho Y_1 &= \varkappa_1 X_1, \quad \varrho Y_2 = \varkappa_2 X_2, \\ \varrho Y_3 &= \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3 . \end{aligned} \tag{25}$$

Bildet man dann aber jene cubische Gleichung in der Form:

$$\begin{vmatrix} \varkappa_1 - \varkappa & 0 & 0 \\ 0 & \varkappa_2 - \varkappa & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma - \varkappa \end{vmatrix} = 0,$$

so erkennt man, dass $\gamma = \varkappa_2$ sein muss. Setzt man nun noch:

$$Y_3 + \frac{\alpha}{\varkappa_1 - \varkappa_2} Y_1 \quad \text{für} \quad Y_3 \quad \text{und} \quad X_3 + \frac{\beta}{\varkappa_1 - \varkappa_2} X_1 \quad \text{für} \quad X_3,$$

so gehen die Gleichungen (25) über in:

$$\varrho Y_1 = \varkappa_1 X_1, \quad \varrho Y_2 = \varkappa_2 X_2, \quad \varrho Y_3 = \beta X_2 + \varkappa_2 X_3, \tag{26}$$

und *der Connex $f = 0$ erscheint in der kanonischen Form:*

$$f = \varkappa_1 X_1 U_1 + \varkappa_2 (X_2 U_2 + X_3 U_3) + \beta X_2 U_3 .$$

Zwei Ecken des Fundamentaldreiecks sind hier in den Punkt $U_3 = 0$ zusammengefallen; der Punkt $U_1 = 0$ dagegen ist der Schnittpunkt der beiden benachbart liegenden Seiten des Dreiecks.

Durch λ-malige Wiederholung der Transformation erhält man an Stelle von (18*) die Gleichungen:

$$\varrho Y_1 = \varkappa_1^\lambda X_1, \quad \varrho Y_2 = \varkappa_2^\lambda X_2, \quad \varrho Y_3 = \varkappa_2^\lambda X_3 + \lambda \beta \varkappa_2^{\lambda - 1} X_2, \tag{27}$$

und durch Elimination von λ findet man an Stelle von (19) die Gleichung:

$$\varkappa_2 (Y_3 X_2 - Y_2 X_3) \log \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} - \left(\log \frac{Y_1}{X_1} - \log \frac{Y_2}{X_2}\right) \beta Y_2 X_2 = 0 .$$

*) Vgl. Clebsch und Gordan a. a. O., sowie die geometrische Discussion dieser Fälle bei Hirst in den auf p. 944 genannten Aufsätzen.

Für $Y_2 = X_2 = 1$, $X_1 = x$, $X_3 = y$ erhält man also insbesondere die *logarithmische Linie:* $y = A \log Bx$, wo A, B Constante bedeuten. — Die Gleichung der Hauptcoincidenzcurven von $f = 0$ findet man dagegen in der Form:

$$(\varkappa_1 - \varkappa_2)\frac{x_3}{x_2} + \beta \log \frac{x_2}{x_1} = C.$$

2) In dem Falle, wo ausserdem $\beta = 0$ wird, geben die Gleichungen (26):

$$Y_1 X_2 - Y_2 X_1 = 0;$$

wir haben eine *perspectivische Transformation*, die schon früher eingehend behandelt wurde (p. 264). Man kann dieselbe algebraisch dadurch charakterisiren, dass die Formen φ und ψ identisch Null sind. — Alle Curven (28) bestehen aus Geraden durch das Collineationscentrum.

3) Wenn alle drei Wurzeln der cubischen Gleichung einander gleich werden, so kann man für die entsprechende Collineation nur noch *eine* Gleichung in der Form

$$\varrho Y_1 = \varkappa X_1 \tag{28}$$

annehmen; die beiden anderen hat man zunächst in der Form:

$$(29) \qquad \begin{aligned} \varrho Y_2 &= a X_1 + (b + \varkappa) X_2 + c X_3 \\ \varrho Y_3 &= \alpha X_1 + \beta X_2 \qquad + (\gamma + \varkappa) X_3 . \end{aligned}$$

Damit jetzt aber die in z cubische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \varkappa - z & 0 & 0 \\ a & b + \varkappa - z & c \\ \alpha & \beta & c + \varkappa - z \end{vmatrix} = 0$$

die Wurzel $z = \varkappa$ dreimal zulasse, muss man haben:

$$b + \gamma = 0, \quad b\gamma - c\beta = 0. \tag{30}$$

Diese Gleichungen werden identisch erfüllt, wenn man

$$c = \mu^2, \quad \beta = -\nu^2, \quad b = \mu\nu, \quad \gamma = -\mu\nu$$

setzt; und dadurch verwandeln sich die Gleichungen (29) in:

$$\begin{aligned} \varrho Y_2 &= a X_1 + \varkappa X_2 + \mu(\nu X_2 + \mu X_3) \\ \varrho Y_3 &= \alpha X_1 + \varkappa X_3 - \nu(\nu X_2 + \mu X_3) . \end{aligned}$$

Hieraus aber ergibt sich:

$$\varrho(\nu Y_2 + \mu Y_3) = (a\nu + \alpha\mu) X_1 + \varkappa(\nu X_2 + \mu X_3) .$$

Setzt man also jetzt wieder Y_2 für $\nu Y_2 + \mu Y_3$, und X_2 für $\nu X_2 + \mu X_3$, so erhält man eine Gleichung der Form

$$\varrho Y_2 = a X_1 + \varkappa X_2 , \tag{31}$$

welche aus den Gleichungen (29) immer abgeleitet werden kann. Man darf daher annehmen, dass eine der Gleichungen (29) die Form (31) bereits habe, d. h. dass $b = c = 0$. Die Gleichungen (30) geben dann $\gamma = 0$, während β beliebig bleibt. Die dritte Gleichung (29) wird also:

$$(32) \qquad \varrho Y_3 = \alpha X_1 + \beta X_2 + \varkappa X_3 .$$

Verändert man nun noch Y_3 und X_3, indem man statt derselben bez. $Y_3 - \frac{\alpha}{a} Y_2$, $X_3 - \frac{\alpha}{a} X_2$ setzt, so fällt in (32) noch das Glied mit X_1 fort; und es bleibt:

$$(33) \qquad \varrho Y_3 = \beta X_2 + \varkappa X_3 ,$$

wo man noch, ohne die Allgemeinheit zu stören, $\beta = a$ nehmen kann.

Aus (28), (31), (33) findet man also *die Gleichung des Connexes in der kanonischen Form:*

$$f = \varkappa (U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3) + a (X_1 U_2 + X_2 U_3) = 0 .$$

Für die Hauptcoincidenzcurven hat man hier wegen $U_X = 0$ einfach die Differentialgleichung:

$$X_1 (X_3 d X_1 - X_1 d X_3) + X_2 (X_1 d X_2 - X_2 d X_1) = 0 ,$$

woraus sich durch Integration ergibt:

$$C X_1^2 + X_2^2 - 2 X_1 X_3 = 0 ,$$

wenn C die Integrationsconstante bedeutet. *Die Integralcurven bilden also einen Büschel von Kegelschnitten, welche sich sämmtlich in einem Punkte dreipunktig berühren* (vgl. p. 141); und zwar ist der Berührungspunkt der Punkt $U_3 = 0$, in welchen die Ecken des Dreiecks zusammengerückt sind; die gemeinsame Tangente in ihm ist die dreifach zählende Dreiecksseite.

Ein ebensolches System von Kegelschnitten ergibt sich für die Curven, welche durch die Collineation (32) in sich übergeführt werden. In der That erhält man nach λ-maliger Wiederholung der Transformation die Formeln:

$$\varrho Y_1 = \varkappa^\lambda X_1 , \quad \varrho Y_2 = \varkappa^\lambda X_2 + a \varkappa^{\lambda - 1} X_1$$
$$\varrho Y_3 = \varkappa^\lambda X_3 + a \varkappa^{\lambda - 1} X_2 + \tfrac{1}{2} \lambda (\lambda - 1) a^2 \varkappa^{\lambda - 2} X_1 ;$$

oder wenn man auf beiden Seiten mit $\varkappa^{\lambda - 2}$ dividirt:

$$\varrho Y_1 = \varkappa^2 X_1 , \quad \varrho Y_2 = \varkappa^2 X_2 + \lambda a \varkappa X_1$$
$$\varrho Y_3 = \varkappa^2 X_3 + \lambda a \varkappa X_2 + \tfrac{1}{2} \lambda (\lambda - 1) a^2 X_1 .$$

Diese Gleichungen stellen aber eben die Coordinaten Y der Punkte einer solchen Curve in Function eines Parameters $\varkappa$ dar.

4) In Gleichung (31) und (32) kann noch eine der Constanten a, β verschwinden. Nehmen wir $\beta = 0$, so haben wir die Collineation:

$$(34) \qquad \varrho Y_1 = \varkappa X_1 , \quad \varrho Y_2 = \varkappa X_2 + a X_1 , \quad \varrho Y_3 = \varkappa X_3 .$$

Es folgt $Y_1 X_3 - X_1 Y_3 = 0$; die beiden Punktsysteme, Y und X sind also perspectivisch; das Collineationscentrum liegt im Punkte $X_1 = 0$, $X_3 = 0$, die Collineationsaxe*) geht durch diesen Punkt. Die oben betrachteten Curven sind die Geraden des Büschels $X_1 + \lambda X_3$.

5) Verschwinden endlich in (31), (33) gleichzeitig α und β, so hat man identische Punktsysteme, deren entsprechende Punkte immer zusammenfallen.

VII. Ueber die Connexe $(m, 1)$ oder $(1, n)$, insbesondere für den Fall $n = 2$.

Einige unserer allgemeinen Untersuchungen über die Connexe (m, n) verlangen eine besondere Betrachtung, wenn eine der Zahlen m, n gleich 1 wird. Schon beim conjugirten Connexe hatten wir Gelegenheit dies zu bemerken (p. 950); ein Element (y, v) des letzteren ist für $n = 1$ dadurch definirt, dass v gemeinsame Tangente für *alle* Curven C_m sei, welche zu den durch y gehenden Linien u gehören, und dualistisch entsprechend für $m = 1$ dadurch, dass y gemeinsamer Punkt *aller* Curven K_n sei, welche den Punkten x von v im Connexe $f = 0$ zugehören. Für den Fall $m = 1$, auf den wir uns im Folgenden beschränken, tritt ferner die Besonderheit ein, dass die oben mit $F' = 0$, $\Phi' = 0$ bezeichneten Curven nicht existiren, denn da eine beliebige Linie u nur mit *einem* ihrer Punkte ein Element der Hauptcoincidenz bildet, kann von einem Zusammenfallen zweier solchen Punkte von u nicht mehr die Rede sein. Statt dessen treten hier im Allgemeinen Linien u auf, welche durch *jeden* ihrer Punkte zu einem Elemente der Hauptcoincidenz ergänzt werden, ein Umstand, der für $n > 1$, $m > 1$ nur in besonderen Fällen als Singularität vorkommen kann (vgl. p. 937). Für $m = 1$ nämlich können wir setzen:

$$f = A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3\,,$$

wo A_1, A_2, A_3 Functionen n^{ter} Klasse in den u_i sind. Hier wird die Linie u in der Weise ausgezeichnet sein, sobald die Gleichung $f = 0$ für $x_i = (uv)_i$ unabhängig von den v_i erfüllt ist, d. h. wenn gleichzeitig:

$$A_1 u_2 - A_2 u_1 = 0\,, \quad A_2 u_3 - A_3 u_2 = 0\,, \quad A_3 u_1 - A_1 u_3 = 0\,.$$

Diese Gleichungen erlauben nach bekannten Regeln (p. 389) $n^2 + n + 1$ gemeinsame Lösungen, und somit haben wir den Satz:

In einem Connexe $(1, n)$ *gibt es* $n^2 + n + 1$ *Gerade, welche je mit allen ihren Punkten Elemente der Hauptcoincidenz bilden.* Dieselben sollen *Grundstrahlen* des Connexes bez. seiner Hauptcoincidenz genannt werden.

*) Ist dieselbe die unendlich ferne Gerade, so hat man den Fall der Translation, vgl. die zweite Anmk. auf p. 996.

Offenbar wird auch die Differentialgleichung der Hauptcoincidenzcurven, welche aus $f = 0$ für $x_i = (udu)_i$ hervorgeht, durch jeden dieser Grundstrahlen unabhängig von den Differentialen du_i erfüllt. *Die $n^2 + n + 1$ Grundstrahlen eines Connexes $(1, n)$ werden also von allen seinen Hauptcoincidenzcurven berührt.**)

Die Grundstrahlen stehen ferner in besonderer Beziehung zu den oben betrachteten, eindeutig auf einander bezogenen Curven $F = 0$, $\Phi = 0$ (vgl. p. 969). Die damals gegebene Bestimmung der Singularitäten der letzteren bleibt auch für $m = 1$ bestehen. Es ist also *F von der Ordnung $(n-1)(n+2)$, die Zahl der Doppelpunkte von F gleich*

$$\tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)\{(n+2)^2 + 3n\},$$

die Zahl der Spitzen gleich

$$3(n-2)(2n+1),$$

und daher findet man für *das Geschlecht von F die Zahl:*

$$\tfrac{1}{2}n(7n-11).$$

Hieraus ergibt sich die Klasse von F gleich $3n^2$, die Zahl der Wendepunkte gleich $12n(n-1)$, die der Doppeltangenten gleich $\frac{1}{2}(9n^4 - 40n^2 + 35n + 2)$.

Die Curve Φ dagegen wird von der Klasse $3n$, das Geschlecht derselben stimmt mit dem von F überein; *die Zahl ihrer Doppeltangenten* ergibt sich daher gleich

$$\tfrac{1}{2}(3n-1)(3n-2) - \tfrac{1}{2}n(7n-11) = n^2 + n + 1,$$

denn Wendetangenten werden im Allgemeinen nicht auftreten.

Wir werden sehen, dass diese Doppeltangenten eben die Grundstrahlen unseres Connexes $(1, n)$ sind.

Im vorliegenden Falle nämlich können wir die Gleichung der Curve $\Phi = 0$ leicht direct aufstellen. Wir gehen zu dem Zwecke aus von dem Gewebe der Curven $(n+1)^{\text{ter}}$ Klasse (vgl. p. 966):

$$(1) \qquad U_v \equiv (auv)\, u_\alpha^n \equiv \Sigma A_i (uv)_i = 0.$$

Eine jede Curve desselben berührt die $n^2 + n + 1$ Grundstrahlen und ausserdem die Linie v, zu welcher sie gehört; und der Berührungspunkt y von v ist der zu v gehörige Punkt der Hauptcoincidenz. Von jedem Punkte von v kann man ausser v selbst noch n weitere Tangenten an die Curve $U_v = 0$ legen, und dies sind die n zu dem betreffenden Punkte von v gehörigen Strahlen der Hauptcoincidenz; für den Punkt y selbst aber fällt einer dieser n Strahlen mit der Linie

*) Vgl. auch die Bemerkungen über singuläre Lösungen am Schlusse dieser Abtheilung.

v zusammen. Ist nun v eine Tangente der Curve $\Phi = 0$, so ist y ein Punkt von $F = 0$, und es fällt noch ein weiterer der von y ausgehenden n Strahlen der Hauptcoincidenz (Tangenten von $U_v = 0$) in die Linie v; d. h. v wird Rückkehrtangente der Curve $U_v = 0$. Die Bedingung hierfür ist, dass v gleichzeitig die Hesse'sche Curve von $U_v = 0$ berührt. Sei also $U_v = u_\pi^{n+1}$, so ist die Gleichung der Curve $\Phi = 0$ durch

$$(\pi\pi'\pi'')^2 u_\pi^{n-1} u_{\pi'}^{n-1} u_{\pi''}^{n-1} = 0$$

gegeben, wenn man links $u = v$ setzt. Die linke Seite dieser Gleichung ist vom Grade $3n$ in den u_i und vom dritten Grade in den Coëfficienten von f. Versucht man eine solche Contravariante symbolisch zu bilden, so hat man nur die Wahl zwischen den drei Formen:

$$(abc)\, u_\alpha^n u_\beta^n u_\gamma^n, \quad (abu)\, c_\alpha u_\alpha^{n-1} u_\beta^n u_\gamma^n, \quad a_\alpha u_\alpha^{n-1} (bcu)\, u_\beta^n u_\gamma^n.$$

Die erste von diesen verschwindet identisch, da sie bei Vertauschung von b, β und c, γ ihr Zeichen ändert; gleiches gilt von der letzten (welche überdies in zwei getrennte Factoren zerfällt); *die Gleichung der Curve* $\Phi = 0$ *ist also:*

$$\Phi = (abu)\, c_\alpha u_\alpha^{n-1} u_\beta^n u_\gamma^n = 0. \tag{2}$$

Ist nun u ein Grundstrahl des Connexes, so verschwinden die Grössen $(bu)_i u_\beta^n$, und folglich ist auch Φ selbst Null. Aber auch die Differentialquotienten von Φ verschwinden, denn es ist:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} = (ab)_i\, c_\alpha u_\alpha^{n-1} u_\beta^n u_\gamma^n$$
$$+ (abu)\, c_\alpha u_\alpha^{n-2} u_\beta^{n-1} u_\gamma^{n-1} \{(n-1)\alpha_i u_\beta u_\gamma + n u_\alpha (u_\beta \gamma_i + u_\gamma \beta_i\}.$$

Auf der rechten Seite verschwindet das zweite und dritte Glied wegen der Factoren $(abu)\, u_\beta^n$; das vierte ist gleich

$$u_\gamma^n \beta_i u_\alpha^{n-1} u_\beta^{n-1} \{(acu)\, b_\alpha + (cbu)\, a_\alpha + (abc)\, u_\alpha\},$$

ist also ebenfalls Null. Das erste Glied endlich ist gleich

$$\tfrac{1}{2} (ab)_i u_\alpha^{n-1} u_\beta^{n-1} u_\gamma^n (c_\alpha u_\beta - c_\beta u_\alpha) = \tfrac{1}{2} (ab)_i u_\alpha^{n-1} u_\beta^{n-1} u_\gamma^n (cuw).$$

wenn $w_i = (\alpha\beta)_i$; dasselbe verschwindet also auch wegen der Factoren $(cuw)\, u_\gamma^n$. Wir haben so den Satz:

Die $n^2 + n + 1$ *Grundstrahlen eines Connexes* $(1, n)$ *sind Doppeltangenten der zugehörigen Curve* $\Phi = 0$*; und letztere hat im Allgemeinen keine anderen singulären Tangenten.*

Dieselben Grundstrahlen sind auch Doppeltangenten der Curve $F = 0$, wie sich durch näheres Studium der Curvensysteme $U_v = 0$ und

$$X_y \quad a_x (\alpha x y)^n = 0 \tag{3}$$

ergeben wird. Wir verweilen zunächst bei dem Gewebe der Curven $(n+1)^{\text{ter}}$ Klasse $U_v = 0$. Eine Curve desselben ist im Allgemeinen

bestimmt durch zwei beliebige Tangenten u', u'', indem sich die Parameter v_i dann durch die Gleichungen:

$$(4) \qquad (a u' v)\, u'^{\,n}_{\alpha} = 0 \quad \text{und} \quad (a u'' v)\, u''^{\,n}_{\alpha} = 0$$

berechnen lassen. Eine Ausnahme tritt jedoch ein, wenn der Schnittpunkt y von u' und u'' gleichzeitig Coincidenzpunkt für beide Linien ist, d. h. wenn die Gleichungen bestehen:

$$a_y u'^{\,n}_{\alpha} = 0\,, \quad a_y u''^{\,n}_{\alpha} = 0\,, \quad u'_y = 0\,, \quad u''_y = 0\,;$$

dann nämlich sind beide Gleichungen (4) sowohl für $v = u'$ als für $v = u''$ erfüllt, dienen somit nicht mehr zur Bestimmung von v. Es gibt also noch eine lineare Schaar von Curven U_v, welche alle die Linien u', u'' und ebenso die $n - 2$ anderen Strahlen berühren, denen derselbe Coincidenzpunkt y zukommt. Dies können wir in dem Satze aussprechen:*)

Die $n^2 + n + 1$ Grundstrahlen des Connexes $(1, n)$ bilden zusammen mit n Coincidenzstrahlen, welche einem beliebigen Punkte in der Hauptcoincidenz entsprechen, ein System von solchen $(n + 1)^2$ Geraden, die von unendlich vielen Curven $(n + 1)^{ter}$ Klasse ($U_v = 0$) berührt werden.

Hierdurch ist das Gewebe $U_v = 0$ vor einem beliebigen Gewebe $(n + 1)^{ter}$ Klasse wesentlich ausgezeichnet. In der That würde letzteres ja schon durch $\frac{1}{2} n (n + 5)$ feste Tangenten völlig bestimmt sein, während wir hier $n^2 + n + 1$ solche Tangenten haben. Die Grundstrahlen sind also nicht von einander unabhängig, sie bilden vielmehr ein besonderes Liniensystem, welches den früher kurz erwähnten Systemen von R Punkten dualistisch gegenübersteht, durch welche noch ∞^q Curven einer gegebenen ∞^t-Schaar von C_n hindurchgehen, wenn $q > t - R$ (vgl. p. 757). In unserm Falle haben wir n durch $n + 1$ zu ersetzen und

$$t = \tfrac{1}{2} (n + 1)(n + 4)\,, \quad q = 2\,, \quad R = n^2 + n + 1\,.$$

Nach den damaligen Resultaten genügen also die Coordinaten der $n^2 + n + 1$ Grundstrahlen einem Systeme von Gleichungen, welches mit

$$(q + 1)(R - t + q) = \tfrac{3}{2} (n - 1)(n - 2)$$

unabhängigen Relationen äquivalent ist. In unserm Falle kommt dann noch die weitere Eigenschaft hinzu, dass die n weiteren gemeinsamen Tangenten zweier Curven desselben sich in einem Punkte schneiden. Ob indess letztere Eigenschaft eine Folge der ersteren ist, ob zwischen den $n^2 + n + 1$ Grundstrahlen noch weitere Relationen bestehen, bedarf einer näheren Untersuchung.

*) Die folgenden Betrachtungen sind Verallgemeinerungen der von Godt über den Connex (1, 2) angestellten Untersuchungen; vgl. dessen Inauguraldissertation: Ueber den Connex erster Ordnung und zweiter Klasse, Göttingen 1873.

In dem Gewebe $U_v = 0$ werden nun unendlich viele Curven mit einer Doppeltangente enthalten sein, ferner eine endliche Zahl von Curven mit zwei Doppeltangenten oder einer Wendetangente. Alle diese ausgezeichneten Curven stehen zu der Curve $F = 0$ in enger Beziehung. Die $n(n+1) - 2 = (n-1)(n+2)$ einfachen Schnittpunkte von v mit U_v nämlich sind dadurch charakterisirt, dass in ihnen zwei der zugehörigen n Richtungen der Hauptcoincidenz (Tangenten von U_v) zusammenfallen; diese Eigenschaft kommt aber nur Punkten von $F = 0$ zu. *Die $(n-1)(n+2)$ Schnittpunkte von $U_v = 0$ mit v sind daher identisch mit den $(n-1)(n+2)$ Schnittpunkten von v mit F.**) Soll U_v eine Doppeltangente haben, so müssen zwei dieser Schnittpunkte zusammenfallen in den Schnittpunkt von v mit der Doppeltangente, d. h. v wird Tangente von F; und umgekehrt hat U_v immer eine Doppeltangente, wenn v Tangente von F ist. Andernfalls nämlich müsste v selbst dann Doppeltangente von $U_v = 0$ sein, wir würden also auf v zwei, und somit unendlich viele Coincidenzpunkte haben, d. h. v wäre ein Grundstrahl unseres Connexes. Andererseits erkennt man aus dem Ausdrucke U_v sofort, dass in der That jeder Grundstrahl v Doppeltangente seiner Curve U_v ist; folglich ist er nach vorstehender Ueberlegung auch Doppeltangente von F. Wir haben so folgende Sätze:

Die Geraden v, deren Curven U_v eine Doppeltangente haben, umhüllen die Curve $F = 0$. Die Discriminante der Form U_v gibt also, gleich Null gesetzt, die Gleichung der Curve F in Liniencoordinaten. In der That wird sie auch vom Grade $3n^2$ in den v_i.

Die $n^2 + n + 1$ Grundstrahlen sind Doppeltangenten von F; in den beiden Berührungspunkten werden sie gleichzeitig von den zugehörigen Curven U_v berührt.

Ferner leitet man aus den letzten Entwicklungen ohne Schwierigkeit die folgenden Sätze ab:

Die Doppeltangenten der Curven $U_v = 0$ umhüllen die in (2) gegebene Curve $\Phi = 0$; letztere (welche nach Obigem ebenfalls die Grundstrahlen zu Doppeltangenten hat) ist also auch vermöge dieses Satzes eindeutig auf $F = 0$ bezogen.

Den $\frac{3}{2}n(n-1)(3n^2 + 3n - 11)$ Doppeltangenten von F, welche nicht Grundstrahlen des Connexes sind, entsprechen als Linien v Curven U_v mit zwei Doppeltangenten; letztere gehen durch die beiden Berührungspunkte von v mit F.

---

*) Ebenso wird im Connexe (m, n) die Curve U_v, die v zur m-fachen Tangente hat, von v in

$$(m+n-1)(m+n) - m(m-1) - 2m = (n-1)(n+2m)$$

einfachen Punkten getroffen, welche gleichzeitig die Schnittpunkte von F mit v sind.

Die $12n(n-1)$ *Wendetangenten von* F *sind diejenigen Linien, welchen Curven* U_v *mit einer Wendetangente zugehören.*

In ähnlicher Weise steht das in (3) gegebene System der Curven $X_y = 0$ mit der Curve $F = 0$ in Beziehung. Jede Curve desselben hat in dem Punkte y einen n-fachen Punkt, dessen n Tangenten die zu y gehörigen Coincidenzstrahlen sind und durch die Gleichung $a_y(\alpha x y)^n = 0$ dargestellt werden. *Sollen daher zwei dieser* n *Tangenten zusammenfallen, so muss* y *auf der Curve* F *liegen.* Während y die Curve F durchläuft, umhüllen die zugehörigen doppelt zählenden Tangenten die Curve $(3n)^{\text{ter}}$ Klasse $\Phi = 0$. Verbindet man also y mit den $(n^2-1)(n+2)$ Schnittpunkten von $X_y = 0$ mit $F = 0$, so sind unter den Verbindungslinien jedenfalls doppelt zählend die $3n$ durch y gehenden Tangenten von Φ; und da auf jeder der letzteren nur ein Coincidenzpunkt liegt, so fallen von jenen $(n^2-1)(n+2)$ Schnittpunkten $6n$ paarweise zusammen; wir haben also den Satz:

Jede Curve $X_y = 0$ *berührt die Curve* F *in* $3n$ *Punkten, trifft sie also ausserdem noch in* $n^3 + 2n^2 - 7n - 2$ *Punkten.* Letztere Zahl gibt gleichzeitig die Klasse der Curve, welche von den $n-2$ einfachen zu einem Punkte von F gehörigen Strahlen der Hauptcoincidenz umhüllt wird.

Wir können leicht noch eine dritte Curve angeben, welche durch die Berührungspunkte von $X_y = 0$ und $F = 0$ hindurchgeht, so dass diese $3n$ Punkte (welche kein vollständiges Schnittpunktsystem bilden) als die gemeinsamen Punkte von 3 Curven bestimmt sind. Zwei Curven X_y und X_z nämlich schneiden sich in $(n+1)^2$ Punkten. Von diesen liegt immer einer auf der Linie $\overline{yz}$, nämlich der ihr in der Hauptcoincidenz zugeordnete Punkt. Lassen wir nun z auf der Geraden $\overline{yz}$ beliebig nahe an y heranrücken, so bleibt der auf $\overline{yz}$ gelegene Schnittpunkt fest, die anderen $n^2 + 2n$ Punkte verschieben sich auf X_y. Die Verbindungslinien derselben mit y und z werden dann einander benachbart (soweit die Punkte nicht selbst an y heranrücken), werden also zu Tangenten von Φ; es können folglich nur $3n$ dieser Schnittpunkte getrennt liegen, die übrigen $(n+1)^2 - 3n - 1$ müssen sich in y vereinigen. *Die Berührungspunkte von* F *mit* X_y *sind also die einfachen nicht auf* $\overline{yz}$ *gelegenen Schnittpunkte der Curven* $X_y = 0$ *und* $X_{y+\varepsilon z} = 0$, wo ε unendlich klein ist, d. h. der Curven $X_y = 0$ und

$$a_x(\alpha x y)^{n-1}(\alpha x z) = 0\,. \tag{5}$$

In der That erkennt man auch aus den Gleichungen, dass $n^2 - n$ Schnittpunkte beider in den Punkt y zusammenfallen.

Liegt der Punkt y insbesondere auf einem Grundstrahle des Connexes, so muss sich zufolge der Definition der Curve X_y von ihr

der Grundstrahl selbst absondern. *Den Punkten eines Grundstrahles entspricht so eine Reihe von Curven n^{ter} Ordnung, von denen jede die Curve F in $3n - 2$ Punkten berührt.* Dem Schnittpunkte zweier Grundstrahlen entspricht daher eine Curve $(n-1)^{ter}$ Ordnung, welche F in $3n - 4$ Punkten berührt. —

Die vorstehenden Entwicklungen wollen wir jetzt insbesondere für den Fall $n = 2$, d. i. für den Connex (1, 2), verwerthen.*) Für denselben wird die Curve $F = 0$ von der vierten Ordnung und hat keine singulären Punkte; sie ist dann überhaupt die *allgemeine* Curve vierter Ordnung, denn die Zahl der Constanten, von denen die Hauptcoincidenz des Connexes (1, 2) abhängt, ist gleich 14, also gleich der Zahl der Constanten einer allgemeinen C_4. Man erkennt so, dass die Theorie des Connexes (1, 2) aufs Engste mit der *Theorie einer allgemeinen C_4* verknüpft ist; und dadurch wird der Fall $n = 2$ von besonderem Interesse. In der That brauchen wir in obigen Sätzen nur immer $n = 2$ zu nehmen, um sofort eine Reihe von Theoremen über die *Doppeltangenten einer C_4* zu erhalten, wie wir sogleich noch sehen werden. Zuvor sei bemerkt, dass man in diesem einfachen Falle, wo $m = 1$ und $n = 2$, leicht einige der covarianten Curven wirklich aufstellen kann, welche früher beispielsweise erwähnt wurden (p. 944); in der That haben wir es hier ja, wenn wir x_1, x_2, x_3 als Parameter auffassen, nur mit einem Gewebe von Kegelschnitten K_2 zu thun, und mit einem solchen beschäftigten wir uns schon früher (p. 519). Wir können daher sofort die folgenden Sätze aussprechen:

Alle Punkte x, deren zugehörige K_2 in ein Punktpaar zerfallen, bilden die Curve dritter Ordnung:

(6) $$P \equiv a_x b_x c_x (\alpha\beta\gamma)^2 = 0\,.$$

Die Doppeltangenten der zerfallenden K_2 umhüllen die Curve dritter Klasse

(7) $$I = (abc)\,(\alpha\beta\gamma)\,u_\alpha u_\beta u_\gamma = 0$$

d. i. die Jacobi*'sche Curve des Gewebes $a_x u_\alpha^2 = 0$.*

Die Punktepaare der zerfallenden K_2 bilden die Curve dritter Ordnung:

(8) $$H \equiv (abc)\,(\alpha\beta x)\,(\beta\gamma x)\,(\gamma\alpha x) = 0\,,$$

d. i. die Hermite*'sche Curve des Gewebes.*

Die Beziehungen der Curven $I = 0$ und $H = 0$ auf einander sind aus der Theorie der Kegelschnittgewebe bekannt. Die Curve $P = 0$ ist vermöge der Gleichungen:

$$a_x u_\alpha \alpha_1 = 0, \quad a_x u_\alpha \alpha_2 = 0, \quad a_x u_\alpha \alpha_3 = 0,$$

*) Vgl. im Folgenden Godt a. a. O.

linear auf die Curve $I = 0$ bezogen; beide haben also dieselbe absolute Invariante. Drei Punkten von $P = 0$, welche in gerader Linie u liegen, entsprechen drei Punktepaare von $H = 0$, welche die Ecken eines vollständigen Vierseits bilden; die Seiten des letzteren sind die gemeinsamen Tangenten der Kegelschnittschaar $a_y u_\alpha^2 + \lambda a_z u_\alpha^2 = 0$, wenn y und z zwei Punkte von u sind. Jede dieser vier Seiten bildet dann ein Connexelement mit *jedem* Punkte von u; d. h. liegt x auf einer der vier Seiten, so bilden x und u zusammen ein Element des conjugirten Connexes (p. 1001). *Die Gleichung des letzteren, nämlich* (p. 951):

$$(abu)\,(cdu)\,(\alpha\delta x)^2\,(\beta\gamma x)^2 = 0\,,$$

stellt daher das Product der gemeinsamen Tangenten aller Kegelschnitte dar, welche im Connexe (1, 2) *zu den Punkten von u gehören.* —

Wir geben nun im Folgenden eine Zusammenstellung der aus unseren allgemeinen Erörterungen über den Connex (1, n) resultirenden Sätze; und zwar lassen wir letztere in derselben Reihenfolge, in welcher sie oben abgeleitet wurden; nur bei einzelnen fügen wir unter Benutzung bekannter Resultate aus der Theorie der Curven dritter Ordnung bez. Klasse einige Erörterungen hinzu:

Es gibt 7 *Strahlen, welche mit allen ihren Punkten Elemente der Hauptcoincidenz eines Connexes* (1, 2) *bilden („Grundstrahlen desselben“).*

Die Curve $F = 0$, d. i. der Ort der Punkte x, welche auf den zugehörigen K_2 $a_x u_\alpha^2 = 0$ liegen, ist die allgemeine Curve 4ter Ordnung und gegeben durch die Gleichung: $a_x b_x\,(\alpha\beta x)^2 = 0$.

Die Curve $\Phi = 0$, d. i. die Enveloppe der Tangenten, welche man in Punkten von $F = 0$ an die zugehörigen K_2 ziehen kann, ist von der 6ten Klasse und gegeben durch die Gleichung: $(abu)\,c_\alpha u_\alpha u_\beta^2 u_\gamma^2 = 0$.

Die 7 Grundstrahlen sind Doppeltangenten der Curve Φ, letztere hat keine anderen Doppeltangenten.

Die Grundstrahlen bilden zusammen mit den zwei Strahlen, die in der Hauptcoincidenz einem beliebigen Punkte x entsprechen (d. i. Tangenten von x an die K_2 $a_x u_\alpha^2 = 0$), ein System von 9 Geraden, welche eine Curve dritter Klasse nicht bestimmen.

Die Gleichung $U_v = (auv)\,u_\alpha^2 = 0$ stellt das allgemeine Gewebe von Curven dritter Klasse mit 7 gemeinsamen Tangenten (den Grundstrahlen) dar.

Die ternäre absolute Invariante einer Curve $U_v = 0$ ist gleich der binären absoluten Invariante der vier Punkte, in welchen F von v geschnitten wird. Die Invarianten S_v und T_v von U_v sind also proportional zu den Contravarianten $(ABv)^4$ und $(ABv)^2\,(BCv)^2\,(CAv)^2$ von $F \equiv A_x^4$.

Insbesondere ist die Gleichung der Curve F in Liniencoordinaten v: $S_v^3 - 6\,T_v^2 = 0$.

*Die 7 Grundstrahlen sind Doppeltangenten von $F = 0$.**)

Den übrigen 21 Doppeltangenten von F entsprechen Curven U_v mit zwei Doppeltangenten, d. h. Curven, welche in einen Kegelschnitt und einen Punkt zerfallen. Ersterer kann nur 5 der 7 Grundstrahlen berühren; der Punkt fällt daher in den Schnittpunkt der beiden anderen Grundstrahlen. Also:

Jeder der übrigen 21 Doppeltangenten von F ist ein bestimmter von den Schnittpunkten der 7 Grundstrahlen zugeordnet der Art, dass die zu jener Doppeltangente gehörige U_v in den Punkt und in einen Kegelschnitt zerfällt, welcher die 5 nicht durch den Punkt gehenden Grundstrahlen berührt.

Die beiden Tangenten, welche man von dem Punkte an den Kegelschnitt legen kann, sind die Doppeltangenten der betreffenden U_v, sie gehen also durch die beiden Berührungspunkte der Doppeltangente v mit F.**)

Es gibt 24 Curven U_v mit Wendetangente, entsprechend den gemeinsamen Tangenten der beiden Curven: $S_v = 0$ und $T_v = 0$.

Die Gleichung $X_y \equiv a_x (\alpha x y)^2$ stellt ein System von Curven dritter Ordnung dar, deren jede in dem betreffenden Punkte y einen Doppelpunkt hat; die Tangenten des letzteren sind die Strahlen, welche mit y Elemente der Hauptcoincidenz bilden. Sind S_y, T_y die beiden Invarianten der Curve X_y, so ist die Bedingung $S_y^3 - 6\, T_y^2 = 0$ hier für y identisch erfüllt. Da ferner S_y und T_y gleichzeitig verschwinden, wenn y auf $F = 0$ liegt, indem dann die Curve $X_y = 0$ einen Rückkehrpunkt in y hat, so *unterscheiden sich die Invarianten S_y, T_y von X_y bez. nur um Zahlenfactoren von dem Quadrate und dem Cubus der Form $F = a_y b_y (\alpha \beta y)^2$.*

Jede Curve X_y berührt die Curve F in 6 Punkten, d. i. in allen Punkten, wo sie ihr begegnet.

Durch die 6 Berührungspunkte von X_y geht auch die Curve $a_x (\alpha x y) (\alpha x z) = 0$. Diese aber ist symmetrisch in y und z; somit folgt:

Die 12 Berührungspunkte zweier Curven X_y und X_z liegen auf der Curve dritter Ordnung:

$$a_x (\alpha x y) (\alpha x z) = 0 . \text{***)} \tag{9}$$

*) Die Theorie des Gewebes dritter Klasse, welches durch 7 Doppeltangenten einer C_4 bestimmt wird, ist zuerst von Aronhold studirt: Berliner Monatsberichte 1864, p. 499. — Ueber die Doppeltangenten der C_4 vgl. oben p. 850.

**) Da diese Linien auch Tangenten von $\Phi = 0$ sind, hat man also durch dualistische Uebertragung den Satz: Sind 7 beliebige Punkte in der Ebene gegeben, so liegen die 42 Punkte, in denen die Verbindungslinie je zweier von ihnen den durch die 5 übrigen bestimmten Kegelschnitt schneidet, in einer Curve 6ter Ordnung, welche alle 7 Punkte zu Doppelpunkten hat.

***) Dieselbe ist der Ort der Punkte x, deren zugehörige Strahlenpaare der Hauptcoincidenz die Verbindungslinie zweier beliebigen Punkte y und z harmonisch theilen.

Die zu den Punkten y eines der 7 Grundstrahlen gehörigen Curven X_y zerfallen in diesen Grundstrahl selbst und in ein System von einfach unendlich vielen Kegelschnitten, deren jeder die C_4 F in 4 Punkten berührt.

Die dem Schnittpunkte y zweier Grundstrahlen entsprechende Curve X_y zerfällt in die beiden Grundstrahlen und eine der übrigen 21 Doppeltangenten von F. *Jedem Schnittpunkte y zweier Grundstrahlen (7 Doppeltangenten von F) ist so eine bestimmte weitere Doppeltangente v von F zugeordnet, so dass man hierdurch alle 28 Doppeltangenten von F erhält.* Zu der Doppeltangente v gehört dann der Punkt y als ein Theil der betreffenden Curve U_v in der oben besprochenen Weise (p. 1009).

Jeder Grundstrahl nun wird von 6 anderen geschnitten. *In jeder Reihe von Berührungskegelschnitten, die einem Grundstrahle zugehört, sind also 6 Paare von Doppeltangenten enthalten;* von jedem Paare ist eine Doppeltangente eben einer der 6 übrigen Grundstrahlen.

Liegen y und z beide auf demselben Grundstrahle, so muss jede Curve $X_{y+\lambda z} = 0$ diesen Strahl enthalten, und folglich auch die Curve (9). Es folgt so, dass *die 8 Berührungspunkte zweier Kegelschnitte desselben Systems immer auf einem Kegelschnitte liegen* (vgl. p. 842). —

Die meisten der hier ausgesprochenen Sätze beziehen sich allein auf die sieben Grundstrahlen und die Curve vierter Ordnung, sie gelten ganz unabhängig davon, dass wir durch den Connex $a_x u_\alpha^2 = 0$ auf sie geführt werden. Man kann daher auch umgekehrt von einer beliebigen Curve vierter Ordnung ausgehen, man hat dann Relationen zwischen 7 beliebigen Doppeltangenten (von denen keine vier zerfallende Kegelschnitte desselben Systems von Berührungskegelschnitten bilden dürfen) und den 21 übrigen Doppeltangenten der C_4. Man kann aber auch weiter von 7 beliebigen Geraden der Ebene ausgehen und aus ihnen die übrigen 21 Doppeltangenten sowie deren Berührungspunkte mit der C_4 construiren. Zu dieser Construction wird man von unserm Connexe aus am einfachsten geführt, indem man von einem andern Connexe ausgeht, welcher mit dem gegebenen dieselbe Hauptcoincidenz hat und von besonders einfacher Natur ist. Dies ist ja erlaubt, da die Curve $F = 0$ allein von der Hauptcoincidenz des Connexes (1, 2) abhängt.

Wir nehmen drei der sieben Grundstrahlen zu Seiten des Coordinatendreiecks. Dann muss die Gleichung des Connexes erfüllt werden durch jedes der drei Werthsysteme:

$$u_2 = 0, \quad u_3 = 0, \quad x_1 = 0$$
$$u_3 = 0, \quad u_1 = 0, \quad x_2 = 0$$
$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad x_3 = 0.$$

Es müssen also die Glieder mit den Factoren $x_1 u_2^2$, $x_1 u_3^2$, $x_2 u_3^2$, $x_2 u_1^2$, $x_3 u_1^2$, $x_3 u_2^2$ fehlen; durch Hinzufügen des Productes von u_x mit einem in den u linearen Ausdrucke kann man ferner auch die Glieder mit $x_1 u_1^2$, $x_2 u_2^2$, $x_3 u_3^2$ zerstören. *Die Hauptcoincidenz eines allgemeinen Connexes* (1, 2) *kann daher immer dargestellt werden als Hauptcoincidenz eines Connexes der Form:*

$$(10) \qquad a_x u_2 u_3 + b_x u_3 u_1 + c_x u_1 u_2 = 0,$$

dessen Gleichung auf drei der sieben Grundstrahlen bezogen ist; und es gibt 35 solche Connexe, entsprechend den 35 Arten, wie man 3 Grundstrahlen auswählen kann.

Der Connex (10) ist dadurch ausgezeichnet, dass alle seine Curven K_2 die Seiten des Coordinatendreiecks berühren. Die Curve $I = 0$ zerfällt daher in die drei Ecken des Dreiecks, die Curve $H = 0$ in die drei Seiten (vgl. p. 525), und für die Curve $P = 0$, deren Gleichung sich durch Elimination der u aus den Gleichungen

$$b_x u_3 + c_x u_2 = 0, \quad c_x u_1 + a_x u_3 = 0, \quad a_x u_2 + b_x u_1 = 0$$

ergibt, findet man:

$$\begin{vmatrix} 0 & c_x & b_x \\ c_x & 0 & a_x \\ b_x & a_x & 0 \end{vmatrix} = 2\, a_x b_x c_x = 0.$$

Die Gleichung der Curve vierter Ordnung endlich ist durch die Punktcoordinatengleichung des Kegelschnittes (10) gegeben; *sie nimmt also die einfache Gestalt an:*

$$(11) \qquad \tfrac{1}{2} F = - \begin{vmatrix} 0 & c_x & b_x & x_1 \\ c_x & 0 & a_x & x_2 \\ b_x & a_x & 0 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Bilden wir ferner X_y, indem wir y in die Ecke $u_1 = 0$ des Coordinatendreiecks legen, so wird, indem $y_1 = 1$:

$$X_y = - a_x x_2 x_3.$$

Die in (10) *auftretenden Linien* $a_x = 0$, $b_x = 0$, $c_x = 0$ *sind daher diejenigen Doppeltangenten von F, die den Ecken des Dreiecks als Schnittpunkten von Grundstrahlen in obiger Weise zugeordnet sind.*

Alle sechs linearen Formen, welche in der Determinante (11) auftreten, bedeuten also, gleich Null gesetzt, Doppeltangenten von $F = 0$. Man verificirt dies auch leicht an der Gleichung (11) direct. Setzt man in ihr nämlich z. B. $c_x = 0$, so erhält man die Gleichung:

$$(a_x x_1 - b_x x_2)^2 = 0,$$

und dasselbe Resultat ergibt sich für $x_3 = 0$. Die Linien $c_x = 0$,

$x_3 = 0$ berühren daher $F = 0$ in den Schnittpunkten mit dem Kegelschnitte $a_x x_1 - b_x x_2 = 0$. Letzterer geht durch die Schnittpunkte von $a_x = 0$ mit $b_x = 0$ und $x_2 = 0$, von $b_x = 0$ mit $x_1 = 0$ und von $x_1 = 0$ mit $x_2 = 0$. Dies gibt den sogleich noch zu verwerthenden Satz, welcher wieder unabhängig von der Gleichungsform unseres Connexes ist:

Sind s_1, s_2, s_3 drei unter 7 von einander unabhängigen Doppeltangenten von F, welche sich bez. in den Punkten p_1, p_2, p_3 schneiden, und sind σ_1, σ_2, σ_3 die den p_i zugeordneten Doppeltangenten, welche sich in π_1, π_2, π_3 schneiden, so liegen die Berührungspunkte von s_1 und σ_1 mit den Punkten p_1 und π_1 sowie mit den Schnittpunkten von s_2 mit σ_3 und s_3 mit σ_2 in einem Kegelschnitte, etc.; und die so entstehenden drei Kegelschnitte gehen, wie man aus ihren Gleichungen:

$$(12) \quad x_2 b_x - x_3 c_x = 0, \quad x_3 c_x - x_1 a_x = 0, \quad x_1 a_x - x_2 b_x = 0$$

sofort erkennt, durch dieselben vier Punkte. —

Indem wir nun zu 7 beliebig gegebenen Geraden zunächst einen der speciellen Connexe (1, 2) von der Form (10) aufsuchen, können wir die folgende Aufgabe ohne wesentliche Schwierigkeiten lösen:

Es sind sieben beliebige Gerade als Grundstrahlen eines allgemeinen Connexes (1, 2) *gegeben, man soll die Hauptcoincidenz des letzteren construiren.*

Wir benutzen 3 beliebige der 7 Strahlen als Fundamentalstrahlen eines Connexes der Form (10). Sie seien s_1, s_2, s_3, und ihre Schnittpunkte p_1, p_2, p_3 genannt; die 4 übrigen Strahlen mögen mit t_1, t_2, t_3, t_4 bezeichnet werden, ihre Schnittpunkte bez. mit p_{12}, p_{13}, etc. Da alle Connexkegelschnitte K_2 die Linien s_i berühren müssen, so sind durch die Auswahl dieser Linien mehrere Connexkegelschnitte sofort bestimmt. Es entsprechen nämlich den Punkten eines Grundstrahls Kegelschnitte, die ihn selbst berühren, also den Schnittpunkten je zweier Geraden t Kegelschnitte, welche beide berühren, für die also fünf Tangenten bekannt sind. Man kennt so von vornherein die Kegelschnitte, welche zu den Ecken des vollständigen Vierseits der Linien t_i gehören.

Nun kann man aber auch zu allen anderen Punkten der Geraden t_i die Kegelschnitte finden. Die zu den Punkten von t_1 gehörende Schaar von K_2 z. B. ist projectivisch zu der Reihe ihrer Berührungspunkte auf t_1; und diese projectivische Beziehung ist dadurch festgelegt, dass die drei den Punkten p_{12}, p_{13}, p_{14} zugehörenden K_2 und somit auch deren Berührungspunkte π_{12}, π_{13}, π_{14} bekannt sind. Man kann daher zu jedem beliebigen Punkte p von t_1 den zugehörigen Berührungspunkt π construiren und, wenn man diesen erst gefunden hat, auch den zu p gehörenden Kegelschnitt, welcher dann durch die

vier Tangenten s_1, s_2, s_3, t_1 und den Berührungspunkt π auf t_1 in bekannter Weise bestimmt ist. An ihn kann noch durch lineare Construction von p aus die andere Tangente gezogen werden, welche mit t_1 zusammen das zu p gehörige Strahlenpaar der Hauptcoincidenz bildet.

Es kommt ferner darauf an, die für den Connex (10) wichtigen Linien $a_x = 0$, $b_x = 0$, $c_x = 0$ zu construiren. Jeder Punkt von s_1 bildet nun mit dem Schnittpunkte p_1 von s_2 und s_3 einen Kegelschnitt, welcher als Curve K_2 zu einem bestimmten Punkte von $a_x = 0$ gehört. Dadurch sind die Punkte von s_1 und $a_x = 0$ einander projectivisch zugeordnet. Von letzterer Linie aber kennt man die vier Punkte, welche den Schnittpunkten von s_1 mit den Linien t_i entsprechen, nach den eben gemachten Bemerkungen, denn diese Schnittpunkte bilden mit p_1 zusammen Kegelschnitte der schon bekannten Schaaren, welche den Punkten der Geraden t_i entsprechen. Es ist hierdurch die Linie $a_x = 0$ bestimmt und gleichzeitig die projectivische Zuordnung ihrer Punkte zu den Punkten von s_1. Analoges gilt für die Linien $b_x = 0$ und $c_x = 0$; man kann daher alle zerfallenden Kegelschnitte und die Punkte, zu denen sie als K_2 gehören, construiren.

Die nun noch zu lösenden Hauptaufgaben, zu einem beliebigen Strahle u die Connexgerade C_1 und zu einem beliebigen Punkte x den Connexkegelschnitt K_2 zu construiren, erledigen sich einfach.

Zu einem Strahle u die Connexgerade finden, heisst diejenige Gerade bestimmen, deren Punkten x die den Strahl u berührenden K_2 zugeordnet sind. Solche K_2 sind nun offenbar die drei Schnittpunkte von u mit s_1, s_2, s_3, bez. zusammengenommen mit den gegenüberliegenden Ecken p_1, p_2, p_3; die zugehörigen Punkte x liegen auf den Geraden a, b, c, sind also nach Vorstehendem bekannt; sie liegen aber auch selbst in einer Geraden, eben der gesuchten C_1, welche zu u gehört.

Um zu einem Punkte x den Kegelschnitt K_2 zu finden, ziehe man eine Gerade v durch x; man kennt dann die zerfallenden Kegelschnitte, welche den Schnittpunkten der Geraden mit $a_x = 0$, $b_x = 0$, $c_x = 0$ entsprechen, folglich auch den zu x gehörigen, denn die Schaar der zu den Punkten x von v gehörenden K_2 ist projectivisch zu der Reihe dieser Punkte x.

In Folge dieser Constructionen ist der Connex (10) als völlig bekannt zu betrachten; man kennt daher auch seine Hauptcoincidenz, d. i. die Hauptcoincidenz eines beliebigen Connexes, welcher die 7 gegebenen Geraden zu Grundstrahlen hat.*)

*) Man kann hier die Lösung mancher anderen Aufgaben anschliessen. Um z. B. die 9te gemeinsame Tangente zweier Curven dritter Klasse zu finden, wenn

Mit Hülfe der Construction dieser Hauptcoincidenz löst man ferner leicht folgende wichtige Aufgabe.*)

Es sind 7 von einander unabhängige Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung gegeben, man soll die 21 anderen und die Berührungspunkte aller 28 construiren.

Man benutze die 7 gegebenen Doppeltangenten als Grundstrahlen einer Hauptcoincidenz (1, 2), die man in angegebener Weise construiren kann. Zieht man dann von dem Schnittpunkte je zweier der 7 Strahlen das Tangentenpaar an den durch die 5 anderen bestimmten Kegelschnitt und sucht auf den Tangenten jedes Paares die Coincidenzpunkte, so ist jedesmal die Verbindungslinie der Coincidenzpunkte eines Paares ebenfalls eine Tangente des benutzten Kegelschnittes, ausserdem aber eine der 21 gesuchten Doppeltangenten, und die Coincidenzpunkte sind ihre Berührungspunkte (vgl. die Sätze auf p. 1009). Um ferner die Berührungspunkte auf den drei gegebenen Doppeltangenten zu finden, welche bei Construction der Hauptcoincidenz (1, 2) als Strahlen s_1, s_2, s_3 benutzt werden, braucht man nach einem obigen Satze nur ihre Schnittpunkte mit den drei Kegelschnitten (12) zu bestimmen, die leicht construirt werden können. Um endlich die Berührungspunkte der vier noch übrigen Doppeltangenten t_1, t_2, t_3, t_4 zu erhalten, bemerke man, dass dies diejenigen Punkte der vier Geraden sind, die auf ihren zugehörigen K_2 liegen. Man hat dann nur die sich selbst entsprechenden Punkte der auf diesen Geraden in einander liegenden (schon oben benutzten) projectivischen Punktreihen zu construiren, was in bekannter Weise geschieht (p. 51). Damit ist dann die gestellte Aufgabe gelöst.

VIII. Zur Theorie der Differentialgleichungen.

Wir haben gesehen, wie die Hauptcoincidenz eines algebraischen Connexes aufs Engste mit einer bestimmten algebraischen Differentialgleichung zusammenhängt, und wir haben darauf aufmerksam gemacht, wie aus der Invariantentheorie der Connexe neue Gesichtspunkte für die Theorie der Differentialgleichungen entspringen müssen; überdies führten wir in einigen Beispielen die Integration der betreffenden Differentialgleichungen wirklich aus. Die Anschauungsweise der Invariantentheorie, insbesondere die durch sie geforderte Homogeneität der Gleichungen, ist aber nicht nur für die rein algebraischen Diffe-

8 solche Tangenten gegeben sind, bestimme man die zu 7 der letzteren gehörige Hauptcoincidenz (1, 2) und in ihr den Coincidenzpunkt der 8ten. Von letzterem ziehe man dann die zweite Tangente an die zugehörige K_2; sie ist die gesuchte Gerade.

*) Vgl. Aronhold a. a. O.

rentialgleichungen von Nutzen, sie bietet vielmehr auch für den Fall wesentliche Vortheile, dass die Potenzen der Differentiale dx, dy in transscendente Functionen multiplicirt scheinen, oder dass auch diese Differentiale selbst in transscendenter Weise vorkommen, d. i. für die ganz allgemeinen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\Phi\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

In der That kann man ja jede solche Function Φ in eine homogene Function nullter Ordnung verwandeln, indem man setzt: $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$; und dann gilt wieder das für die homogenen Functionen so nützliche Euler'sche Theorem, zunächst in der Form:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} x_3 = 0.$$

Im Folgenden sollen nun kurz einige Punkte bezeichnet werden, zu deren Erörterung die Anwendung projectivischer Denkweise unmittelbar Veranlassung gibt, und welche in neueren Untersuchungen über Differentialgleichungen besonders in den Vordergrund treten; doch müssen wir uns hier auf eine kurze, keineswegs vollständige Einleitung in diese Theorien beschränken, zumal letztere noch im Entstehen begriffen sind. Insbesondere ist es auch der Zweck des Folgenden, den Zusammenhang der neueren Anschauungsweise mit der gewöhnlichen Theorie hervorzuheben; und deshalb gehen wir vom Gebrauche rechtwinkliger Coordinaten aus. — Die hier zu besprechenden Gegenstände können in folgender Weise näher bezeichnet werden:

1) Begriff des Integrals einer Differentialgleichung.
2) Begriff der allgemeinen Berührungstransformationen und Aufstellung derselben.
3) Die singuläre Lösung einer Differentialgleichung.

Wenn man in der Gleichung

$$\varphi(x,\ y,\ p) = 0, \quad \text{wo} \quad p = \frac{dy}{dx}, \tag{1}$$

x, y als Punktcoordinaten in der Ebene deutet, so wird durch sie im Allgemeinen jedem Punkte x, y eine Richtung p oder eine endliche Zahl solcher Richtungen zugeordnet werden, und die Aufgabe der Integration derselben kommt darauf hinaus, Curven

$$f(x,\ y,\ \alpha) = 0$$

(wo α ein Parameter) zu finden, welche in jedem ihrer Punkte von einer der zugehörigen Richtungen p berührt werden, oder — anders

ausgedrückt — die von den einzelnen Punkten x, y ausgehenden Bogenelemente x, y, p zu Curven an einander zu reihen.

Fortan wollen wir x, y, p die *Coordinaten* des betreffenden Bogenelementes nennen, und es möge sogleich als ein Grundgedanke des Folgenden hervorgehoben werden, dass diese Coordinaten immer als *gleichberechtigte* Veränderliche gedacht werden. Die Bogenelemente, welche $\varphi = 0$ genügen, sollen die *Hauptelemente der Gleichung* (statt Elemente der Hauptcoincidenz) heissen, und die Curven $f = 0$, welche die Integrale von $\varphi = 0$ vorstellen, die zugehörigen *Integralcurven*. Aus den ∞^3 Hauptelementen (d. i. Elementen des identischen Connexes $u_x = 0$), welche es überhaupt gibt, hebt die Gleichung $\varphi = 0$ ∞^2 heraus, und diese erscheinen durch die Integralcurven in ∞^1 Gruppen von je ∞^1 Hauptelementen zerlegt. Dabei besitzen die ∞^1 Hauptelemente, welche sich an dieselbe Integralcurve anschliessen, eine bestimmte ausgezeichnete Gruppirung. Insofern man nämlich eine Tangente der Curve als Verbindungslinie zweier successiven Punkte derselben auffasst, kann man sagen, dass von zwei auf einander folgenden Hauptelementen einer Integralcurve

$$x,\ y,\ p \quad \text{und} \quad x + dx,\quad y + dy,\quad p + dp$$

die Gerade des einen durch den Punkt des andern hindurchgeht, was analytisch in der Gleichung:

$$dy - p\,dx = 0, \tag{2}$$

d. i. in der Definitionsgleichung von p seinen Ausdruck findet. Da diese Gleichung weiterhin sehr häufig vorkommt, so soll die Beziehung zweier benachbarten Hauptelemente, welche ihr genügen, mit dem besonderen Namen der *vereinigten Lage* beider Elemente belegt werden.

Wenden wir jetzt auf den hier erörterten, gewöhnlichen Begriff der Integralcurve die eine Grundanschauung der projectivischen Geometrie an, dass alle Vorkommnisse als gleichberechtigt gedacht werden, welche durch *Collineation* (Projection) oder *dualistische Umformung* (Princip der Dualität) aus einander hervorgehen. Die Einführung der Collineationen verlangt nicht eigentlich eine besondere, wenigstens nicht eine aussergewöhnliche Erweiterung der zur Sprache gebrachten Begriffe. Immerhin ist indess hervorzuheben, dass man ihr zufolge ebensowohl von unendlich fernen Hauptelementen reden darf, als von im Endlichen gelegenen, wie eben bei Benutzung homogener Coordinaten am besten hervortritt; auch wird man selbstverständlich imaginäre Hauptelemente von vornherein zulassen. Es ist ferner deutlich, wie man von der Fortsetzung einer Integralcurve durchs Unendliche (durch die unendlich ferne Gerade) hindurch zu denken hat, dass insbesondere z. B. die unendlich ferne Gerade selbst als Integralcurve

auftreten kann, etc. Weiter schon geht es über die gewöhnliche Auffassungsweise hinaus, wenn man consequenter Weise verlangt, dass z. B. auch bei den Untersuchungen über singuläre Lösungen unendlich ferne Vorkommnisse gleichmässig berücksichtigt werden sollen. Ein neuer Gedanke wird indess durch Betrachtung der dualistischen Umformungen eingeführt. Durch sie entstehen aus den Hauptelementen, welche sich an eine Curve anschliessen, im Allgemeinen die Hauptelemente einer neuen Curve. Letztere artet jedoch in einen Punkt aus, wenn erstere aus einer Geraden besteht; und so wird man dazu geführt, neben der Geraden auch *den Punkt* oder, wenn man will, *den Strahlbüschel als mögliche Form einer Integralcurve anzusehen.* Diese Auffassung ist in der That in Uebereinstimmung mit der Gleichung (2), welche für zwei consecutive Hauptelemente einer Integralcurve charakteristisch ist; dieselbe ist eben auch erfüllt, wenn man $dx = dy = 0$ setzt, während p beliebig bleibt, d. h. wenn sich ein Hauptelement um einen festen Punkt dreht.

Ein Beispiel hierfür gibt die Schaar der Integralcurven eines Connexes (1, 1), welche im Allgemeinen in der Form:

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} x_3^{\lambda_3} = \text{Const.}$$

dargestellt werden können (p. 979), wo $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Hier bilden die drei Seiten des Fundamentaldreiecks eine Curve der Schaar; ebenso sind aber auch die drei Ecken desselben als Integrale aufzufassen, denn die Liniencoordinaten-Gleichung der Curven wird von ganz derselben Form. So gut es ferner Differentialgleichungen gibt, deren Integralcurven aus geraden Linien bestehen (z. B. die der Gleichung $p = 0$), wird man auch Gleichungen concipiren, als deren Integralcurven nur Punkte auftreten. Analytisch sind das einfach diejenigen Gleichungen, welche p nicht enthalten, d. h. Gleichungen der Form $\varphi(x, y) = 0$ oder einfach $x = 0$. Ihr genügen alle Hauptelemente, deren Punkte auf einer festen Curve liegen (p. 937 f.), und die Integralcurven, welche sich aus ihnen bilden lassen, sind eben diese Punkte selbst, aufgefasst als Träger von Strahlbüscheln — ausserdem noch die von den Punkten gebildete Curve, welche als singuläre Lösung zu betrachten ist.*)

Den hier genannten Forderungen der projectivischen Geometrie werden wir genügen, wenn wir (zunächst unter Nicht-Berücksichtigung des Unendlich-Weiten) eine Integralcurve in folgender Weise definiren:**)

*) Vgl. das letzte Beispiel am Schlusse dieser Abtheilung.

**) Vgl. Lie: Zur Theorie partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, Göttinger Nachrichten, 1872, p. 473.

Eine einfach unendliche Reihe von Hauptelementen x, y, p soll eine Integralcurve oder besser (damit der Ausdruck Curve kein Missverständniss hervorruft) eine Integral-Mannigfaltigkeit von einer Dimension („Integral-M_1") genannt werden, wenn für je zwei consecutive, im Endlichen gelegene Hauptelemente x, y, p und $x + dx, y + dy, p + dp$ die Bedingung (2) *erfüllt ist, nämlich:*

$$dy - p\,dx = 0\,.$$

Die Aufgabe, eine Gleichung $\varphi(x, y, p) = 0$ zu integriren, lässt sich dann, unter Einschluss des Falles, dass p in φ nicht vorkommt, dahin formuliren, dass *die ∞^2 Hauptelemente der Gleichung $\varphi = 0$ in ∞^1 Integral-M_1 zusammengefasst werden sollen.*

Analytisch wird man daher, um alle Fälle zu umfassen, verlangen, eine zutretende Gleichung, die einen willkürlichen Parameter α enthält:

$$\psi(x, y, p, \alpha) = 0 \tag{3}$$

aufzustellen der Art, dass vermöge $\varphi = 0$ und $\psi = 0$, unabhängig von dem Werthe des Parameters α, die Bedingung (2) erfüllt ist, sei es, dass dies für alle Hauptelemente, welche den Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ genügen, oder nur für einen Theil derselben eintritt. In der That bilden ja für einen gegebenen Werth von α die beiden Gleichungen gemeinsamen Hauptelemente eine einfach unendliche Schaar; und man erhält die Gleichung der Integralcurven in Punktcoordinaten

$$f(x, y, \alpha) = 0\,, \tag{4}$$

falls die Aufstellung einer solchen überhaupt möglich ist, durch Elimination von p aus $\varphi = 0$ und $\psi = 0$. Man kann aber auch die Gleichung (4) selbst als eine Gleichung der Form (3) auffassen, insofern sie zusammen mit der hinzugedachten Gleichung

$$p = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}$$

die Combination der Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ vollkommen vertritt. Enthält die Gleichung (1) die Grösse p nicht, so genügt auch nicht eine Gleichung der Form (4), um die Integral-M_1 darzustellen. Man wird vielmehr mit der Gleichung $\varphi = 0$ eine Gleichung (3) combiniren müssen, so dass in diesem Falle unsere neue Formulirung des Integrationsproblems in der That *nothwendig* wird. Dabei ist von selbst deutlich, dass diejenigen Gleichungen (3), welche jetzt zur Darstellung der Integral-M_1 von $\varphi = 0$ anwendbar werden, eben solche Gleichungen sind, welche p nicht enthalten, wohl aber einen Parameter α.

Es kommt dann ja nur darauf an, die Punkte der Curve $\varphi = 0$ darzustellen, und dies geschieht am einfachsten durch den Schnitt von $\varphi = 0$ mit einer einfach unendlichen Schaar anderer Curven.

Die Eigenschaften, denen eine Function ψ genügen muss, um in der geschilderten Weise eine Integral-M_1 von φ zu bestimmen, lassen sich durch eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung darstellen. Man muss nämlich dann zu jedem gemeinsamen Hauptelemente von φ und ψ ein benachbartes Hauptelement finden können, welches mit ihm in vereinigter Lage ist (p. 1016) und auch beiden Gleichungen angehört; d. h. es müssen die drei Gleichungen zusammenbestehen:

$$(5)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\,dp &= 0. \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \psi}{\partial p}\,dp &= 0. \\ p\,dx - dy \qquad\qquad &= 0; \end{aligned}$$

und aus ihnen folgt die Gleichung:

$$(6)\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial p} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial p} + p\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial p} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right\} = 0.$$

*Dies ist die Bedingung dafür, dass die gemeinsamen Hauptelemente von $\varphi = 0$, $\psi = 0$ (oder auch nur ein abtrennbarer Theil dieser Hauptelemente) eine Integral-M_1 für beide Gleichungen bilden.**) Auszuschliessen hat man selbstverständlich, allgemein zu reden, den Fall, wo zwei der Gleichungen (5) mit einander übereinstimmen, also wenn:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial p} = \frac{\partial \psi}{\partial x} : \frac{\partial \psi}{\partial y} : \frac{\partial \psi}{\partial p},$$

was z. B. für $\varphi = \psi +$ Const. eintritt, sowie den Fall, in welchem

---

*) Vgl. Jacobi: Vorlesungen über Dynamik, herausgegeben von Clebsch, Berlin 1866, p. 172 und 237 ff. — Die Gleichung (6) nämlich geht in die Jacobi'sche Bedingungsgleichung über, wenn man noch den Quotienten $p : q$ statt p einführt, wo dann p, q ganz wie Liniencoordinaten zu behandeln sind. Man hat dann die Grössen dx, dy, dp, dq aus den vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\,dp + \frac{\partial \varphi}{\partial q}\,dq &= 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \psi}{\partial p}\,dp + \frac{\partial \psi}{\partial q}\,dq &= 0 \\ p\;dx + \;q\;\;dy \qquad\qquad\qquad &= 0 \\ x\;\;dp + \;\;y\;\;dq &= 0, \end{aligned}$$

zu eliminiren, und dies gibt in Rücksicht darauf, dass φ, ψ in p, q homogen sind, die Jacobi'sche Bedingungsgleichung:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial q} - \frac{\partial \varphi}{\partial p}\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial q}\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0.$$

Vgl. auch unten die Behandlung mit homogenen Coordinaten.

die Gleichung (6) durch das Verschwinden der einzelnen Differentialquotienten von φ oder ψ befriedigt wird. Auf diese Ausnahmefälle werden wir weiterhin beim Gebrauche homogener Coordinaten zurückkommen.

Dasselbe Resultat können wir in einer andern Form ableiten und aussprechen, welche später für uns von Nutzen sein soll. Die Gleichungen (5) nämlich sagen aus, dass der Ausdruck $p\,dx - dy$ verschwindet in Folge der Gleichungen $d\varphi = 0$, $d\psi = 0$; und dies tritt offenbar immer ein, wenn man eine Function $\chi\,(x, y, p)$ so bestimmen kann, dass

$$(7) \qquad d\varphi - \chi\, d\psi = (dy - p\,dx)\,\varrho\,,$$

und umgekehrt. Wir wollen daher jetzt die Bedingung aufstellen, welchen die Functionen φ, ψ, χ genügen müssen, damit eine Gleichung dieser Art möglich ist. Die Gleichung (7) zerfällt unmittelbar in die folgenden Relationen:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \chi\,\frac{\partial\psi}{\partial y} = \varrho\,, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \chi\,\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\,\varrho p$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial p} - \chi\,\frac{\partial\psi}{\partial p} = 0\,.$$

Hieraus findet man durch Elimination von χ und ϱ in der That wieder die Gleichung (6). Letztere erhalten wir in anderer Gestalt durch Einführung totaler Differentialquotienten; da nämlich:

$$(8) \qquad \frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p\,\frac{\partial}{\partial y}\,,$$

so gibt die zweite Gleichung in Rücksicht auf die erste:

$$\frac{d\varphi}{dx} - \chi\,\frac{d\psi}{dx} = 0\,;$$

in Verbindung mit der dritten Gleichung folgt ferner:

$$(9) \qquad \frac{d\varphi}{dx}\,\frac{\partial\psi}{\partial p} - \frac{\partial\varphi}{\partial p}\,\frac{d\psi}{dx} = 0\,;$$

eine Gleichung, die sich vermöge (8) auch direct aus (6) ergibt. *Sollen also* $\varphi = 0$, $\psi = 0$ *eine Integral-*M_1 *gemein haben, d. h. soll eine Gleichung der Form* (7) *bestehen, so muss die Bedingung* (9) *erfüllt sein*, in welcher im Gegensatze zu (6) totale Differentialquotienten vorkommen.

Diese allgemeinen Betrachtungen gewinnen nun ungemein an Symmetrie und Uebersichtlichkeit der Darstellung, wenn man homogene Coordinaten, und zwar gleichzeitig Punkt- und Liniencoordinaten, einführt. Es geschieht dies im allgemeinen Falle ebenso, wie früher insbesondere für algebraische Gleichungen erläutert wurde (p. 965), indem man die Differentialgleichung in eine Gleichung zwischen

Punkt- und Liniencoordinaten verwandelt und dann die Bedingungen $u_x = 0$, $u_{dx} = 0$ hinzunimmt, also durch die Substitution:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad p = -\frac{u_1}{u_2}, \quad xp - y = \frac{u_3}{u_2}.$$

In den so entstehenden homogenen Functionen *nullter Dimension* werden zunächst die Nenner x_3, u_2 eine ausgezeichnete Rolle spielen; es sind indess keineswegs nur Functionen mit solchen Nennern zu betrachten, es wird vielmehr vortheilhaft sein, dieselben durch die *allgemeinsten* Functionen nullter Ordnung und nullter Klasse zu ersetzen. Hat man es also insbesondere mit algebraischen Differentialgleichungen zu thun, so wird man nicht nothwendig von solchen Functionen ausgehen, deren Nenner durch Potenzen von u_2 und x_3 gebildet wird, sondern man wird statt dessen Quotienten zweier algebraischen Functionen wählen, in denen Zähler und Nenner von gleicher Allgemeinheit sind, so dass, wenn z. B. Φ gleich dem Quotienten der Connexe $a_x{}^m u_\alpha{}^n$ und $a'_x{}^m u_{\alpha'}{}^n$ gesetzt wird, die Gleichung $\Phi =$ Const. die allgemeinste lineare Schaar von Connexen darstellt.

Die Bedingung (2) *der vereinigten Lage* zweier benachbarten Elemente x, u und $x + dx$, $u + du$ ist jetzt durch die beiden Gleichungen zu ersetzen:

$$(10) \qquad \Sigma u_i dx_i = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma x_i du_i = 0,$$

von denen vermöge $u_x = 0$, $(u + du)_{x+dx} = 0$ jede eine Folge der andern ist. In der That sagt ja die erste Gleichung (10) in Verbindung mit $u_x = 0$ dasselbe aus, wie Gleichung (2), nämlich, dass von dem Punkte x eine Fortschreitungsrichtung u ausgeht, welche durch den Punkt $x + dx$ bestimmt wird; Analoges gilt für die zweite Gleichung (10).

Setzen wir nunmehr voraus, dass eine in x und u homogene Gleichung nullter Dimension vorliegt:

$$\Phi(x, u) = 0$$

und suchen die Bedingung, dass dieselbe mit einer anderen, $\Psi(x, u) = 0$, eine Integral-M_1 gemein habe, d. h. dass die den Gleichungen $\Phi = 0$, $\Psi = 0$, $u_x = 0$ genügenden Hauptelemente eine Integralcurve (Hauptcoincidenzcurve) von $\Phi = 0$ bilden. An Stelle von (5) haben wir dann die Bedingungen:

$$\Sigma \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i + \Sigma \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} du_i = 0$$

$$\Sigma \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} dx_i + \Sigma \frac{\partial \Psi}{\partial u_i} du_i = 0$$

$$\Sigma u_i dx_i = 0, \quad \Sigma x_i du_i = 0;$$

und aus ihnen ergibt sich durch Elimination der dx_i, du_i, wenn mit

den Indices 1, 2, 3 die Differentiation nach x_1, x_2, x_3 mit I, II, III die nach u_1, u_2, u_3 bezeichnet wird, und wenn man die absoluten Werthe der x, u durch die Gleichungen $k_x = 1$, $u_l = 1$ festlegt (so dass noch: $\Sigma k_i dx_i = 0$, $\Sigma l_i du_i = 0$), die Bedingungsgleichung:

$$0 = \begin{vmatrix} \Phi_1 & u_1 & k_1 & \Psi_1 & 0 & 0 \\ \Phi_2 & u_2 & k_2 & \Psi_2 & 0 & 0 \\ \Phi_3 & u_3 & k_3 & \Psi_3 & 0 & 0 \\ \Phi_{\mathrm{I}} & 0 & 0 & \Psi_{\mathrm{I}} & x_1 & l_1 \\ \Phi_{\mathrm{II}} & 0 & 0 & \Psi_{\mathrm{II}} & x_2 & l_2 \\ \Phi_{\mathrm{III}} & 0 & 0 & \Psi_{\mathrm{III}} & x_3 & l_3 \end{vmatrix}$$

$$= \Sigma \pm \Phi_1 u_2 k_3 \,.\, \Sigma \pm \Psi_{\mathrm{I}} x_2 l_3 - \Sigma \pm u_1 k_2 \Psi_3 \,.\, \Sigma\, x_1 l_2 \Phi_{\mathrm{III}} \,.$$

Bezeichnen wir nun mit i die Indices 1, 2, 3, mit j die Indices I, II, III, so ist in Rücksicht auf das Euler'sche Theorem:

$$\Sigma \pm \Phi_1 u_2 k_3 \,.\, \Sigma \pm \Psi_{\mathrm{I}} x_2 l_3 = \begin{vmatrix} \Sigma \Psi_j \Phi_i & \Sigma \Psi_j u_j & \Sigma \Psi_j k_j \\ \Sigma \Phi_i x_i & u_x & k_x \\ \Sigma \Phi_i l_i & u_l & k_l \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \Sigma \Psi_j \Phi_i & 0 & \Sigma \Psi_j k_j \\ 0 & 0 & 1 \\ \Sigma \Phi_i l_i & 1 & k_l \end{vmatrix} = - \Sigma \Psi_j \Phi_i \,.$$

Eine analoge Gleichung gilt für das Product der beiden anderen Determinanten, und somit erhalten wir die Bedingung:

$$(11) \qquad \Sigma \Phi_j \Psi_i - \Sigma \Psi_j \Phi_i \equiv \sum \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} - \frac{\partial \Psi}{\partial u_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) = 0 ,$$

welche vermöge $\Phi = 0$, $\Psi = 0$, $u_x = 0$ bestehen muss.

Diese partielle Differentialgleichung tritt an Stelle von (6) oder (9); sie ist, wie wir uns ausdrücken wollen, die nothwendige Bedingung dafür, dass *die Gleichungen* $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ *„in involutorischer Lage" sind* (eine Integral-M_1 gemein haben). Die Gleichung (11) ist indess auch erfüllt für singuläre Hauptelemente von Φ und Ψ, für welche alle Grössen Φ_i, Φ_j oder Ψ_i, Ψ_j verschwinden (z. B. wenn $\Psi = f^2$), ferner auch, wenn die Grössen Φ_i, Φ_j bez. den Grössen Ψ_i, Ψ_j proportional werden. Nur mit Ausschluss solcher Fälle darf man daher auch den Satz aussprechen:

Das Problem, die Gleichung $\Phi = 0$ *zu integriren, coincidirt mit der Aufgabe, eine in* x *und* u *homogene Function* Ψ *nullter Dimension zu finden, welche der partiellen Differentialgleichung* (11) *genügt und einen Parameter* α *enthält.*

Die Vortheile, welche der Gebrauch homogener Coordinaten gegenüber der früheren Darstellung bietet, sind schon an diesem

Resultate evident. Zunächst nämlich ist die Gleichung (11) im Gegensatze zu (6) und (9) durchaus symmetrisch, und sie enthält allein partielle Differentialquotienten*); ferner bedürfen jetzt die unendlich fernen Elemente keine besondere Betrachtung mehr; es bleiben nur die soeben schon genannten, im Wesen der Sache begründeten, Ausnahmefälle zu berücksichtigen.

Von besonderem Interesse und für spätere Anwendung von besonderem Nutzen wird nun das in Gleichung (7) gegebene Problem, wenn man es unter Anwendung homogener Punkt- und Liniencoordinaten behandelt. Da der Ausdruck $dy - p\,dx$ alsdann durch u_{dx} resp. $(du)_x$ unter der Bedingung $u_x = 0$ zu ersetzen ist, so haben wir offenbar folgende Aufgabe: Es sollen die Bedingungen angegeben werden, welchen die Functionen Φ_1, Φ_2, Φ_3, F_1, F_2, F_3 genügen müssen, damit eine Gleichung der Form besteht:

$$(12) \qquad \Phi_1 dF_1 + \Phi_2 dF_2 + \Phi_3 dF_3 = u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + u_3 dx_3 ,$$

aus der dann wegen $u_x = 0$ die symmetrische Gleichung folgt:

$$(13) \qquad F_1 d\Phi_1 + F_2 d\Phi_2 + F_3 d\Phi_3 = x_1 du_1 + x_2 du_2 + x_3 du_3 .$$

Auf der rechten Seite von (12) könnten wir, wie in (7) noch einen Factor ϱ hinzufügen, doch wollen wir uns denselben in den Φ_i enthalten denken; und zwar möge er immer so bestimmt werden, dass alle Functionen Φ_i und F_i von der nullten Dimension in x und u sind.

Die Gleichung (12) schreiben wir in der Form:

$$\sum_i \sum_k \Phi_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k} dx_k + \sum_i \sum_k \Phi_i \frac{\partial F_i}{\partial u_k} du_k = u_{dx} ,$$

woraus man sofort findet:

$$(14) \qquad \sum_i \Phi_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k} = u_k , \quad \sum_i \Phi_i \frac{\partial F_i}{\partial u_k} = 0.$$

Durch Differentiation ergibt sich weiter:

$$\frac{\partial}{\partial x_h} \sum_i \Phi_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_i \Phi_i \frac{\partial F_i}{\partial x_h} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial u_h} \sum_i \Phi_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_i \Phi_i \frac{\partial F_i}{\partial u_h} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial u_k} \sum_i \Phi_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_i \Phi_i \frac{\partial F_i}{\partial u_k} = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial u_h} \sum_i \Phi_i \frac{\partial F_i}{\partial u_k} - \frac{\partial}{\partial u_k} \sum_i \Phi_i \frac{\partial F_i}{\partial u_h} = 0,$$

*) Vgl. auch die Anmerkung auf p. 1019.

und also durch Ausführung:

$$\sum_i \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_h}\frac{\partial F_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k}\frac{\partial F_i}{\partial x_h}\right) = 0, \quad \sum_i \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_h}\frac{\partial F_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k}\frac{\partial F_i}{\partial u_h}\right) = 0,$$

$$\sum_i \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_k}\frac{\partial F_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k}\frac{\partial F_i}{\partial u_k}\right) = 1, \quad \sum_i \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_h}\frac{\partial F_i}{\partial u_k} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_k}\frac{\partial F_i}{\partial u_h}\right) = 0.$$

Diese vier Relationen sagen aus, dass aus den sechs Gleichungen $(i = 1, 2, 3)$

$$v_i = \sum_k \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k} y_k + \frac{\partial F_i}{\partial u_k} z_k\right),$$

$$w_i = \sum_k \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} y_k + \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_k} z_k\right)$$

die sechs weiteren Gleichungen folgen:

$$y_h = \sum_i \left(v_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_h} - w_i \frac{\partial F_i}{\partial u_h}\right)$$

$$-z_h = \sum_i \left(v_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_h} - w_i \frac{\partial F_i}{\partial x_h}\right).$$

Setzt man also diese Werthe von y_h, z_h in die vorhergehenden Gleichungen ein, so müssen Identitäten herauskommen; und in dieser Weise findet man, dass auch die folgenden Relationen bestehen:

$$(15) \qquad (F_i F_k) = 0, \quad (F_i \Phi_k) = 0, \quad (\Phi_i \Phi_k) = 0, \quad (F_i \Phi_i) = 1,$$

wo allgemein das Symbol (PQ) den Ausdruck bezeichnet, dessen Verschwinden nach (11) die Bedingung der involutorischen Lage für die Gleichungen $P = 0$, $Q = 0$ gibt, wo also:

$$(16) \qquad (PQ) = \sum_i \left(\frac{\partial P}{\partial x_i}\frac{\partial Q}{\partial u_i} - \frac{\partial P}{\partial u_i}\frac{\partial Q}{\partial x_i}\right).$$

Dieselbe Schlussweise lässt sich auch umgekehrt verfolgen; somit hat man den wichtigen Satz:

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Bestehen der Gleichung (12) *oder* (13), *sind unter Hinzunahme von* $u_x = 0$ *durch die partiellen Differentialgleichungen* (15) *gegeben, deren Bedeutung aus* (16) *erhellt.**)

*) Vgl. S. Lie: Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania, 3. Mai 1872 u. 21. Mai 1873 und Math. Annalen, Bd. 8, wo der Beweis aus dem Pfaff'schen Probleme abgeleitet wird. Für die Herleitung des Textes vgl. A. Mayer: Göttinger Nachrichten, April 1874 oder Math. Annalen, Bd. 8, p. 304 und Lie: ib. Bd. 9, p. 257. — Fügt man auf der rechten Seite von (12) der Allgemeinheit wegen einen Factor ϱ hinzu, so tritt an Stelle der letzten Gleichung (15) die Gleichung: $(F_i \Phi_i) = \varrho$, alles andere bleibt ungeändert; vgl. Mayer a. a. O. In Mayer's Formeln hat man nämlich nur immer z constant zu nehmen, um die des Textes zu erhalten.

Gerade die letzten Entwicklungen, insbesondere die Gleichungen (15) werden nun von grossem Nutzen, wenn es sich darum handelt, alle möglichen sogenannten *Berührungstransformationen* aufzustellen. Unter den letzteren versteht man solche Transformationen der Ebene, welche Curven, die sich berühren, in Curven mit derselben Eigenschaft überführen, *Transformationen also, denen gegenüber Berührung eine invariante Eigenschaft ist.**) Dahin gehören zunächst die Collineationen der Ebene und überhaupt alle eigentlichen *Punkttransformationen*, d. i. Transformationen der Form:

$$(16)\qquad x' = f(x, y), \quad y' = \varphi(x, y),$$

ferner auch alle *dualistischen Umformungen.* Schon bei letzteren kann es eintreten, dass eine Curve (Gerade) in einen Punkt verwandelt wird; und etwas Analoges tritt überhaupt in dem allgemeineren Falle ein, wo man nicht den Punkt, sondern das Hauptelement (p. 1016) der Coordinatenbestimmung zu Grunde legt und demgemäss als Curve jede einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Hauptelementen bezeichnet, von denen je zwei benachbarte in vereinigter Lage sind. Diese Auffassung führt dann zu den allgemeinsten Transformationen, bei denen Berührung eine invariante Beziehung ist. Eine Berührungstransformation können wir nämlich offenbar auch so definiren, dass *sie vereinigt gelegene benachbarte Elemente wieder in solche überführt.*

Wir wollen zunächst wieder nicht-homogene Coordinaten für die analytische Darstellung benutzen. Nach unserer letzten Definition erhalten wir dann die allgemeinste Berührungstransformation, wenn wir die Coordinaten x, y, p eines Hauptelementes durch solche Functionen der neuen Coordinaten x', y', p' ersetzen, dass die Ausdrücke

$$dy' - p'dx' \quad \text{und} \quad dy - p\,dx$$

immer zugleich verschwinden. Setzen wir also:

$$(17)\qquad x' = \varphi(x, y, p), \quad y' = \psi(x, y, p) \quad p' = \chi(x, y, p),$$

so muss zwischen φ, ψ, χ die Gleichung (7) bestehen; und aus unseren früheren Entwicklungen folgt dann:

Die Gleichungen (17) *stellen eine Berührungstransformation dar, wenn die Bedingung* (6) *oder* (9) *erfüllt ist, d. h. wenn:*

$$\frac{d\varphi}{dx}\frac{\partial\psi}{\partial p} - \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{d\psi}{dx} = 0,$$

wo $\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial y}$.

*) Dieselben sind von Lie eingeführt worden (wenngleich auch vorher gelegentlich von Plücker und Jacobi betrachtet); vgl. besonders dessen Aufsatz: Begründung einer Invariantentheorie der Berührungstransformationen, Math. Annalen, Bd. 8, wo die Resultate verschiedener früheren Arbeiten zusammengefasst sind.

Neben diese allgemeinste Darstellung, bei der nicht unterschieden wird, ob den Punkten x, y wieder Punkte oder Curven entsprechen, stellen sich speciellere.

Entsprechen nämlich den Punkten x, y ∞^2 Curven, so mögen diese durch die Gleichung (Aequatio directrix):

$$(18) \qquad \Omega(x, y, x', y') = 0$$

gegeben sein, vermöge deren den ∞^1 Hauptelementen x, y, p, die den Punkt x, y enthalten, die ∞^1 Hauptelemente x', y', p' entsprechen, welche sich an die Curve $\Omega = 0$ anschliessen. Den Punkten einer Curve $f(x, y) = 0$ entspricht dann eine Schaar von Curven $\Omega = 0$, und die Enveloppe der letzteren (welche auch aus einzelnen Punkten bestehen kann) ist die der Curve $f = 0$ zugehörige Curve.*) Ein Element x, y, p, welches die beiden Punkte x, y und $x + dx$, $y + dy$ enthält, welches also die Bedingung $dy - p\,dx = 0$ befriedigt, hat dasjenige Element zum entsprechenden, welches den Curven

$$\Omega = 0 \quad \text{und} \quad \Omega + \frac{\partial \Omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy = 0$$

gemeinsam ist; ist also x', y' ein Schnittpunkt beider Curven, so ist das zugehörige p' offenbar gegeben durch:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x'} + p' \frac{\partial \Omega}{\partial y'} = 0.$$

Zugleich ist:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy = 0$$

oder:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} + p \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0.$$

Jede Berührungstransformation, welche nicht eine blosse Punkttransformation ist, kann folglich auch dargestellt werden durch Gleichungen der Form:

$$(19) \qquad \Omega(x, y, x', y') = 0$$
$$p = -\frac{\frac{\partial \Omega}{\partial x}}{\frac{\partial \Omega}{\partial y}}, \quad p' = -\frac{\frac{\partial \Omega}{\partial x'}}{\frac{\partial \Omega}{\partial y'}}.$$

Berührungstransformationen dagegen, welche blosse Punkttransformationen sind, können durch die Gleichungen (16) dargestellt werden:

$$x' = f(x, y), \quad y' = \varphi(x, y);$$

*) Vgl. Plücker: Analytisch geometrische Entwicklungen, Bd. 2, Essen 1831, p. 251. — Ein Beispiel gibt der auf p. 365 f. betrachtete Fall, wo die Curven $\Omega = 0$ durch die ersten Polaren einer festen Curve gegeben werden.

man hat dann:

$$(20) \qquad p' = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} p}{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} p} .$$

Die hier gegebenen analytischen Definitionen der Berührungstransformationen lassen sich nun unmittelbar für die homogenen Coordinaten x, u aussprechen, wenn man sich erinnert, dass die Bedingung $dy - p\,dx = 0$ durch $u_{dx} = 0$, bez. $(du)_x = 0$ zu ersetzen ist, und dass dann die Bedingung (7) in die Gleichung (12) übergeht. Wir haben so zunächst den Satz, welcher alle Fälle umfasst:

Durch die Gleichungen:

$$(21) \qquad y_i = F_i(x, u), \quad v_i = \Phi_i(x, u)$$

in denen die F_i, Φ_i homogene Functionen nullter Dimension sind, wird eine Berührungstransformation dargestellt, wenn die Bedingungen erfüllt sind:

$$(F_i F_k) = 0, \quad (F_i \Phi_k) = 0, \quad (\Phi_i \Phi_k) = 0,$$
$$(F_i \Phi_i) = 1 .$$

In der That wird ja dann vermöge $v_y = 0$, $u_x = 0$:

$$\Sigma v_i dy_i = \Sigma u_i dx_i, \quad \Sigma y_i dv_i = \Sigma x_i du_i .$$

Die Gleichungen (19) dagegen geben jetzt den Satz: *Jede Berührungstransformation, die keine Punkttransformation ist, kann dargestellt werden durch Gleichungen der Form:*

$$(22) \qquad \begin{gathered} \Omega(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) = 0 \\ \sigma u_i = \frac{\partial \Omega}{\partial x_i}, \quad \tau v_i = \frac{\partial \Omega}{\partial y_i} . \end{gathered}$$

Wenn endlich eine *Punkttransformation* vorliegt, so kann man folgende Darstellung anwenden. Man gehe von zwei Gleichungen zwischen den x_i und y_i:

$$\Omega'(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad \Omega''(x, y) = 0$$

aus und bestimme ein durch x gehendes Hauptelement mittelst eines Parameters λ durch die Gleichungen:

$$\varrho u_i = \frac{\partial \Omega'}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial \Omega''}{\partial x_i} .$$

Das entsprechende durch y gehende Hauptelement ist dann bestimmt durch:

$$\sigma v_i = \frac{\partial \Omega'}{\partial y_i} + \lambda \frac{\partial \Omega''}{\partial y_i} ;*)$$

*) Vgl. Jacobi's Vorlesungen über Dynamik, p. 470 und Lie: Math. Annalen, Bd. 8, p. 223.

und *die Gleichungen:*

$$\Omega' = 0, \quad \Omega'' = 0$$

$$\varrho u_i = \frac{\partial \Omega'}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial \Omega''}{\partial x_i}, \quad \sigma v_i = \frac{\partial \Omega'}{\partial y_i} + \lambda \frac{\partial \Omega''}{\partial y_i}$$

stellen zusammen die Berührungstransformation dar. —

Die fundamentale Bedeutung der Berührungstransformationen für die Theorie der Differentialgleichungen ist schon aus ihrer Definition evident und wird im Folgenden noch mehr hervortreten. In der That erhellt aus unserer Definition der Integral-M_1 einer Differentialgleichung (p. 1018) unmittelbar:

Die Berührungstransformationen sind identisch mit denjenigen Transformationen einer Differentialgleichung (oder eines Connexes), bei welchen die Integral-M_1 der gegebenen Gleichung in die Integral-M_1 der neuen Gleichung übergehen.

Das gilt gleichzeitig für *jede beliebige* Differentialgleichung, und hierdurch ist zunächst ein Unterschied der allgemeinen Berührungstransformationen gegenüber denjenigen Transformationen bedingt, welche wir früher betrachteten, und welchen nur die beschränkende Bedingung auferlegt war, die Integral-M_1 *einer* gegebenen Gleichung $f = 0$ in die Integral-M_1 der transformirten Gleichung überzuführen, welche sich also zu den allgemeinen Berührungstransformationen ähnlich verhalten, wie die eindeutigen Transformationen einer einzelnen Curve zu den Cremona'schen Transformationen der ganzen Ebene. Wenn wir bei diesen früheren Betrachtungen ausserdem die Eindeutigkeit der Transformation voraussetzen, so ist dies für die nunmehr vorliegenden Fragen irrelevant; in der That gelten unabhängig davon die damaligen Entwicklungen, denen zufolge die Transformation (21) folgenden beiden partiellen Differentialgleichungen genügen muss, um zu einer Gleichung $f(x, u) = 0$ in besagter Beziehung zu stehen (p. 976):

$$\sum_i \Phi_i (F_i f) = K f + L u_x$$

$$\sum_i F_i (\Phi_i f) = K' f + L' u_x.$$

Sollen diese Bedingungen unabhängig von $f = 0$ vermöge $u_x = 0$ erfüllt sein, so erhält man aus ihnen in der That wieder die Gleichungen (14), aus denen die Gleichungen (15) hervorgingen. Man hat nämlich zu dem Zwecke nur auf der rechten Seite der ersten Gleichung f bis auf einen Zahlenfactor durch $\Sigma \frac{\partial f}{\partial u_i} u_i$ und in der zweiten Gleichung durch $\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i$ zu ersetzen. Lässt man alsdann die Coëfficienten der Grössen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial u_i}$ einzeln Null sein, so folgen aus

der ersten Gleichung wieder die Bedingungen (14) bis auf den rechts auftretenden Factor K und aus der zweiten Gleichung die dualistisch entsprechenden Bedingungen:

$$\sum_i F_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_k} = K x_k, \quad \sum_i F_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} = 0. -$$

Erwähnen wir hier namentlich sofort den folgenden wichtigen Satz:

*Jede Differentialgleichung erster Ordnung kann durch Berührungstransformation in jede andere Differentialgleichung erster Ordnung übergeführt werden;**) *sie hat also gegenüber diesen Transformationen keine Invarianten.*

Zum Beweise hat man nur zu zeigen, dass man die Integral-M_1 der einen Gleichung in die der andern überführen kann; und dass dies möglich ist, wird sofort deutlich, wenn man beachtet, dass jede zweifach unendliche Curvenschaar in die zweifach unendlich vielen Punkte der Ebene und also jede einfach unendliche Curvenschaar in die Punkte einer Geraden, etwa $x_1 = 0$, transformirt werden kann. Die Möglichkeit nämlich, jede Differentialgleichung in jede andere zu transformiren, erwächst aus der hiermit bewiesenen Möglichkeit, jede Gleichung in die kanonische Form $x_1 = 0$ zu bringen. Mit der Transformation der Differentialgleichung in diese einfachste Form würde dann selbstverständlich auch ihre Integration geleistet sein, denn die Integralcurven der Gleichung $x_1 = 0$ sind bekannt, sie bestehen nach dem Obigen aus den Punkten der Linie $x_1 = 0$, aufgefasst als Träger von Strahlbüscheln. Dies ist eine bemerkenswerthe Formulirung des Integrationsproblems. —

Da gegenüber den Berührungstransformationen Punkte und Curven nicht wesentlich verschieden sind, wird man, um volle Allgemeinheit zu erreichen, auch nicht mehr von Punktcoordinaten sprechen. Vielmehr wollen wir jetzt schliesslich unter x_1, x_2, x_3 die homogenen Parameter irgend einer zweifach unendlichen Schaar von Curven (M_1) verstehen, die „ausgezeichnet" heissen sollen. Eine Gleichung

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$$

soll dann diejenige Curve darstellen, welche von den ausgezeichneten M_1 umhüllt wird, deren Parameter x_i die Gleichung $\varphi = 0$ befriedigen. Die Gleichung

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

stellt, wenn die x_i als Parameter gedacht werden, eine neue, *lineare*, zweifach unendliche Schaar von M_1 dar, welche zu der ursprünglichen

*) Für Gleichungen höherer Ordnung gilt dies nicht mehr; vgl. Lie: Göttinger Nachrichten, 1872.

Schaar *conjugirt* heissen mag. Legt man den Grössen x_i, u_i solche feste Werthe bei, dass diese Gleichung erfüllt ist, so sollen sie wieder die Coordinaten eines *Hauptelementes* heissen. Aus der Bedeutung, welche wir soeben einer Gleichung $\varphi(x) = 0$ beilegten, erhellt sofort, dass dann je zwei Curven der beiden einander conjugirten Schaaren, welche ein Hauptelement bilden, sich gegenseitig berühren; so drückt sich also hier geometrisch in sich selbst dualistischem Sinne die Bedingung aus, welche an Stelle der Bedingung der vereinigten Lage von Punkt und Gerade tritt. Ueberhaupt fällt bei unserer jetzigen Coordinatenbestimmung die ausgezeichnete Stellung fort, welche sonst Punkt und Gerade gegen einander einnehmen. Auch die Zweitheilung der Berührungstransformationen in eigentliche Punkt- (bez. Linien-) Transformationen und allgemeinere Element-Transformationen verliert ihren principiellen Charakter. Es bleibt natürlich eine solche Zweitheilung in den Formeln immer bestehen, aber sie ist nicht mehr durch den geometrischen Inhalt bedingt; die Sonderung ist nur noch eine relative, auf das gewählte Coordinatensystem bezügliche, keine absolute.

Für die so definirten Hauptelemente gelten nun wieder alle die obigen Sätze, wenn man noch die vereinigte Lage benachbarter Elemente durch die Bedingung $u_{dx} = -(du)_x = 0$ definirt. Insbesondere heisst eine Gleichung $\varphi(x, u) = 0$, welche die x und u je homogen in irgend einer Weise enthält und mit $u_x = 0$ verbunden gedacht wird, eine Differentialgleichung. Die letztere integriren heisst eine neue Gleichung aufstellen:

$$\psi(x, u, \alpha) = 0$$

welche einen Parameter α enthält, so dass vermöge $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $u_x = 0$ auch

$$u_{dx} = 0, \quad \text{bez.} \quad (du)_x = 0$$

wird (p. 1021), u. s. f. Doch wollen wir diese allgemeinste Formulirung hier nicht weiter durchführen. —

Wie wir oben unendlich kleine lineare Transformationen betrachteten (p. 996), kann man nun auch *unendlich kleine Berührungstransformationen* aufstellen. Eine solche wollen wir darstellen in der Form:

$$(23) \qquad y_i = x_i + \varepsilon\varphi_i(x, u), \quad v_i = u_i + \varepsilon\psi_i(x, u),$$

wenn ε eine unendlich kleine Grösse bedeutet, und wenn die φ_i vom nullten Grade in den u_i, vom ersten in den x_i, die ψ_i vom ersten Grade in den u_i, vom nullten in den x_i sind. Im Gegensatze zu unseren früheren Annahmen benutzen wir also jetzt *Functionen erster*

*Dimension.**) Die rechten Seiten der Gleichungen (23) müssen hier wieder den Bedingungen (15) genügen, wenn man setzt:

$$F_i = x_i + \varepsilon \varphi_i\,, \quad \Phi_i = u_i + \varepsilon \psi_i\,.$$

Dann aber findet man durch Entwicklung und Auslassung infinitesimaler Grössen zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_k} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_i}\,, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial \psi_k}{\partial u_i}\,, \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial u_k} = \frac{\partial \psi_k}{\partial u_i}\,,$$

wo i, k alle Werthe 1, 2, 3, insbesondere auch beide denselben Werth annehmen dürfen. Diese Gleichungen sagen aus, dass es eine Function H gibt, für welche:

$$\varphi_i = \frac{\partial H}{\partial u_i}\,, \quad \psi_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}\,.$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen müssen von demselben Grade in x, u sein, wie die rechten Seiten von (23); es ist also:

$$\sum_i u_i \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{\partial H}{\partial u_k}\right) = 0\,, \quad \sum_i u_i \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{\partial H}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial H}{\partial x_k}\,,$$

woraus:

$$\frac{\partial}{\partial u_k}\left(\sum_i u_i \frac{\partial H}{\partial u_i}\right) = \frac{\partial H}{\partial u_k}\,, \quad \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_i u_i \frac{\partial H}{\partial u_i}\right) = \frac{\partial H}{\partial x_k}\,,$$

und durch Integration, unter Auslassung einer unwesentlichen Constanten:

$$\sum_i u_i \frac{\partial H}{\partial u_i} = H \quad \text{und ebenso:} \quad \sum_i x_i \frac{\partial H}{\partial x_i} = H\,;$$

d. h. H muss eine Function erster Dimension in den x_i und u_i sein. Setzt man noch in (23) $x + dx$ statt y, $u + du$ statt v und dt statt ε, so resultirt also der Satz:

*Ist H eine Function erster Dimension in den x_i und u_i, so kann jede unendlich kleine Berührungstransformation dargestellt werden in der Form:***)

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial u_i}\,, \quad \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}\,. \tag{24}$$

Vermöge dieser Gleichungen wird jedem Hauptelemente einer Gleichung $\Phi = 0$ ein benachbartes Hauptelement zugeordnet. Insbe-

---

*) Eine Function erster Dimension in den x wird allgemein von der Form $\Sigma A_i x_i$ sein, wenn die A_i beliebige Functionen nullter Dimension in x und u sind. Man sieht leicht, dass die Gleichungen (15) auch für Functionen von nicht nullter Dimension bestehen.

**) Vgl. Lie: Göttinger Nachrichten 1874, p. 537 und Math. Annalen, Bd. 8, p. 239.

sondere kann es dabei eintreten, dass das letztere ebenfalls der Gleichung $\Phi = 0$ angehört; und dann wird offenbar diese Gleichung durch die Transformation (24) in sich selbst übergeführt, wie wir es früher auch bei den linearen Transformationen gesehen haben (p. 906). Eine Gleichung $\Phi = 0$ von dieser Eigenschaft ist zunächst die Gleichung $H = 0$ selbst. In der That, setzt man in H $x + dx$ statt x und $u + du$ statt u, so geht in Rücksicht auf (24) H über in:

$$H + \Sigma \frac{\partial H}{\partial x_i} dx_i + \Sigma \frac{\partial H}{\partial u_i} du_i = H, \text{ q. e. d.}$$

Wendet man dagegen die Transformation H, d. i. die Transformation (24), auf eine beliebige Gleichung $\Phi = 0$ an, so wird:

$$\Phi + \Sigma \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i + \Sigma \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} du_i = \Phi + dt\, \Sigma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial u_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} \right);$$

Φ geht also in sich selbst über, sobald $(\Phi, H) = 0$ vermöge $\Phi = 0$ (oder identisch $= 0$, aber nicht erst vermöge $H = 0$).

Das Problem der Integration der Gleichung $\Phi = 0$ *ist in diesem Sinne identisch mit dem Probleme der Bestimmung einer unendlich kleinen Transformation, welche* Φ *in sich überführt.* Aber nicht gibt umgekehrt jede Function H, welche eine mit Φ involutorische Differentialgleichung darstellt, auch unmittelbar eine unendlich kleine Transformation von Φ in sich selbst. Man erkennt aus diesem Satze, wie die weitere Untersuchung dieser Transformationen von besonderem Interesse wird; doch gehen wir auch hierauf nicht mehr ein.*)

An diese Erörterungen über den begrifflichen Inhalt einer Differentialgleichung fügen wir schliesslich noch einige Bemerkungen über deren *singuläre Lösungen* an. — Man pflegt letztere gewöhnlich in folgender Weise einzuführen.**) Sind durch die Gleichung

$$f(x_1, x_2, x_3; \alpha) = 0,$$

in der α ein Parameter ist, einfach unendlich viele Curven dargestellt, so betrachte man den Ort der Schnittpunkte consecutiver Curven, dessen Gleichung sich durch Elimination von α aus

$$f = 0 \quad \text{und} \quad \frac{df}{d\alpha} = 0 \tag{25}$$

*) Insbesondere ergibt sich hier eine neue Auffassung des sogenannten Jacobi-Poisson'schen Theorems (vgl. Jacobi's Vorlesungen über Dynamik, p. 268); es gelingt ferner, die Theorie des Integrabilitätsfactors geometrisch aufzufassen. In letzterer Beziehung vgl. einen Aufsatz von Lie: Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania 1874, p. 242 ff.

**) In Betreff einer zusammenhängenden Darstellung dieser Theorien in ihrer üblichen Fassung, insbesondere nach ihrer historischen Entwicklung vgl. Boole: A treatise on differential equations, 2. ed. Cambridge and Dublin 1865, p. 163 ff. und: Supplementary volume, p. 28 ff.

ergibt. Derselbe wird, wenn zwischen den Constanten der Function f keine besondere Relationen bestehen, die *Umhüllungscurve* der Curven $f=0$ darstellen; und sie ist es, welche als singuläre Lösung derjenigen Differentialgleichung gilt, deren Integralcurven eben durch $f=0$ gegeben sind. Es kann aber eintreten, dass die so gefundene Curve keine eigentliche Umhüllungscurve ist, sondern durch den Ort der Doppelpunkte der Curven $f=0$ (oder anderer beweglichen singulären Punkte) ganz oder theilweise absorbirt wird, oder dass sich überhaupt keine Curve ergibt, wie z. B. wenn

$$f=\varphi+\alpha\psi,$$

d. h. wenn $f=0$ einen Curvenbüschel darstellt. Allerdings wird man in letzterem Falle in Folge unserer allgemeinen Definition der Integralcurven (p. 1018) die Grundpunkte eines Büschels, jeden als Träger eines Strahlbüschels gedacht, noch als Umhüllungsgebilde gelten lassen und in dem Sinne noch von einer singulären Lösung sprechen. Rücken dagegen die Schnittpunkte von $\varphi=0$, $\psi=0$ z. B. paarweise zusammen, so berühren sich alle Integralcurven in den betreffenden Punkten, und es gibt eine endliche Anzahl ausgezeichneter Hauptelemente, aber keine von ihnen gebildete singuläre Lösung.

Gegenüber diesen verschiedenen Möglichkeiten wird man zunächst die Frage aufwerfen: *Was tritt im Allgemeinen ein**), d. h. wenn die Coëfficienten der gegebenen Differentialgleichung keinen besonderen Relationen genügen? Es ist zunächst klar, dass für jeden Punkt der singulären Integralcurve zwei der zugehörigen Fortschreitungsrichtungen (Hauptelemente) zusammenfallen. Der Ort der Punkte aber, für welche dies eintritt, ist im Allgemeinen der Ort der Spitzen der Integralcurven, und nicht eine eigentliche Umhüllungscurve, wie wir schon früher bei den algebraischen Differentialgleichungen gesehen haben (p. 968) und wie man für andere Gleichungen ganz ebenso beweist. Andererseits ist selbstverständlich, dass man aus den Gleichungen (25) eine eigentliche Umhüllungscurve erhält, wenn die Coëfficienten von $f=0$ allgemeiner Natur sind.**) Wir können dies in folgendem Satze aussprechen:

---

*) Vgl. im Folgenden: Darboux: Sur les solutions singulières des équations aux dirivées ordinaires du premier ordre, Comptes rendus, t. 71 und Bulletin des sciences mathématiques, t. 4, 1873, sowie Clebsch, Math. Annalen, Bd. 6, p. 211.

**) Selbstverständlich können in besonderen Fällen noch Ausnahmen anderer Art eintreten. Von der aus (25) erhaltenen Curve wird sich z. B. der Ort der Doppelpunkte der Curven $f=0$ absondern (wie schon oben gemerkt), wenn ein solcher vorhanden ist; die Curve könnte auch möglicherweise ganz durch einen solchen Ort absorbirt werden, und dann hat man keine Umhüllungscurve mehr. Mit dem Orte der Spitzen dagegen steht ein solcher Ort von Doppelpunkten nicht weiter in Zusammenhang, denn für einen Punkt des letztern fallen keineswegs zwei der zugehörigen Coincidenzstrahlen zusammen.

Die Constanten in einer Differentialgleichung erster Ordnung müssen besonderen Bedingungen genügen, wenn die Integralcurven eine eigentliche Umhüllungscurve haben sollen; andernfalls bestehen zwischen den Constanten der Integralgleichung solche Relationen, dass statt dessen ein Ort von Spitzen auftritt. Welcher von beiden Fällen im Allgemeinen vorkommt, hängt sonach davon ab, ob man die Differentialgleichung oder die Integralgleichung allgemein voraussetzt.*)

Es bleibt uns übrig, die Bedingungen anzugeben, unter welchen eine eigentliche Umhüllungscurve erhalten wird. Unsere frühere Schlussweise, welche zu dem Orte von Spitzen $F = 0$ führte, wird nur ungültig, wenn die zu einem Punkte von $F = 0$ gehörige, doppelt zählende Fortschreitungsrichtung mit der Tangente von F in diesem Punkte zusammenfällt, denn dann kann sich eine Integralcurve diesem Punkte nähern und sich wieder von ihm entfernen, ohne die Curve F zu überschreiten und ohne doch eine Spitze zu bilden, nämlich eben, indem sie F in dem Punkte berührt; die von den Geraden der doppelt zählenden Hauptelemente (deren Punkte auf $F = 0$ liegen) umhüllte Curve $\Phi = 0$ muss also mit $F = 0$ zusammenfallen. Die Bedingung der eigentlichen Berührung aber ist sich selbst dualistisch; dieselbe Curve F muss daher auch von denjenigen Geraden umhüllt werden, welche im Allgemeinen die Wendetangenten der Integralcurven (Tangenten von $F' = 0$) sind, d. h. welche durch einen doppelt zählenden Punkt zu einem doppelt zählenden Hauptelemente der Differentialgleichung ergänzt werden; und endlich muss dann auch der Ort $\Phi' = 0$ der letzteren Punkte mit $F = 0$ identisch sein.

Wenn also eine singuläre Lösung (eigentliche Umhüllungscurve) entstehen soll, muss der Ort der Rückkehrpunkte der Integralcurven $F = 0$ oder ein Theil desselben mit dem Orte der Wendetangenten dieser Curven ($F' = 0$) oder einem Theile desselben zusammenfallen. Mit der Enveloppe fallen dann auch der Ort der Wendepunkte und die Enveloppe der Wendetangenten bez. Theile derselben zusammen.

Die Bildung der Gleichung $F = 0$, $F' = 0$ kann in der oben geschilderten Weise geschehen, denn die betreffenden Regeln sind ebenso auf transscendente wie auf algebraische Curven anwendbar. An diesen Gleichungen kann man dann sofort erkennen, ob eine singuläre Lösung vorhanden ist und diese selbst angeben; es *muss eben F einen Factor enthalten, welcher, in Liniencoordinaten dargestellt, mit einem Factor von F' identisch ist.* Besondere Untersuchungen bedürfen dann nur noch etwaige lineare Factoren von F und F', da

*) Dass ein Ort der Spitzen auftritt, wenn eine eigentliche Umhüllungscurve nicht vorhanden ist, zeigte auch schon De Morgan: On some points of the integral calculus, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, vol. 9, part. 2.

dieselben immer nur in der einen Art von Coordinaten darstellbar sind. In dem Vorhergehenden sind die Principien enthalten, nach denen man solche Vorkommnisse am zweckmässigsten beurtheilt.

Wir erwähnen nur noch die Möglichkeit, dass, in besonderen Fällen, eine noch innigere Beziehung der Integralcurven zur Curve $F=0$ eintreten kann. Bestehen z. B. die Integralcurven aus den Krümmungskreisen einer ebenen Curve, so ist die letztere eine Osculations-Enveloppe; sie wird von den Integralcurven gleichzeitig berührt und durchsetzt. Gehören ferner etwa die Integralcurven einem Netze an:

$$A + B\lambda^p + C\lambda^q = 0,$$

so ist die Jacobi'sche Curve des Netzes ein Ort nicht für Spitzen, sondern für Selbstberührungspunkte der Integralcurven, ohne doch eine Umhüllungscurve zu sein (p. 382), etc.

Es sollen diese Erörterungen zum Schlusse noch an einer *Reihe von Beispielen* erläutert werden.*)

1) Es ist schon früher hervorgehoben, dass die Integralcurven des allgemeinen Connexes $(1, n)$ die $n^2 + n + 1$ Grundstrahlen desselben zu gemeinsamen Tangenten haben (p. 1002); die Grundstrahlen stellen hier also eine singuläre Lösung dar; ausserdem gibt es einen Ort von Spitzen $F=0$; hingegen keine Curve $F'=0$.

Dualistisch entsprechend haben die Integralcurven des allgemeinen Connexes $(m, 1)$ $m^2 + m + 1$ gemeinsame Punkte, welche eine singuläre Lösung darstellen (p. 1033). Einen Specialfall hiervon erhält man durch die Differentialgleichung:

$$\psi\, dy - \varphi\, dx = 0 \tag{26}$$

wenn φ und ψ von der m^{ten} Ordnung sind. Hier hat man m^2 feste Basispunkte; die Gleichung (26) entsteht also nur dann aus einem *allgemeinen* Connexe $(m-1, 1)$, wenn $m-1$ Schnittpunkte der Curven $\varphi = 0$, $\psi = 0$ auf der unendlich fernen Geraden liegen, d. h. wenn

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_3 y, \quad \psi = \varphi_1 - \varphi_3 x$$

wo die φ_i von der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung sind. In der That erhält man dann aus dem allgemeinen Connexe $\Sigma \varphi_i u_i = 0$ für $x_3 = 1$, $dx_3 = 0$, die Differentialgleichung:

$$dx\,(\varphi_2 - \varphi_3 y) + dy\,(\varphi_3 x - \varphi_1) = 0;$$

und von den m^2 Schnittpunkten der beiden Curven $\varphi = 0$, $\psi = 0$ fallen $m-1$ in die Schnittpunkte von $\varphi_3 = 0$ mit der unendlich fernen Geraden zusammen.

*) Man findet weitere Beispiele bei Darboux a. a. O. behandelt.

2) Es sei die Differentialgleichung gegeben:

$$x\,dy = y\,dx \log y\,, \tag{27}$$

oder homogen:

$$\frac{x_1}{x_2}\frac{u_1}{u_2} + \log\frac{x_2}{x_3} = 0\,. \tag{28}$$

Hier ist offenbar der Punkt $x_1 = 0$, $x_2 = x_3$, d. i. $x = 0$, $y = 1$ allen Integralcurven (welche durch $y = e^{Cx}$ dargestellt werden) gemeinsam.*) Da die u_i linear vorkommen, gibt es keinen Ort der Spitzen. Um die Enveloppe der Wendetangenten $F' = 0$ zu erhalten, hat man die Punktgleichung (28) in Liniencoordinaten v darzustellen, d. h. ϱ und v_i aus den Gleichungen:

$$\varrho v_1 = \frac{1}{x_2}\frac{u_1}{u_2}\,,\quad \varrho v_2 = -\frac{x_1}{x_2^2}\frac{u_1}{u_2} + \frac{1}{x_2}\,,\quad \varrho v_3 = -\frac{1}{x_3}$$

und aus (28) zu eliminiren. Dies gibt:

$$\log\left(-\frac{v_3}{v_1}\frac{u_1}{u_2}\right) - \left(\frac{v_2}{v_1} - \frac{u_2}{u_1}\right) = 0\,.$$

Hieraus entsteht F' für $u = v$; es ist also:

$$F' \equiv u_3 + u_2 = 0 \tag{29}$$

die gesuchte Curve. Dieselbe fällt mit dem gemeinsamen Punkte der Integralcurven zusammen und gibt eine singuläre Lösung. In der That kann man die Gleichung (29) nicht durch einen speciellen Werth von C aus der Gleichung der Integralcurven in Liniencoordinaten:

$$\Psi \equiv \log\left(-\frac{1}{C}\frac{u_1}{u_2}\right) - C\frac{u_3}{u_1} + 1 = 0$$

erhalten; sie ergibt sich dagegen auch durch Elimination von C aus $\Psi = 0$ und $\frac{d\Psi}{dC} = 0$.

3) Die Differentialgleichung**)

$$y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{1}{x}y^3\frac{dy}{dx} + a^2 = 0 \tag{30}$$

hat das allgemeine Integral:

$$4a^2x^2 - 2Cy^2 + C^2 = 0\,,$$

und also die singuläre Lösung:

$$4a^2x^2 - y^4 \equiv (2ax - y^2)(2ax + y^2) = 0\,. \tag{31}$$

Aus (30) erhalten wir den Connex:

$$a^2u_2^2x_3x_1 - x_2^2u_3u_1 = 0\,.$$

---

*) Ueber das particuläre Integral $y = 0$ dieser Gleichung vgl. Boole a. a. O. Supplementary volume, p. 14 und 17.

**) Schlömilch's Compendium der höheren Analysis, 3. Ausg., Bd. 1, p. 509.

Die Form F entsteht daher aus:

$$4\, v_1 v_3 u_1 u_3 - a^2 u_2^2 v_2^2 = 0\,,$$

wenn man $u = v$ setzt, gibt also:

$$F = 4\, u_1^2 u_3^2 - a^2 u_2^4 = 0\,;$$

und ebenso findet man:

$$F' \equiv 4\, a^2 x_1^2 x_3^2 - x_2^4 = 0\,.$$

Die beiden letzteren Gleichungen stellen in der That dieselbe Curve (31) dar.

4) Die Integralcurven der Differentialgleichung $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{y}$ bilden ein System von Curven dritter Ordnung mit Spitzen:

$$(x + Cy)^2 y = 1 \quad \text{oder:} \quad (x_1 + Cx_2)^2\, x_2 = x_3^3\,.$$

Die Spitzen erfüllen die Linie $x_3 = 0$. Wir erhalten den Connex:

$$u_1^2 x_2 - u_2^2 x_3 = 0\,.$$

Die Curve F, d. i. der Ort der Punkte, für welche zwei Werthe von $u_1 : u_2$ zusammenfallen, besteht aus $x_3 = 0$, dem Orte der Spitzen, und $x_2 = 0$, der festen Wendetangente; der Schnittpunkt beider Linien ist der gemeinsame Wendepunkt; er stellt keine singuläre Lösung dar, weil zu ihm nur *eine* ausgezeichnete Fortschreitungsrichtung gehört.

5) Die Differentialgleichung*):

$$(32) \qquad y^2 - 2\, xy\, \frac{dy}{dx} + (1 + x^2) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0$$

ist dadurch ausgezeichnet, dass ihre Integralcurven:

$$y = Cx \pm \sqrt{1 - C^2}$$

aus den Tangenten eines festen Kegelschnittes bestehen; sie entspricht also dualistisch einer solchen Gleichung, welche die Differentiale der Coordinaten nicht enthält**), und deren Integrale dann aus den sämmtlichen Punkten einer festen Curve bestehen (p. 1017). Der Connex, zu welchem die Gleichung (32) gehört, darf daher die Punktcoordinaten x nicht enthalten, und in der That findet man für ihn die Gleichung:

$$u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 = 0\,.$$

Er stellt gleichzeitig die singuläre Lösung von (32) in Liniencoordinaten dar.

*) An ihr entwickelte Lagrange zuerst seine Theorie der singulären Lösungen; vgl. Boole a. a. O. p. 149 und 165.

**) Auch Plücker machte darauf aufmerksam, dass bei Umformung einer Differentialgleichung von Punkt- in Ebenencoordinaten die Differentialquotienten ganz verschwinden können, und dass die so entstehende Flächengleichung eine singuläre Lösung ist. Vgl. dessen System der Geometrie des Raumes, Düsseldorf 1846, p. 27.

Index.

Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten; An. bedeutet Anmerkung, C_n Curve n^{ter} Ordnung, K_n Curve n^{ter} Klasse.

Abbildung, eindeutige, 474, s. Transformation.
Abel, 815, 920.
—'sche Function, 832, 852 An.
—'sches Integral, 764, s. algebraisches I.
—'sches Theorem, 809, 812, 817, 824, 826, 830, 894, 911, 962.
Abgekürzte Bezeichnung, 35 ff.
Abstandsverhältniss, 33 f.
Additionstheorem der ellipt. F., 605, 629.
Adjungirtes System einer Determ., 18.
Adjungirte Curve, 429, 678.
—, Verhalten bei eindeutiger Transf., 675.
— C_{n-3}, 436, 441, 677, 685, 705, 837, 847, 857, 865.
— C_{n-2}, 836.
Aehnlichkeitsaxe, 160.
Aehnlichkeitspunkt, 153 ff.
Aehnlichkeitstransformation, 995 An.
Aequianharmonische Beziehungen im Systeme der Wendepunkte einer C_3, 508, 564.
— C_3, 579, 644.
— Lage, 40, 225, 239.
Aequivalente Systeme, 925; Beispiele, 927, 929, 934.
Algebraisches Integral, 764; Beispiele, 766, 772; Verhalten in besonderen Punkten, 786; Zerlegung in Normalformen, 777, 785.
Analytische Geometrie, 1.
Anfangspunkt, 2.
Anharmonisches Verhältniss, 37.
Apollonius, 157.
Argument, s. Parameter.
Aronhold, 130, 167, 174, 189, 267, 272, 542, 546, 551, 565, 577, 582, 766, 772, 1009, 1014.
Asymptote, 9, 82, 96, 144; einer C_3, 498.
Ausgezeichnete Curvenschaar, 1029.
Ausnahmepunkt einer Correspondenz, 679.
Axe einer Ellipse oder Hyperbel, 11.

Baltzer, 14, 178, 691.
Beltrami, 173.
Bertini, 683.
Berührung, Bedingung der, 366.
Berührungscurven, 838.
— bei C_n mit $p = 0$, 894.
Berührungskegelschnitte einer C_4, 851, 1010.
— — mit Dopp., 874, 879.
Berührungsformeln, 460, 474.
Berührung zwischen C_m und C_n, 366, 375, 424, 460, 464, 472, 735, 838.
— — C_n u. C_{n-2}, 836, 840 An., 848.
— — C_n u. C_{n-3}, 715, 845, 896.
— — C_n u. C_2, 401, 403, 407.
— — C_3 u. C_2, 533, 626.
— — C_4 u. C_m, 854.
— — C_4 u. C_3, 844, 852, 855, 921, 1009.
— — C_2 u. C_2, 135 ff., 298.
— — Kreisen, 157 ff.
Berührungstransformation, 976 An., 1025, 1028; unendlich kleine, 1030.
Bewegung, 994 An.
Bézout, 180, 282.
—'sches Theorem, 282.
Binäre Form, 169, s. Form.
Bischoff, 459.
Bobillier, 35, 204.
Boole, 1032 ff.
Breitencurve, 613.
Brennpunkt, 9, 12, 161 ff.
Brianchon, 50.
Brill, 441, 445, 459, 461, 464, 678, 692, 694, 710, 722, 734, 740, 748 f., 812, 835, 867, 877, 885, 920.
— u. Nöther, 429, 432, 684, 699, 706, 709, 711, 715, 749.
Brioschi, 228, 248, 573, 640, 776, 921.
Büschel von C_n, 373.
— von C_2, 122.
Burmester, 997.

Camille Jordan, 923.
Carnot'sches Theorem, 754 An., 830.

Casey, 911.
Cayley, 151, 167, 169, 174, 180, 189, 204, 207, 212, 228, 284, 313, 350, 354, 360, 391, 427, 428, 441, 459, 461, 478, 489, 497, 500, 542, 649, 716, 724, 759, 762, 850, 905, 921.
—'sche Curve, 360, 368, 383; einer C_3, 515, 517, 547, 558; Zerfallen in 3 Punkte, 553; einer C_3 mit Dopp., 587; mit Rückkehrp. 592.
Centralperspective, 254.
Centrum der Perspectivität, 45, 256.
Charakteristiken bei C_2-Systemen, 390.
—, allgemeine, 408, 422.
Chasles, 27, 37, 46, 148, 210, 251, 282, 376, 391, 397, 425, 441, 497, 535 f., 541, 761 f., 911.
—'scher Satz über Charakteristiken, 392, 403.
Chordale, 151, 156, 764 An.
Christoffel, 174.
Classe, s. Klasse.
Clebsch, 36, 169, 174, 178, 184, 189, 211, 233, 269, 277, 282, 318 f., 350 f., 360, 370, 377, 399, 468, 484, 500, 529, 566 f., 578, 588, 615, 647 ff., 652, 656, 683, 798, 822, 838, 846, 850, 867, 885, 887, 891, 897, 899, 903, 905, 911, 916, 921, 925, 928, 958, 961, 979, 987, 1033.
— u. Gordan, 248, 542, 561, 575, 581, 596, 634, 643, 647, 667, 677, 687, 703, 765, 778, 782—896, 916, 988, 993, 998.
Clifford, 489.
Coincidenz, im binären Gebiete, 210.
—, in der Ebene, 389.
—, eigentliche u. uneigentliche, 453, 679.
—, bei Connexen, 938.
Coincidenzcurve, in der Ebene, 387.
—, beim erweiterten Correspondenzpr. 453, 697.
— —, Ordnung derselben, 452.
— —, Verhalten in Ausnahmepunkten, 453.
— —, Gleichung in Beispielen, 446.
Coincidenzpunkt u. -strahl, 963.
Collineation, s. lineare Transformation.
Collineationsaxe u. -centrum, 256, 263, 999, 1001.
Combinanten, 208, 888.
— eines C_2-Büschels, 298, 303.
— eines syzygetischen C_3-Büschels, 565, 571, 575 f., 632.
Concentrische Kreise, 149.
Confocale C_2, 163.
Conjugirte Durchmesser, 81, 92 ff., 142.
— Netze u. Gewebe von C_2 und K_2, 521, 553, 577 An.
— Polaren, 81.
— Punkte (Pole), 214, 519.
— — auf einer C_3, 516.
—r Connex, 944, 957.
— — des Connexes (1, 1), 950, 991 f.
— — — (2, 1) od. (1, 2), 951, 1008.
— — — (2, 2), 956.
Connex, 924, 936.
— (1, 1), 988.
— (1, 2), 1007.
— (m, 1) od. (1, n), 1001.
Construction, s. Erzeugungsweise.
— der Dopp. projectivischer Reihen, 51.
— der Schnittpunkte von C_2 u. C_1, 51.
— der C_3 aus 3 Polepaaren, 529.
— der C_4 aus 7 Doppeltangenten, 1014.
— des 9ten Schnittpunktes zweier C_3, 536, 1013 An.
— der Hauptcoincidenz (1, 2), 1012.
Contravariante, 266.
Coordinaten, 2, 27, 56; binäre, 170.
— eines Hauptelements, 1016.
Corresidual, 432.
Correspondenz, 210.
— mit festen Punkten, 454, 679.
— mit mehrwerthigen Punkten, 461.
—en, zwei simultane auf einer C_n, 443, 726, 735
—en, drei simultane, 745.
—formeln, 446, 739, 748.
—princip von Chasles, 210, 425.
— in der Ebene (Salmon-Zeuthen), 386; Anwendungen, 969 ff.
—, erweitertes, 441, 678.
Cotterill, 724.
Covariante, 173, 266, 546.
—, identische, 266.
Cramer, 204, 313, 331, 426, 500.
Cremona, 40, 204, 207, 303, 360, 370, 374, 382, 391, 404, 428, 478, 484, 497, 534, 536, 683, 720, 725, 761, 916.
Curve, 3.
— erster Ordnung, 20 ff., 29.
— erster Klasse, 29.
— 2ter Ord. od. Kl., 47, 73 ff., 277, 284, 392, 476, 519, 537, 767, 887, 979, 981, 1007.
— 3ter Ord., 497, 600, 983; mit Dopp., 581, 899; mit Rückkehrp., 417, 590; zerfallend in C_2 und C_1, 595, 984 An.; zerfallend in drei C_1, 597.
— 3ter Kl., 513; mit Wendetang., 417, 590; Ausartungen, 601.
— 4ter Ord., 274 An., 279, 416 An.; 850 ff., 1010; mit 1 Dopp., 868, 921, mit 2 Dopp., 911 An.; mit 3 Dopp., 899 An.
— vom Gechlechte 0, 883; vom Geschl. 1, 903; vom Geschl. 2, 915.
Curvenpaar, 939.
Cyclisch-projectivisches System, 201.

Darboux, 295, 1033, 1035.
Dersch, 350.
Descartes, 1.
Determinante, 13.
— der Substitution, 68, 130, 172, 988.
— einer C_2, 77, 113, 130.
Determinantenfactor, symbolischer einer Functionalinvariante, 194, 545.

Differential, einer C_2, 767, 982; einer C_3, s. elliptisches —; eines Connexes etc., 959.
— erster Gattung, 789; zweiter Gattung, 792; dritter Gattung, 790, 794.
Differentialgleichung, 965, 978, 1014.
Directrix, 11, 12.
Discriminante, 178; einer bin. quadr. Form, 213; e. bin. cub. F., 219; e. bin. biquad. F., 239.
— einer C_n, 313; einer C_3, 565.
Doppelelement, 199.
Doppellinie, 106, 115, 120, 392.
Doppelpunkt, binärer Polaren, 206, 220; einer C_2, 102, 115, 120, 392; einer C_3, 582, 901; einer C_n, 313, 321; einer C_n mit $p = 0$, 889; mit $p = 1$, 913.
—e zweier projectivischen Punktreihen, 51, 135, 198.
Doppeltangente einer C_n, 342, 348; einer C_4, 850, 1010; einer C_4 mit Dopp. 877, 880; einer C_4 mit $p = 0$, 899; einer C_n mit $p = 0$, 891.
Doppelverhältniss, 37, 71, 196, 217, 235.
—, einer binären Transformation, 200; einer C_3, 531, 578, 603.
Dreieckscoordinaten, 62.
Dreitheilung der ellipt. Functionen, 609, 655; d. hyperellipt. F. 920
Dualität, 28, 264.
Durchmesser einer C_2, 80.
Durège, 497, 536, 588, 811

Eigentlich reducirtes System, 932.
Eintheilige C_3, 499, 530; — K_3, 514,
Element, 937.
Elementarbedingungen, 393.
Elementarsysteme, 416.
Ellipse, 7, 10, 79, 80, 91, 302 An, 611.
Elliptische Functionen, 603, 649, 909.
Elliptisches Differential, 776; — Integral, 649, 652, 772, 984.
Entfernung, 4, 150.
Enveloppe, 27.
Erzeugungsweise, einer C_2, 47; nach Grassmann, 537.
— einer C_n, 375, 761.
— einer C_3 nach Schröter, 528, 540; nach Grassmann, 538, 540, 614, 941 An.; nach Chasles, 535, 540; einer C_3 mit Dopp. 585.
— einer C_4 nach Grassmann, 541 An.; nach Chasles, 699 An.; nach Aronhold, 1014.
Euler, 426, 566, 1015.
Excentricität, 8.

Fiedler, 169, 170.
Fluchtlinie, 255.
Form, algebraische, 167; bin. lineare, 177, 186; bin. quadr., 213; bin. cubische, 218, 227, 584, 899; bin. biqu. 228, 239; ternäre lineare, 265; tern. quadr., 284, 288; tern. cub., 542, 563.
Form, kanonische, einer bin. quadr. F., 86, 214; zweier bin. quadr. F., 215, 217; einer bin. cub. F., 224; einer bin. biquad. F., 247.
— —, einer C_2, 86; zweier C_2, 124, 137, 139, 140, 141; einer C_3, 509, 567, 570; einer C_3 mit Dopp., 584; mit Rückkehrp., 591; einer Collineation, 262, 989, 998.
Formensystem, endliches, 211,
—, simultanes, zweier C_2, 291.
Fouret, 967.
Frahm, 850.
Fuchs, 803, 835, 836.
Fünfseit, 282 An.
Function, elliptische, s. elliptische F.
— H, 629, 910.
— Θ, 629, 831, 836 f., 846, 855, 861; Θ′, 861.
— T, 833, 836; T′, 875.
— p, 652.
Functionaldeterminante, 175, 222, 468 An., s. Jacobi'sche Curve.
— zweier binären quadr. F., 215; dreier C_2, 303.
Functionalinvariante, 267; eines Connexes, 943, 989; einer Differentialgleichung, 973.
Fundamentalcurve, 482, 662.
Fundamentalpunkt, 476, 479, 662, 682.

Gaultier, 151.
Gauss, 173.
Gegenüberliegender Punkt, 535.
Geiser, 724, 850, 851.
Gent, 622.
Geometrie auf einer C_n, 425, 661 ff.; auf einer C_3, 527, 602, 983; mit Dopp., 586, 900; mit Rückkehrp. 593
— der Anzahl, 390.
Gerade (Linie), 5, 20 ff.
Geränderte Determinante, 78, 114.
Gergonne, 28.
Geschlecht einer C_n, 351, 429, 495, s. Curve; eines Connexes, 958 f.; einer Coincidenz, 961; eines Curvenpaares, 962; einer Differentialgleichung, 974.
—, Erhaltung bei eindeutiger Transformation, 459, 490, 666, 681.
— zweier mehrdeutig auf einander bezogenen Curven, 458, 681 An.
Gestalt einer C_n in der Nähe eines Punktes, 337; einer C_3, 499, 593; einer K_3, 514.
Gewebe von K_2, 520, 1007; von K_3, 1009.
Gitter von C_1 bei einer C_3, 503.
Godt, 1004, 1007.
Gordan, 178, 208, 211, 274, 290, 427, 453, 524, 542, 594, 889, 902, 928, 932; s. Clebsch u. G.

Grad, 194, 212, 267; einer Schaar von Punktgruppen, 430.
Gram, 272.
Grassmann, 204, 536, 541, 614.
Grundpunkte einer bin. Form, 169.
Grundstrahlen eines Connexes $(1, n)$, 1001; (1, 2), 1008.
Gundelfinger, 248, 280, 519, 542, 567, 590, 594.

Haase, 889.
Halbirung einer Strecke od. eines Winkels, 40.
Halphen, 400, 404, 413.
Hamburger, 496.
Harmonische C_3, 579, 644.
— Gerade bei C_3, 502, 513, 578.
— Lage, 40, 147, 215, 221, 239.
— Theilung, 56.
Harnack, 508, 531, 579, 613, 621, 811, 826, 981, 984.
Hart, 911.
Hattendorf, 14.
Hauptaxe einer C_2, 82, 88.
Hauptcoincidenz, 962, 1016; eines Connexes (1, 2), 1011.
Hauptcoincidenzcurven, s. Integralcurven.
Hauptelement, 1016.
Hermite, 228, 248, 519, 605, 629, 649, 776, 794, 910.
—'sche Curve eines C_2-Netzes, 519; eines K_2-Gewebes, 521, 1007.
—'scher Satz, 629.
Hesse, 14, 23, 78, 153, 167, 176, 228, 243, 312, 350, 377, 497, 505, 527, 542, 598, 615, 656, 842, 850 ff.
—'sche Curve, 312, 318; eines Netzes, 381; Verhalten in singulären Punkten, 324, 356; Singularitäten, 361, 368; einer C_3, 501, 510, 527; Zerfallen in drei C_1, 553, 559, 564; einer C_3 mit Dopp., 584; mit Rückkehrp., 327, 592; einer K_3, 515.
—'sche Determinante od. Covariante, 176, 191, 206, 220, 312.
—'sche Gleichung, 656 An.
Hirst, 944, 998.
Holzmüller, 995.
Homogene Gleichungen, 67, 1015, 1021.
Hyperbel, 7, 10, 79, 80, 91, 302 An.
Hyperelliptische Curve, 663 An., 687 An., 712, 717, 916.
Hyperelliptisches Integral, 815 An., 830 An., 920.
Hypocycloide, 588 An.

Jacobi, 175, 350, 426, 755, 790, 822, 830, 1019, 1025, 1027, 1032.
—'sche Curve, 377, 381, 467, 483, 663, 724; eines Netzes von C_2, 304, 519; eines Gewebes von K_2, 521, 1007.
Jacobi'sche Determinante = Functionaldeterminante.
—'scher Satz, 822, 826.
Identisches Verschwinden von Covarianten etc., 274.
Identitäten, binäre, 193; ternäre, 283.
Igel, 584.
Imaginäre C_2, 91, 284; C_3, 498; C_1, 96, 101, 109; K_1, 75, 173.
— Tangenten einer K_2, 610; einer K_3, 612.
Inflexionspunkt od. -tangente = Wendepunkt od. -tangente.
Inflexionstripel, 622 An.
Integral, erster Gattung, 797, 801; zweiter u. dritter Gattung, 804.
—curven eines Connexes od. einer Differentialgleichung, 964, 1016; Beispiele, 965, 979, 980, 983; des Connexes (1, 1), 992, 998, 1000; Ort ihrer Spitzen u. Wendetangenten, 968, 1034; bei Connexen $(1, n)$, 1005, s. singuläre Lösung.
—mannigfaltigkeit, 1018.
Integration einer Differentialgl. 1018, 1022, 1032.
Invariante, binär, 173; ternär, 131, 266; simultane zweier bin quadr. F. 215; zweier tern. quadr. F. 295; einer tern. cub. F. 546, 556, 569, 579.
—, absolute, 196, 267; einer bin. biqu. F. 239, 247; einer bin. linearen und cub. Form, 300, 987; einer bin. linearen Transf. 200; zweier tern. quadr. F. 299; einer C_3, 533, 580; einer Cremona'schen Transf. 486 An.
Invarianteneigenschaft, 167.
Involution, 207; quadratische, 135, 202, 214; besondere cub. 226; besondere biqu. 242.
de Jonquières, 204, 207, 376, 382, 391, 416, 459, 497, 541.
Isolirter Punkt, 321, 411.

Kanonische Form, s. Form.
Kegelschnitte, 55, 72 ff.; Gleichung in Liniencoordinaten, 78, 113, 131; zerfallende, 100, 115; mit gemeinsamem Mittelpunkte, 142, 164; ähnliche, 144; Tabelle der verschiedenen Arten, 119.
Kegelschnittnetz, 303, 384; s. Netz und Gewebe.
Kegelschnittsystem, 392.
Kerncurve = Steiner'sche Curve.
Kiepert, 652, 654, 656.
Kinematik, 996 An.
Klasse, 31, 53, 55, 267, 279, 308, 343, 493.
Klassenscheitel, 392.
Klein, 151, 173, 500, 508, 610, 682, 968, 994.
— u. Lie, 996 f.
Königsberger, 496, 604 f., 653, 656, 790.

Kreis, 5, 30, 145 ff.; Asymptoten, 147, 149; conjugirte Durchmesser, 149; Peripheriewinkel, 47, 149.
— punkte, imaginäre, 146.
— theilungsgleichungen, 201 An., 894.
Kronecker, 703, 926.
Kugel, Geometrie auf der, 173, 215, 226, 243.

Lage, involutorische zweier Differentialgleichungen, 1022.
—, perspectivische ebener Systeme, 256.
—, vereinigte, von C_1 u. K_1, 29, 44, 63, 69, 265; von C_n u. K_n, 385; von C_2 u. K_2, 521, 550 f.; benachbarter Hauptelemente, 1022.
Lagrange, 1037.
Laguerre, 148.
Legendre, 790.
Lie, 1017, 1024—1032, s. Klein u. Lie.
Liniencoordinaten, 27, 63.
—, Gleichung in —, einer C_2, s. Kegelschn., einer C_n, 279, 308; einer C_3, 279, 543, 544; einer C_4, 279.
Linienpaar, 99 ff., 392.
Logarithmische Linie, 999.
— Spirale, 995.
Lüroth, 173, 798, 885.

Maclaurin, 497, 503, 527, 536.
Magnus, 251, 475.
Maillard, 416.
Mannigfaltigkeit, 430, 937, 1018.
Marie, 794, 806.
Massbestimmung, allgemeine projectivische, 150 An., 302 An.
Matrix, 687, 691, 742, 744, 749, 756.
Mayer, 1024.
Mechanismus, Grassmann'scher, 539.
Meridiancurve, 613.
Minimalwerthe der Zahl von Punkten in Specialgruppen, 707.
Mittelpunkt, einer C_2, 11, 80; eines Strahlbüschels, 32.
Moduln, 685, 712; s. Perioden.
Möbius, 28, 37, 67, 173, 251, 273, 500, 885.
de Morgan, 1034.
Müller, 652, 685.

Nebenseiten eines Vierecks, 56.
Nebenecken eines Vierseits, 56.
Netz von C_2, 304, 519, 521; von C_n, 381; Beziehungen zu einer festen Curve, 663, 721; mit einem beweglichen Schnittpunkte, 480.
Neumann, 173, 765, 799, 811, 830 f., 846, 867 f., 920.
Newton, 204, 331, 497, 500.
Nöther, 327, 338, 433, 489, 491, 666, 678, 683, 958, 960; s. Brill u. N.

Normalconnex, 936.
Normalcurve, 686, 690, 693 An., 709; hyperelliptische, 719; für $p=0$, 884; für $p=1$, 903; für $p=2$, 717 An., 919.
Normalform, Hesse'sche der C_1, 23.
Normalform der Riemann'schen Fläche, 798.
Normalintegral, erster Gattung, 804, 807; dritter G. 805 f., 867; zweiter G. 805, 863.

Olivier, 764.
Ordnung, 4, 31, 53, 55, 194, 267.
Ordnungsstrahl, 392.
Ort, geometrischer, 3, 27.
Orthogonalkreis, 155, 304.
Oval, einer C_3, 499; einer K_3, 514.

Paarer Zug einer C_n, 500 An.
Painvin, 391.
Parabel, 12, 79 f., 91, 97.
Parameter, einer Reihe oder eines Büschels, 22, 32; eines Curvensystems, 390.
— darstellung, einer C_2, 887; einer C_3, 603, 627, 647, 653, 899; einer C_3 mit Dopp. 586, 899; einer C_3 mit Rückp. 593; einer C_n mit $p=0$, 884; einer C_n mit $p=1$, 906, 910, 913; einer hyperelliptischen C_n, 920.
— vertheilung auf einer C_3, 610; auf einer K_3, 611.
Pascal'scher Satz, 50, 428.
Perspectivischer Durchschnitt, 45.
Perspectivität, 45, 254, 260, 999, 1001.
Perioden, der ellipt. Integrale, 604; der Abel'schen I. 801, 804, 807, 836 An.; einer C_3, 605.
Periodicitätsmoduln, s. Perioden.
Plücker, 28, 35, 67, 151, 204, 310, 312, 342, 344, 351, 426, 428, 475, 497, 500, 509, 851, 937, 965, 1025 f., 1037.
—'sche Formeln, 344, 351, 948.
Pol u. Polare bei C_2, 75, 101, 112; bei C_n, 306; bei C_3, 501; Verhalten in singulären Punkten, 322, 355.
Polarcoordinaten, 3.
Polardreieck, 81, 114; gemeinsames zweier C_2, 123, 297, zweier Kreise, 152.
Polarsysteme, binäre, 203.
Polepaare auf einer C_3, 527, 587, 608, 614, 621, 901.
Poloconik, 543, 549.
Polygone, eingeschriebene einer C_3, 589, 593; Steiner'sche, 589, 615.
Poncelet, 28, 37, 67, 203, 308, 475.
Potenzlinie, 151.
Projectivische Curvenbüschel, 375.
— Punktreihen und Strahlbüschel, 42 ff., 195 ff.; Erzeugnisse derselben, 46 ff.
Projectivität, 43; cyclische, 201, 225.
Prym, 765, 803, 830, 867, 920.

Puiseux, 331.
Punktepaare, 115, 392; gemeinsame zweier Correspondenzen, 444, 722.
Punktcoordinaten, 2, 62.
Punktgruppen mit speciellen Eigenschaften auf einer C_n, 721, 741, 743, 749, s. Specialgruppen; in der Ebene, 756.

Quaternäre Form, 168.
Quadratische Form, s. Form.
Querschnitt, 681, 799.
Quetelet, 911.

Radicalaxe, 151.
Rechter Winkel, 147.
Rechtwinklige Coordinaten, 2, 59, 65.
Reciprocitätsgesetz, Brill'sches, 464.
Reducirtes äquivalentes System, 262, 997.
Residuum, residual, 429.
Resolvente, 123.
Restsatz, 429, 808, 811.
Resultante, 17, 178; zweier bin. lin. Formen, 177; zweier bin. quadr. F. 218; dreier tern. F. 313; dreier C_2, 525.
Riemann, 351, 666, 682, 693, 699, 709, 714 f., 765, 786, 790, 799, 803, 810, 831 f., 837 f., 861, 870.
—'sche Fläche, 414 An., 612 An., 681, 798.
—-Roch'scher Satz, für adjungirte Curven, 686, 699, 701, 752, 757, 862; für nicht adjungirte Curven, 865 f.
Ringfläche, 612.
Roberts, 703.
Roch, 701, 805, 831, 833, 835, 852, 862, 877.
Rosanes, 295, 385, 478, 489, 519, 979.
Rosenhain, 803, 867, 920.
Rosenow, 584, 588 f., 888, 899.
Rotation, 262, 997 An.
Rückkehrpunkt u. -tangente, 315, 321, 329; einer C_3 bez. K_3, 515, 518, 591.

Salmon, 169, 178, 189, 284, 298, 313, 367, 386, 390 f., 407, 411, 432, 497, 531, 578, 665, 683, 851, 858, 881.
Schaar von K_2, 126.
— von Punktgruppen, 430; lineare, 436.
Schiefwinklige Coordinaten, 61.
Schläfli, 803.
Schnittpunkt zweier C_1, 24, 30, 70; zweier C_2, 121, 292; zweier Kreise, 146; einer C_1 u. C_2, 73, 116; einer C_1 u. C_3, 607, 651; einer C_2 u. C_3, 623; einer C_n u. C_3, 626, 631; von C_n u. C_m, 426, 430, 753, 823.
Schlömilch, 1036.
Schröter, 303, 529, 541, 902.
Schubert, 601, 727.
Selbstberührungspunkt, 323, 410.
Selbsthüllcurven, 997 An.
Simon, 652.
Simultane Invarianten etc. 174.
Singularitäten bei Curven, 347; bei Connexen, 914, 937.
Singuläre Curve, 391, 409, 420.
— Lösung, Singuläres Integral, 969, 1033; Beispiele, 1035.
— Punkte, 319, 354, 491; Tangenten, 341.
Smith, 295, 519, 979.
Specialgruppe, 686, 699; Beispiele 688, 690, 696, 858.
Specialschaar, 699, 856, 865; Bestimmung von S. 702, 705.
Spitze erster Art = Rückkehrpunkt; zweiter Art, 336, 411.
v. Staudt, 46, 145, 173, 225, 500.
Steiner, 46, 52, 151, 303, 360, 475, 615, 850, 902.
—'sche Curve, 360, 383; Singularitäten derselben, 368, 670 An.; einer C_3, 501.
—'sche Fläche, 979 An.
—'sche Polygone, 589, 615, 627.
—'sche Punktepaare, 611, 986.
Stolz, 173.
Strahlbüschel, 31, 70, 171.
Substitution, s. Transformation.
Sylvester, 167, 180, 313, 432, 598.
Symbolische Darstellung, binärer Formen, 187; ternärer Formen, 73, 271.
Synthetische Geometrie, 36.
Systeme von Curven, 372, 390, 407; von C_3 mit Spitze, 417; von Berührungscurven, 842; von Collineationen, 985.
Syzygetischer Büschel von C_3, 505, 551.

Tactinvariante, 366; zweier C_2, 298.
Tangente, 27; einer C_n, 307; im vielfachen Punkte, 308; im Anfangspunkte, 320, 328.
—n, von einem Punkte an eine C_2, 76, 106, 111; an eine C_3, 501; an eine C_n, 279, 308, 579 An.; gemeinsame zweier K_2, 125, 1008.
Tangentialpunkt, 530, 604, 643.
Taylor, 536.
Ternäre Form, 168, 265.
Theilung der ell. Functionen, 609, 616, 654, 659; der Abel'schen F. 840.
Thomä, 803.
Träger, 32.
Transformation, der Coordinaten, 59 ff.
—, lineare, binärer Formen, 172, 195; ternärer Formen, 250, 925, 937, 988, Ausnahmefälle, 998; identische, 199, 1001; unendlich kleine, 996; perspectivische, s. Perspectivität.
—, Cremona'sche od. rationale, 478, Ersetzung durch quadratische, 489; quadratische, 475, 489, 939.

Transformation, eindeutige, 459, 475, 661, 939; Anwendungen, 674; mittelst adjungirter C_{n-3}, 687, 689; eines Connexes, 956; einer Hauptcoincidenz, 974.
—, einer C_2 in sich selbst, 994; einer C_3 in sich selbst, 508 An.
— auf die kanonische Form, zweier C_2, 124, 133; einer C_3, 512, 573; eines Connexes (1, 1) 990.
Translation, 997 An., 1001 An.
Transscendente Curven, 966, 967 An., 992.
Typen, gestaltliche einer C_3, 499, einer K_3, 514; einer C_n in der Nähe eines Punktes, 337.
Typische Darstellung, binärer Formen, 249, 987 An.; einer ternären cubischen Form, 643.

Ueberschiebung, 211.
Uebertragungsprincip von Clebsch, 274; bei Connexen, 942.
—, Hesse'sches, 243 An., 887 An., 900 An.
Ueberzählige Gleichungen, 280 An., 389, 399, 691, 695 An., 703, 742, 750.
Umhüllungsgebilde der Verbindungslinien entsprechender Punkte auf einer C_3, 621 f., 986.
Umkehrproblem der Abel'schen Integrale, Jacobi'sches, 830, 867; Riemann'sches, 830 An.; erweitertes, 867, 882.
Unendlich ferne Gerade, 67.
— ferner Punkt einer C_1, 33, 68.

Verbindungslinie zweier Punkte, 4, 20, 25, 30, 70.
Verschwindungspunkte einer binären Form, 192.
Verwandtschaft, s. Transformation.
—, dualistische od. reciproke, 264, 939.
Verzweigungspunkte, 494, 798.
Vielfache Punkte, 329, 491; gemeinsame zweier Curven, 338; Verhalten bei eindeutiger Transformation, 668.
— Tangenten, 342.
Viereck und Vierseit, 56.
Voss, 683.

Weber, 459, 815, 831, 835, 873.
Weierstrass, 652, 715, 765, 803, 920.
Wendepunkte, bei C_n, 310, 312, 328, 344; bei C_n mit $p=0$, 890; reelle einer C_3, 498, 508; Eigenschaften bei C_3, 502, 506, 511, 562, 617, 655, 901; Gleichung, 578; Bestimmung bei C_3, 504, 512, 563, 609, 651.
Wendepunktsdreiecke, 504, 512, 563, 567, 657.
Wendepunktslinien, 503, 511, 564.
Wendetangenten, 280 An., 310, 346; bei C_3, 564, 578 An.
Werthigkeit eines Punktes in einer Correspondenz, 443.
Weyer, 581, 889.
Wiener, 478.
Winkel zweier Geraden, 26, 148.

Zeuthen, 360, 387, 391, 407 f., 411, 413, 416, 424 f., 458, 500, 666, 681, 683, 851.
Zugehörige Form, 266.
Zusammenhang einer Fläche, 682, 800.
Zweige, reelle einer C_3, 499.
Zweitheilige C_3, 499, 531; K_3, 514.
Zwischenform, 266, 924.

Zusätze und Verbesserungen.

Seite 13, Zeile 6 v. u. lies $a_{,}' a_{,,}'' a_{,,,}'''$ statt $a_{,}''' a_{,,}'' a_{,,,}'$.

„ 28, „ 6 v. u. lies „gilt für“ statt „gibt“.

„ 39, „ 16 v. o. lies $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$ statt $\alpha^2 - \alpha + 1 = 1$.

„ 41, „ 1 u. 2 v. u. lies: Also wird $\mu' = \frac{\pm \mu \sqrt{3} - c}{\mu \pm c \sqrt{3}} \cdot c$, und dies ist immer und nur dann eine reelle Grösse, wenn μ reell ist.

„ 60, „ 6, 4 u. 3 v. u. lies $- a u' - b v'$ statt $- a u - b v$.

„ 61, „ 14 u. 15 v. o. lies $(a \sin \alpha - b \cos \alpha) v' + 1$ statt $(a \sin \alpha + b \cos \alpha) v'$.

„ 68, „ 22 v. o. lies $v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3$ statt $v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3$.

„ 69, „ 2 v. u. sind die Worte „Punkt“ und „Linie“ zu vertauschen.

„ 79, „ 11 v. o. lies $-\frac{1}{a^2}$ statt $-\frac{2}{a^2}$.

„ 81, „ 21 v. o. lies a statt b und b statt a.

„ 83, „ 17 v. u. ist $+ 1$ zu streichen.

„ 88, „ 3 v. o. lies $Q = 0$ statt (10).

„ 96, „ 11 u. 12 v. u. sind α und β zu vertauschen.

„ 98, „ 1 v. o. lies $x' + \frac{a_{33}}{2p} - \frac{q^2}{2mp}$ statt $y' + \frac{a_{33}}{2p} - \frac{q^2}{2m}$.

„ 3 v. o. lies $x' + \frac{a_{33}}{2p} - \frac{q^2}{2mp} = x''$ statt $y' + \frac{a_{33}}{2p} = \frac{q^2}{2m} \quad y''$.

„ 102, lies $\xi + \lambda x$ statt $x + \lambda \xi$.

„ 104, Zeile 1—4 v. u. ist der Factor μ zu unterdrücken.

„ 107, „ 8 ff. lies: so müssen nach unseren allgemeinen Betrachtungen zwei der vier Punkte zusammenfallen; es muss daher ....

„ 109, „ 11 v. u. lies $z + \lambda y$ statt $y + \lambda z$ und Zeile 7 v. u. lies $- 4 \alpha Q^2$ statt $= 4 \alpha Q^2$.

„ 111, „ 9 v. u. lies $\mu v_i + w_i$ statt $v_i + \mu w_i$.

„ 125, „ 8 u. 10 v. o. lies $\lambda' - \lambda'''$ statt $\lambda''' - \lambda'$.

„ 136, In Fig. 23 ist der Punkt $v_3 = 0$ mit P, der Punkt $v_2 = 0$ mit Q zu bezeichnen.

Zeile 1 v. u. lies $y_1 y_3$ statt $y_1 y_2$.

„ 140, „ 3 v. u. lies $P - 2 \lambda' Q + \lambda'^2 S = \quad 4 \lambda'^2 B \,.\, v_3^2$.

„ 2 v. u. lies $P - \lambda'^2 S \quad = - 4 \lambda'^2 B \,.\, v_2 v_3$.

„ 1 v. u. lies $P + \lambda'^2 S \quad = \quad 2 \lambda'^2 B \,.\, (v_2^2 + v_3^2 + 2 v_1 v_3)$.

„ 143, „ 6 v. u. lies $\lambda' b_{11}$ statt $\lambda'' b_{11}$ und $\lambda' - \lambda''$ statt $\lambda'' - \lambda'$.

„ 4 u. 2 v. u. lies $+ (a_{11} - \lambda' b_{11})$ statt $- (a_{11} - \lambda'' b_{11})$.

„ 146, „ 10 u. 11 v. o. lies $2 b B C$ statt $2 b A C$.

„ 147, „ 20 v. u. lies $= - i$ statt $= i$ und Zeile 13 v. u. α statt x.

„ 148, „ 6 u. 7 v. u. lies $u + \lambda u'$, $v + \lambda v'$ statt $u + \lambda v$, $u' + \lambda v'$.

Seite 162, Zeile 3 v. o. lies $a^2u^2 + b^2v^2 - 1$ statt $a^2u^2 + b^2v^2$.
„ 13 u. 14 v. o. lies (3) und (4) statt (2) und (3).
„ 165, „ 10 v. u. lies „die Gleichung (5) von der aus ihr durch Vertauschung von λ und μ entstandenen" statt „dieselben von einander".
„ 172, „ 20 v. u. lies bex_1 statt bcx_1.
„ 175, Auf der linken Seite der letzten Gleichung ist y statt x zu setzen.
„ 179, Zeile 4 v. o. lies $\gamma = cx_2^{-n}(p_2p_2^{(1)} \ldots p_2^{(n-1)})^{-1}$.
„ 191, „ 19 v. u. lies $-n^2(n-1)^2$ statt $n^2(n-1)^2$.
„ 200, In (13) lies bez. $-k + \sqrt{l}$ und $-k - \sqrt{l}$ statt $k + \sqrt{l}$.
Zeile 12 u, 13 v. u. lies $2(ab)$ statt (ab).
„ 201, „ 3 v. o. lies $-\varrho$ statt $+\varrho$. — Es sind immer c und c' zu vertauschen.
„ 211, Ein vereinfachter Beweis für die Endlichkeit des Formensystems binärer Formen ist neuerdings von Gordan gegeben in der Schrift: Ueber das Formensystem binärer Formen, Leipzig 1875.
„ 213, Zeile 4 v. o. lies „zweite" statt „erste".
„ 215, „ 16 v. o. lies D' statt D''.
„ 20 v. o. lies „Subtraction" statt „Substitution".
„ 219, „ 18 v. u. lies (7) statt (9).
Auf die Invarianteneigenschaft der Bildungen R, Δ, Q bei einer binären cubischen Form machte zuerst Eisenstein aufmerksam: Crelle's Journal, Bd. 27; vgl. auch Cayley, ib. Bd. 28.
„ 224, In (19) lies $-\eta^3$ statt $+\eta^3$.
„ 227, In (24) lies $(\varkappa^2 + \frac{1}{2}R\lambda^2)^2$ statt $(\varkappa^2 + \frac{1}{2}R\lambda^2)$.
„ 228, Zeile 6 u. 7 v. o. Die Factoren ξ_1, ξ_2 auf den linken Seiten der Gleichungen sind zu streichen.
„ 230, In (6) und (12) lies $-P$ statt P.
„ 232, Zeile 7 v. o. lies $-\frac{1}{12}iH$ statt iH.
„ 237, „ 2 v. u. lies $\frac{1}{4}i^3 + \frac{1}{3}j^2$ statt $\frac{1}{2}i^3 + \frac{1}{3}j^2$.
„ 240, „ 5 v. o. lies $-\frac{1}{2}(m_1 - m_2)^2$ statt $(m_1 - m_2)^2$.
„ 241, „ 11 v. o. lies $\frac{2}{3}D^2$, $\frac{2}{3}D^3$, $\frac{1}{3}Df$ bez. statt D^2, D^3. Df.
„ 243, Anmk. Für die vollständigere geometrische Darstellung der Theorie der binären biquadratischen Form auf einer Kugelfläche, insbesondere für die Construction der Grundpunkte der Hesse'schen Form aus denen der Grundform vgl. eine Note von Wedekind: Math. Annalen, Bd. 9.
„ 244, Zeile 1 v. u. und Seite 245, Zeile 3, 4, 9 u. 12 v. o. Das Vorzeichen von l_i und l ist zu ändern.
„ 251 ff. Lies immer A_{ki} statt A_{ik}.
„ 257, Zeile 13 v. o. Im Zähler ist m statt n zu setzen.
„ 259, „ 2 v. o. lies $k^2\{(x'-x)^2 + (y'-y)^2\}$ statt $k(x'-x)^2 + (y'-y)^2$.
„ 260, „ 10 v. o. lies $\varrho = -m$ statt $\varrho = m(m+n)$.
„ 261, „ 11 v. o. lies $-A_{13}\cos\varphi$ statt $A_{13}\cos\varphi$.
„ 272. „ 16 u. 17 v. o. Die Klammern und das Wort „Invariante" sind zu streichen.
„ 273, „ 1—4 v. u. lies: also eine *Zwischenform*. Denkt man sich nun die Form Π in eine Reihe entwickelt, deren einzelne Glieder vollständige Polarenbildungen der Formen des zu Π äquivalenten Systems sind (vgl. p. 269 u. 927), so findet man in der That, dass die Bedingung des identischen Verschwindens von Π vollständig

„ durch die Forderung ersetzt werden kann, dass eine gewisse Zahl von Zwischenformen (eben den Formen jenes äquivalenten Systems) identisch gleich Null sei. Dann folgt aber . . .

Seite 285, In Gleichung (2) lies 2 statt $\frac{1}{2}$.

„ 286, Zeile 6 v. o. lies 2 (abc) statt (abc) und Zeile 10 lies $(abc)\, u_x$ statt (abc).

„ 295, „ 16 v. u. lies f' statt f.

„ 300, „ 3 v. u. und Seite 301, Zeile 1 v. o. lies 3 $A_{112}{}^2$ statt $A_{112}{}^2$.

„ 301, In Gl. (25) u. (26) lies $A_1 - 1$ und $A_2 - 1$ statt $A_1 - 3$ und $A_2 - 3$; und 1 statt 27; vgl. auch p. 987.

„ 304, Der hier gegebene Beweis des Satzes über das identische Verschwinden der Jacobi'schen Determinante, welcher darauf beruht, dass die Gleichung in Zeile 17 v. u. unabhängig von den u besteht, wird illusorisch für den Fall, dass sich von den drei Formen $N_{\varphi f}$, $N_{\varphi \psi}$, $N_{\psi f}$ ein gemeinsamer, die u enthaltender Factor absondert, wie es z. B. eintritt, wenn $f = x_1{}^2$, $\varphi = 2 x_1 x_2$, $\psi = x_2{}^2$. In diesem Beispiele verschwindet die Jacobi'sche Determinante identisch, ohne dass man $f = \varphi + \lambda \psi$ setzen könnte.

„ 315, Zeile 13—15 v. o. lies u_2, u_3, u_1 statt v_2, v_3, v_1.

„ 318, „ 16 v. o. lies $a_x{}^{n-2}\, b_x{}^{n-2}\, c_x{}^{n-2}$ statt $a_x b_x c_x$.

„ 325, „ 11 der Anmk. lies $y f_y{}^{(3)}$ statt $f_y{}^{(3)}$.

„ 328, „ 13 u. 10 v. u. lies $2b$ statt b.

„ 329, In Betreff der Untersuchung singulärer Punkte sei noch auf einen Aufsatz von Stolz verwiesen: Math. Annalen, Bd. 8.

„ 337, In Gl. (21) ist vor das Wurzelzeichen der Factor y zu setzen.

„ 340, Zeile 4 v. u. lies $k = q + r - 2$ statt $k' = k + 1 = q + r - 1$.

„ 1 v. u. lies $P = \frac{1}{2}\,(r + 2\,q)\,(r - 1)$.

„ 341, „ 2 v. o. lies $Q = \frac{1}{2}\,\{r\,(r-1) + q\,(q-1)\}$.

„ 341, In Betreff eines exacten Beweises der in Zeile 12—6 v. u. angegebenen Umkehr des vorhergehenden Satzes sei auf den angeführten Aufsatz von Nöther verwiesen.

„ 347, Zeile 17 v. u. lies (2) statt (3) und (3) statt (2).

„ 356, „ 2 u. 4 v. o. lies $+$ statt $-$.

„ 357, „ 10 v. o. lies $a_z{}^2$ statt $a_x{}^2$.

„ 360, „ 12 v. u. lies $3\,(n-2)\,(abc)^2$ statt $3\,(abc)^2$.

„ 1 v. u. und Seite 361, Zeile 1—4. ‚Ein Beweis dafür, dass die Hesse'sche Curve im Allgemeinen keine Singularitäten hat, liegt jedoch darin, dass im Folgenden die Singularitäten der Steiner'schen Curve unabhängig von denen der Hesse'schen Curve bestimmt werden, und dass beide Curven eindeutig auf einander bezogen, also von gleichem Geschlechte sind.

„ 3 der zweiten Anmerkung lies „Klasse“ statt „Ordnung“.

„ 363, „ 8 v. u. lies $v_x d\mu$ statt $d\mu$ und Zeile 2 v. u. lies $\varrho v_y dx_k$ statt ϱdx_k.

„ 371, „ 18 v. u. lies „also“ statt „aber“.

„ 373, „ 10 v. o. lies „*umschrieben*“ statt „*eingeschrieben*“.

„ 376, Zu der in Zeile 19—22 v. o. ausgesprochenen Behauptung vgl. die Entwicklungen auf p. 760 ff.

„ 377, Der in der ersten Anmerkung ausgesprochene Satz erleidet Ausnahmen, wenn die drei Grundcurven theilweise aus mehrfach zählenden Zweigen bestehen; vgl. den Zusatz zu p. 304 und

zwei Noten von Gordan und Nöther in den Sitzungsberichten der physikalisch medicinischen Gesellschaft zu Erlangen, 1875, sowie einen Aufsatz derselben in Bd. 10 der Math. Annalen.

Seite 388, Zeile 8 v. o. lies $(\alpha' + \beta)$ statt $(\alpha + \beta)$.

„ 397, In Fig. 55, *b* sind in dem untern Winkel zwischen u und v die Buchstaben φ und ψ zu vertauschen.

„ 405, Zeile 18 v. u. lies „endliche" statt „unendliche".

„ 12 v. u. Die Zahlen γ', δ sind nicht nur von der Reihe R_1, sondern auch von der Reihe R_2 unabhängig. Nach dem Satze auf p. 400 nämlich hängen diese Zahlen von dem Grade derjenigen Bedingung in den Coëfficienten der Reihe R_1 ab, welche aussagt, dass ein Schnittpunkt zweier zusammengehörigen C_2 der beiden Reihen auf einer beliebig gewählten Geraden u liegt. Diese Bedingung ist eben die Resultante der Gleichung $u_x = 0$ und der Gleichungen der beiden Reihen und also vom zweiten Grade in den Coëfficienten jeder der beiden letzteren. Die Coëfficienten α_{ik} von R_2 aber lassen sich in Folge unserer Construction eindeutig durch die Coëfficienten a_{ik} von R_1 ausdrücken. Der Grad der Resultante in diesen wird also abhängen von dem Grade der α_{ik} in den a_{ik}; und dieser Grad wiederum hängt allein von der Art ab, wie die eindeutige Beziehung von R_1 auf R_2 vermittelt wird, nicht von diesen Reihen selbst, derselbe ist daher durch bestimmte Zahlen gegeben, und also sind auch γ', δ reine Zahlenfactoren. Die Zahlen a, b, c in $\gamma\mu + \delta\nu$ hängen daher nur noch von den Zahlen α, β und somit nur noch von der gegebenen ∞^3-Reihe ab.

„ 417, Zeile 2 v. o. lies $199\,n$ statt $196\,n$, und Zeile 19 v. o. lies 5, 5, 5 statt 5, 4, 4.

„ 428, „ 14 v. o. lies $\frac{1}{2} m (m + 3) - 1$ statt $\frac{1}{2} m (m + 3)$..

„ 434, „ 21 v. u. lies *residual* statt *äquivalent*.

„ 436, „ 11 v. u. lies $n - 2 - r$ statt $n - 3 - r$.

„ 451, „ 12 v. u. lies $\frac{1}{2} k_x^2$ statt k_x^2.

In Zeile 6 u. 5 v. u. lies $(n-1)(T_2 - T_1)$ statt $T_2 - T_1$.

„ 453, Zeile 9 v. o. Der Factor γ ist vor die eckige Klammer zu setzen.

„ 457, „ 8 v. o. lies: $\big(\gamma(n-1), \gamma(n-1)\big)_\gamma$, welche einem Punkte von f die $\gamma(n-1)$ Schnittpunkte der von ihm . . . .

„ 459, Zu dem Zeuthen'schen Satze vgl. die zweite Anmerkung auf p. 681.

„ 469, Zeile 15 v. u. lies $(q + 1)$ statt $(q - 1)$.

„ 474, „ 7 v. o. Dass als Zahlenfactor bei $(q - 1)$ kein anderer als $+ 1$ oder $- 1$ auftreten kann, übersieht man leicht.

„ 478, „ 10 v. o. lies $\frac{1}{2} n (n + 3) - 1$ statt $\frac{1}{2} n (n + 3)$.

„ 484 ff. Der hier bewiesene Satz ist (nach einer Mittheilung von Frahm an den Herausgeber) auch eine unmittelbare Folge des später gegebenen Satzes über die Ersetzbarkeit der Cremona'schen Transformationen durch quadratische.

„ 489, Zeile 3 der Anmk. Das Wort „somit" ist zu streichen.

„ 493, „ 16 v. o. lies: in jedem Factor $f_{i+r}(x_1, x_2)$ von $r = 1$ bis $r = l_1$ mindestens . . .

„ 19 v. o. und Zeile 16 v. u. lies immer l statt i.

„ 494, „ 18 v. o. lies $2(n-1)^2$ statt $\frac{1}{2}(n-1)(2n-1)$.

Seite 498, Zeile 6 v. o. lies „Collineation“ statt „Combination“.
„ 517, „ 8 v. u. lies $-4b^3$ statt $-4b^2$.
„ 522, In Gl. (11) lies u_h statt u_h^2; vgl. hierzu p. 550.
Zeile 15 v. u. lies „u und v“ statt „v und w“.
„ 525, In Gl. (19) lies 8 statt $\frac{1}{8}$.
„ 540, Zeile 8. v. u. lies α statt γ.
„ 557, „ 1. v. o. lies e_y statt d_y und Zeile 7 lies (14) statt (20).
„ 560, „ 16 v. o. lies $G_1\alpha_{ikh} - G_2 a_{ikh}$ statt $G_1 a_{ikh} - G_2\alpha_{ikh}$.
„ 573, In Gl. (33) sind ε und ε^2 zu vertauschen.
„ 578, Zeile 10 v. o. lies $v_2 - \varepsilon^i v_1$ statt $v_1 - \varepsilon^i v_2$.
„ 587, „ 1 v. u. lies $6\lambda\mu^2$ u. $6\lambda^2\mu$ bez. statt $\lambda\mu^2$ u. $\lambda^2\mu$.
„ 588, „ 2 u. 5 v. o. lies $6\lambda^2\mu^2$ statt $\lambda^2\mu^2$ und Zeile 7 lies $36 u_1 u_2$ statt $u_1 u_2$.
„ 593, „ 1 v. o. lies πi statt $2\pi i$.
„ 598, Der in der Anmerkung gegebene Beweis bedarf noch einer Ergänzung für den Fall, dass die Polaren vielfache Zweige besitzen; doch gilt auch dann immer noch der Hesse'sche Satz; vgl. den Zusatz zu p. 377 und die dort genannten Arbeiten von Gordan und Nöther.
„ 602, In Gl. (1) und (2) ist in den Klammern x_1 und x_2 zu vertauschen.
„ 624, Zeile 12 v. u. lies $b_{3m-1}\, sc\Delta$ statt $b_{3m-1} c\Delta$; und in der letzten Verticalreihe der Determinante R ist immer $sc\Delta$ statt $c\Delta$ zu setzen.
„ 627, Zeile 16 u. 15 v. u. sind x_1 und x_2 zu vertauschen.
„ 629, „ 14 v. o. lies $sc\Delta f(s^2)$ statt $c\Delta f(s^2)$.
„ 634, „ 2 v. o. lies Δ_2 statt Δ_3 und Zeile 3 lies $\frac{1}{3}Tf - \frac{1}{6}S\Delta$ statt $\frac{1}{12}S^2 f - \frac{1}{3}T\Delta$.
„ 636, „ 6 v. u. lies $\delta S = 4T$ statt $\delta S = T$.
„ 637, „ 8 v. u. lies u_n statt u_x.
„ 642, In den letzten beiden Gl. (49) lies Γ^2 statt Γ.
„ 644, Zeile 9 v. u. lies $\frac{3}{4}\psi\xi$ statt $\frac{3}{4}\xi$.
„ 649—654, Lies immer $\varkappa' - \varkappa'''$ statt $\varkappa''' - \varkappa'$.
„ 650 f. Lies $-(r\alpha p)$ statt $(r\alpha p)$.
„ 653, Zeile 7 v. o. lies $p^{(4)} = 120p^3 - 36Sp + 16T$.
„ 654, „ 1 v. u. lies: $p(3u) = p - 4p'^2 \frac{12pp'^2p'' - 4p'^4 - p''^3}{(12pp'^2 - p''^2)^2}$.
„ 655, „ 2 v. o. lies: $\left\{\left(\frac{4\psi}{\Delta^2} - p\right)\left(12pp'^2 - p''^2\right) + 4p'^2p''\right\}\left(12pp'^2 - p''^2\right)$ $- 16p'^6 = 0$.
„ 659, „ 2 und 10 v. u. lies 1536 statt 384.
„ 667, „ 8 v. o. lies π statt p und in der ersten Anmk. $\nu + p - 1$ statt $\nu + p - 2$.
„ 676, In (22) lies $\geqq$ statt $\leqq$ und Zeile 17 u. 19 v. o. lies ν statt n.
„ 680, Zeile 11 u. 10 v. u. sind die Buchstaben C und U zu vertauschen; und Zeile 6 v. u. lies n statt ν.
„ 711, „ 6 u. 7 v. u. lies $p - 2$ statt $p - 3$.
„ 719, „ 11 v. o. lies $y_3 = 0$ statt $y_2 = 0$.
„ 723, „ 17 v. o. lies $ns - \Sigma a_i t_i$ statt $s(ns - \Sigma a_i t_i)$.
„ 729, „ 15 v. u. lies $-r\Sigma a_i' t_i' - \Gamma n$ statt $-r\Sigma a_i t_i'$.

Seite 738, Zeile 4 v. u. Das Glied $-2\gamma\gamma'$ auf der rechten Seite der Gleichung ist zu streichen.

„ 1 u. 2 v. u. lies: $= nk_x - 2\varkappa = \alpha\beta' + \alpha'\beta - 2\gamma\gamma' p$, wenn $p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - 1$. Es bleiben also die auf p. 732 und 736 gefundenen Resultate auch hier richtig.

„ 739, „ 3 v. u. lies (32) statt (25).

„ 743, „ 12 v. u. lies z statt x.

„ 744, „ 8 v. u. lies „Quadrupel“ statt „Tripel“.

„ 753, Die Zahlen in Zeile 16 und 19 v. o. sind zu vertauschen.

„ 759, Zeile 16 u. 5 v. u. sind die Zahlen n und p, bez. n und q in den Klammern zu vertauschen.

„ 761 f. Der hier gegebene Beweis bezieht sich nur auf den Fall $n > 2m$; ein analoger für $n \leqq 2m$ ist leicht durchzuführen.

„ 763, In den Gl. (12) lies: $\lambda = \frac{1}{2}n(n-3) - \frac{1}{2}r(r-3)$ und: $\mu = \frac{1}{2}(n-r)(n-3r+3)$.

„ 805, Zeile 1 v. u. lies $\varphi_\nu(\xi)$ statt $\varphi_\lambda(\xi)$.

„ 825, Für die Behandlung homogener Differentialausdrücke, insbesondere bei Ableitung des Abel'schen Theorems vgl. auch: Cremona: Sugli integrali a differenziale algebraico, Memorie dell' academia delle scienze dell' Istituto di Bologna, Serie 2, t. 10, 1870.

